LEHRBUCH

David Müller

Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II

Entscheidungstheorie

3. Auflage

Springer Gabler

Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II

David Müller

Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II

Entscheidungstheorie

3., überarbeitete Auflage

Springer Gabler

David Müller
Brandenburgische Technische Universität
Cottbus, Deutschland

ISBN 978-3-658-36596-7 ISBN 978-3-658-36597-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36597-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Gabler
© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2014, 2019, 2022
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Lektorat/Planung: Carina Reibold
Springer Gabler ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Für Simone, Jakob, Anna und Emil

Vorwort

Das vorliegende Buch ist der **zweite Band** des Werkes „Investitionscontrolling: Entscheidungen zu Investitionen“. Der Inhalt der Darstellungen ist im Vergleich zu den beiden Vorgänger-Auflagen so stark gewachsen, dass eine Aufteilung notwendig war. Der Umfang resultiert aus dem Bestreben, eine in sich geschlossene Darstellung von Grundlagen und Methoden zu erarbeiten, die für Investitionsentscheidungen relevant sind.

Investitionsrechenverfahren als ein wichtiges Instrument des Investitionscontrollings bauen auf entscheidungstheoretischen Grundlagen auf, die selten reflektiert werden. Angesichts des kaum zu überblickenden Publikationsaufkommens in sämtlichen Bereichen der Betriebswirtschaftslehre erscheint es hilfreich, die zwischenzeitlich eher verborgenen Elemente der Entscheidungstheorie sichtbar zu machen. Dies ist für das Verständnis und die Einordnung der Methoden ebenso unerlässlich, wie für die korrekte Anwendung. Logische Konsequenz daraus ist, die bisher eher getrennt betrachteten Bereiche der Entscheidungstheorie und der Investitionsrechnung so zusammenzuführen, dass Gemeinsamkeiten und Querverbindungen zwischen den einzelnen Teilgebieten offengelegt werden können. Das auf diese Weise entstandene Sujet ist so umfangreich, dass eine Aufteilung notwendig wurde.

Zur Strukturierung des umfangreichen Inhalts wurden fünf ordnende Kategorien verwendet: Axiome, Definitionen, Merksätze, Entscheidungsregeln sowie Beispiele. Die **Axiome** rationalen Handelns bilden die Grundbausteine für sämtliche Verfahren der Entscheidungstheorie und somit auch der Investitionsrechenverfahren. Bei genauer Betrachtung wird deutlich, dass die Modelle der Investitionsrechnung auf dem axiomatischen Fundament der Entscheidungstheorie ruhen und für die Problemstellung spezifiziert wurden. Auf den Axiomen bauen die **Definitionen** auf, aus denen **Merksätze** und **Entscheidungsregeln** abgeleitet werden. Die axiomatischen Grundlagen sind Hauptinhalt des vorliegenden Bandes. Anhand von **Beispielen** erfolgt die Veranschaulichung des besprochenen Sachverhaltes.

Die Darstellungen sind so formal wie nötig gehalten. Gleichzeitig sollte jedoch eine Präzision erreicht werden, die dem Thema gerecht wird. Daneben war es wichtig, Verbindungen zwischen den Teilbereichen herauszuarbeiten, was durch entsprechende Querverweise deutlich wird.

Einige Bereiche wurden ausgespart, da es nicht das Ziel war, ein Buch über sämtliche Methoden und Bereiche von Investitionsentscheidungen zu verfassen. Die strategische Spieltheorie ist bereits in sehr vielen Standardwerken ausführlich erläutert, weshalb sie kein Eingang gefunden hat. Als Konsequenz

daraus werden auch Anreizprobleme und Anreizsysteme nicht thematisiert, da diese als Sonderform strategischer Spielsituationen zu interpretieren sind. Ebenfalls nicht behandelt werden Entscheidungen über Investitionsprogramme, da diese letztlich zu Modellen der linearen Optimierung führen. Auch dazu existiert eine Menge an Literatur.

Ich habe versucht, die Inhalte so auszuwählen und zu formulieren, dass sich sowohl Studierende als auch Kollegen angesprochen fühlen. Dass dies einem Spagat gleicht (der gelingen kann aber nicht muss), liegt in der Natur der Sache.

Das vorliegende Lehrbuch richtet sich primär an Studierende in Masterstudiengängen und beinhaltet neben den theoretischen Ausführungen 43 Aufgaben und Lösungen. Damit ist es für die betriebswirtschaftliche Aus- und Weiterbildung geeignet.

Ohne Hilfe wäre das Buch nicht in der vorliegenden Form fertiggestellt worden. Ganz besonderen Dank schulde ich meinem Mentor, Herrn Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Ralf Trost, der mich geduldig und tatkräftig unterstützt hat. Sein Urteil und seine Kritik haben die Darstellungen entscheidend verbessert. Kollegen Univ.-Prof. Dr. rer. pol. habil. Jan Schnellenbach danke ich für wichtige Hinweise zum Thema des transferierbaren Nutzens. Herzlich möchte ich mich auch bei Frau O. Sagradov (M. Sc.) und Herrn Dipl.-Wirt.-Math. E. Schötz für die inhaltliche Unterstützung bedanken. Frau Y. Rast-Neuhaus und Herrn R. Mechling danke ich für das engagierte Korrekturlesen. Fehler, die sich trotz aller Sorgfalt eingeschlichen haben, gehen allein zu meinen Lasten.

Ein Lehrbuch ist wie ein Prisma, durch welches der Autor den kollektiven Wissensstand des jeweiligen Fachgebietes betrachtet. Auf diese Weise entsteht eine – mehr oder weniger subjektive – Momentaufnahme. Je nachdem welches Prisma wie verwendet wird, ergeben sich unterschiedliche Ausschnitte von unterschiedlicher Beschaffenheit. Die Sicht auf die Dinge ändert sich im Zeitablauf, weshalb die Darstellungen nicht vollständig abgeschlossen, sondern vielmehr vorläufig und in ständiger Veränderung sind. In diesem Sinn wünsche ich den Lesern eine angenehme Entdeckungsreise und empfehle ausdrücklich auch den Einsatz anderer Prismen um die Themen möglichst in voller Vielfalt erkennen zu können.

Cottbus, 22.02.2022 David Müller

Inhaltsverzeichnis

Vorwort vii

Abbildungsverzeichnis xv

Tabellenverzeichnis xix

Überblick und Einordnung 1

1 Präskriptive Theorie individueller Entscheidungen 3

1.1 Einführung 3

1.2 Präferenzen, Skalen, Funktionen und Funktionale 8

1.2.1 Präferenzen 8

1.2.2 Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionale 14

1.2.3 Arten von Skalen und Nutzenfunktionen 19

1.3 Höhenpräferenz - Einstufige Entscheidungen bei Sicherheit und einem Ziel 25

1.3.1 Einführung 25

1.3.2 Axiome rationalen Handelns 28

1.3.2.1 Ordinaler Nutzen 28

1.3.2.2 Kardinal messender Nutzen 37

1.3.3 Zusammenfassende Kritik 40

1.4 Artenpräferenz - Einstufige Entscheidungen bei Sicherheit und mehreren Zielen 45

1.4.1 Einführung 45
1.4.2 Nicht-kompensatorische Verfahren 51
1.4.3 Kompensatorische Verfahren 54
1.4.3.1 Einführung 54
1.4.3.2 Axiome rationalen Handelns 55
1.4.3.3 Zielgewichte und Indifferenzkurven 66
1.4.3.3.1 Rolle der Gewichte 66
1.4.3.3.2 Lineare Indifferenzkurven 70
1.4.3.3.3 Ermittlung der Zielgewichte 73
1.4.3.4 Multiattributive Nutzentheorie 77
1.4.3.5 Nutzwertanalyse 82
1.4.3.6 Analytischer Hierarchieprozess 84
1.4.3.7 Goal-Programming 95
1.4.4 Zusammenfassende Kritik 96
1.5 Unsicherheitspräferenz I - Einstufige Entscheidungen bei Risiko 98
1.5.1 Einführung 98
1.5.2 Bedingte und unbedingte Wahrscheinlichkeiten 101
1.5.3 Klassische Präferenzfunktionale 104
1.5.4 Erwartungsnutzentheorie 109
1.5.4.1 Grundlagen und Axiome 109
1.5.4.1.1 Grundlagen 109
1.5.4.1.2 Axiome rationalen Handelns 114
1.5.4.2 Erläuterungen und Eigenschaften 120
1.5.4.2.1 Einführung 120
1.5.4.2.2 Monotonie, Reduktion und Substitution 121
1.5.4.2.3 Linearität, Betweenness und Homothetie 126
1.5.4.3 Arten und Bestimmung der Risikonutzenfunktion 135
1.5.4.4 Zusammenfassende Kritik 141

1.5.4.4.1 Diskussion der Axiome 141
1.5.4.4.2 Fazit 146
1.5.4.5 Stochastische Dominanz 146
1.5.4.5.1 Einführung 146
1.5.4.5.2 Dominanz erster Ordnung 148
1.5.4.5.3 Dominanz zweiter Ordnung 153
1.5.4.5.4 Zusammenfassende Kritik 158
1.5.5 Zusammenfassende Kritik 160
1.6 Unsicherheitspräferenz II - Einstufige Entscheidungen bei Ungewissheit 160
1.6.1 Einführung 160
1.6.2 Anforderungen an ein rationales Verfahren 164
1.6.3 Klassische Regeln und Prinzipien 169
1.6.4 Zwischenfazit 178
1.6.5 Zusammenfassende Kritik 179
1.7 Zeitpräferenz bei Sicherheit - Einstufige, mehrperiodige Entscheidungen 181
1.7.1 Einführung 181
1.7.2 Axiome rationalen Handelns 188
1.7.2.1 Ergebnisse, Präferenzen und Nutzen 188
1.7.2.2 Grundlagen des additiven intertemporalen Nutzens 192
1.7.2.3 Berücksichtigung der Zeit 196
1.7.2.4 Konstante Grenzrate intertemporaler Substitution und Kapitalwert 208
1.7.3 Zusammenfassende Kritik 214
1.8 Überblick über die Axiome rationalen Handelns 216
1.9 Zeit- und Risikopräferenz - Mehrstufige, mehrperiodige Entscheidungen 221
1.9.1 Einführung 221
1.9.2 Entscheidungen bei Sicherheit 225
1.9.3 Entscheidungen bei Risiko 230

1.9.4 Zusammenfassende Kritik 238
1.10 Kritische Würdigung 239
1.11 Aufgaben und Lösungen 241
1.11.1 Aufgaben 241
1.11.2 Lösungen 254
1.12 Literaturverzeichnis 272

2 Deskriptive Theorie individueller Entscheidungen 287
2.1 Einführung 287
2.2 Aspekte und Wahrnehmung von Individualakteuren 290
2.2.1 Eigenschaften von Individuen 290
2.2.2 Wahrnehmung 296
2.2.3 Begrenzte Rationalität und Inkrementalismus 299
2.3 Abweichungen vom Modell der rationalen Wahl 301
2.3.1 Paradoxon, Antinomie und Dilemma 301
2.3.2 Ausgewählte Phänomene bei Entscheidungen unter Unsicherheit 304
2.3.2.1 St.-Petersburg-Paradox 304
2.3.2.2 Allais-Paradox 315
2.3.2.3 Newcomb-Dilemma 320
2.3.3 Klassische Heuristiken und Phänomene 327
2.3.4 Zeitinkonsistente Entscheidungen 333
2.4 Ausgewählte Ansätze zur Erklärung und Modellierung 337
2.4.1 Prospect-Theory 337
2.4.2 Probabilistische mentale Modelle 344
2.4.3 Modelle für zeit(in)konsistente Entscheidungen 349
2.4.3.1 Grundlegende Begriffe 349
2.4.3.2 Eigenschaften des rationalen Modells 350
2.4.3.3 Hyperbolisches Diskontieren 355
2.4.3.4 Quasi-hyperbolisches Diskontieren 360
2.4.3.5 Subadditives Diskontieren 363

2.4.3.6 Zusammenfassung 367
2.5 Kritische Würdigung 369
2.6 Literaturverzeichnis 370

3 Theorie und Praxis kollektiver Entscheidungen 387
3.1 Grundlagen 387
3.2 Regeln für Abstimmungen in Gruppen 393
3.2.1 Einführung 393
3.2.2 Anforderungen an eine gerechte Abstimmung 394
3.2.3 Vorstellung und Analyse ausgewählter Verfahren 399
3.2.3.1 Grundprinzipien und Mehrheitswahlregeln . . . 399
3.2.3.2 Präferenzwahlregeln 403
3.2.3.3 Zwischenfazit 415
3.2.3.4 Indikatoren der Abstimmungsstärke 420
3.2.4 Zusammenfassende Kritik 425
3.3 Eigenschaften und Verhalten von Gruppen 425
3.3.1 Eigenschaften von Gruppen 425
3.3.2 Konsequenzen für den Entscheidungsprozess 431
3.4 Aufgaben und Lösungen 436
3.4.1 Aufgaben 436
3.4.2 Lösungen 440
3.5 Literaturverzeichnis 456

4 Kooperative Spieltheorie 461
4.1 Einführung und Motivation 461
4.2 Grundlegende Annahmen 466
4.2.1 Allgemeine Annahmen 466
4.2.2 Zur Transferierbarkeit des Nutzens 468
4.3 Eigenschaften kooperativer Spiele 473
4.4 Prinzipielle Anforderungen an eine gerechte Lösung 478
4.5 Vorstellung und Analyse ausgewählter Lösungskonzepte 491
4.5.1 Kern 491

4.5.1.1 Beschreibung und Definition 491
4.5.1.2 Eigenschaften 492
4.5.2 Shapley-Lösung 500
4.5.2.1 Beschreibung und Definition 500
4.5.2.2 Eigenschaften 503
4.5.3 Nucleolus 506
4.5.3.1 Beschreibung und Definition 506
4.5.3.2 Eigenschaften 510
4.5.4 Tijs-Wert 513
4.5.4.1 Beschreibung und Definition 513
4.5.4.2 Eigenschaften 516
4.5.5 Dutta-Ray-Lösung 519
4.5.5.1 Beschreibung und Definition 519
4.5.5.2 Eigenschaften 525
4.5.6 Vergleichende Darstellung 527
4.6 Relation von Spielklassen 529
4.7 Sonderformen kooperativer Szenarien 531
4.7.1 Kostenspiele 531
4.7.2 Versorgungsnetzspiele 536
4.7.3 Flughafenspiele 542
4.8 Rationierungsprobleme und Rationierungsspiele 546
4.8.1 Rationierungsprobleme und Aufteilungsregeln 546
4.8.2 Rationierungsspiele und Lösungskonzepte 559
4.9 Kritische Würdigung 566
4.10 Aufgaben und Lösungen 569
4.10.1 Aufgaben 569
4.10.2 Lösungen 577
4.11 Literaturverzeichnis 603

Sachverzeichnis 617

Abbildungsverzeichnis

0.1 Überblick über den Inhalt der beiden Bände 1

1.1 Elemente eines einstufigen Entscheidungsmodells 4
1.2 (Un-)Sicherheit in der Planung 5
1.3 Ausgewählte Dimensionen von Entscheidungsmodellen 7
1.4 Axiomatische Zuweisung von Zahleneigenschaften 19
1.5 Indifferenzkurven und Grenzrate der Substitution 30
1.6 Nutzenwerte und Nutzenfunktion 32
1.7 Konvexe und streng konvexe Präferenzen 36
1.8 Lexikografische Präferenzen 44
1.9 Indifferenzkurven und das begrenzte Lösbarkeits-Axiom 59
1.10 Wechselseitige Unabhängigkeit von Präferenzen 62
1.11 Schwache Differenzunabhängigkeit 64
1.12 Skalen unterschiedlicher Teilziele 70
1.13 Lineare Indifferenzkurve und konstante Substitutionsrate 71
1.14 Hierarchische Grundstruktur des AHP 86
1.15 Mischung zweier Lotterien 112
1.16 Zweistufige Entscheidungssituation 123
1.17 Mehrstufige und reduzierte Lotterie 124
1.18 Substitution einer einfachen Lotterie 126
1.19 Wahrscheinlichkeitssimplex einer Lotterie 128

1.20 Lage von Lotterien im Wahrscheinlichkeitssimplex 128
1.21 Wahrscheinlichkeitsdreieck einer Lotterie 130
1.22 Alternative Lagebestimmung im Wahrscheinlichkeitsdreieck . . . 131
1.23 Verlauf von Indifferenzkurven 131
1.24 Parallelität von Indifferenzkurven 133
1.25 Konkave Risikonutzenfunktion 137
1.26 Alternativendarstellung bei der BERNOULLI-Befragung 138
1.27 Darstellung der approximierten Risikonutzenfunktion des Akteurs 141
1.28 Verteilungsfunktionen der Alternativen a_2 und a_5 150
1.29 Risikoprofile der Alternativen a_2 und a_5 152
1.30 Verteilungsfunktionen der verbleibenden Alternativen 154
1.31 Differenz zwischen den kumulierten Flächen von a_5 und a_6 157
1.32 Intertemporale Indifferenzkurven 181
1.33 Lineare intertemporale Indifferenzkurven 210
1.34 Struktur von N-stufigen Entscheidungen bei Sicherheit 222
1.35 Formalstruktur des Entscheidungsbaumes unter Sicherheit 227
1.36 Entscheidungsbaum des Beispiels 228
1.37 Formalstruktur eines Entscheidungsbaumes bei Risiko 235
1.38 Entscheidungssituation für Beispiel 1.25 236
1.39 Ergebnisse für Beispiel 1.25 237

2.1 Sekundärdeterminanten des Entscheidungsverhaltens 289
2.2 Linsenmodell von BRUNSWIK 297
2.3 Stufen des Wahrnehmungsprozesses 298
2.4 Explizite Entscheidungssituation zum Common-Consequence-Effekt 316
2.5 Implizite Entscheidungssituation zum Common-Consequence-Effekt 316
2.6 Fanning-out von Indifferenzkurven 317
2.7 Entscheidungssituation zum Common-Ratio-Effekt 318
2.8 Grafische Darstellung des Common-Ratio-Effektes 319

2.9 Bayessches Netz für die Ein-Box-Lösung 324
2.10 Bayessches Netz für die Zwei-Box-Lösung 325
2.11 Alternatives Bayessches Netz für die Zwei-Box-Lösung 326
2.12 Idealtypische Wertfunktion der Prospect-Theory 340
2.13 Idealtypische Funktionen der Wahrscheinlichkeitsgewichtungen 342
2.14 Exponentielle und hyperbolische Diskontierungsfunktionen 359
2.15 Intertemporale Entscheidungssituation 364

3.1 Bildung der kollektiven Präferenzordnung 391
3.2 Ausschnitt aus Pfadabbildung des Paarvergleiches 413
3.3 Vollständige Pfadabbildung aller direkten Paarvergleiche 413
3.4 Eingipfligkeit bei vollständiger Präferenzordnung 419
3.5 Einflussvariablen der Gruppenarbeit 426
3.6 Mögliche Rollenerwartungen an eine Person 430

4.1 Milchverarbeitungsstufen und -erzeugnisse 462
4.2 Konvexer und konkaver Funktionsverlauf 475
4.3 Relation von Monotonie, Superadditivität und Konvexität 477
4.4 Relation von Monotonie, Superadditivität, Konvexität und Wesentlichkeit 478
4.5 Dreidimensionale Darstellung der Ausgangssituation für Bspl. 4.1 480
4.6 Zweidimensionale Darstellung der Ausgangssituation für Bspl. 4.1 481
4.7 Grafische Darstellung des Kerns für Bspl. 4.1 492
4.8 Lage der Shapley-Lösung für Bspl. 4.1 502
4.9 Lage des Nucleolus für Bspl. 4.1 510
4.10 Lage des τ-Wertes für Bspl. 4.1 in der Ebene 516
4.11 Lage des τ-Wertes für Bspl. 4.1 im Raum 516
4.12 Lorenz-Kurven für Beispiel 4.10 521
4.13 Gleichverteilung, Kern, Lorenz-Lösung und Nucleolus 523
4.14 Lage der Dutta-Ray-Lösung für Bspl. 4.1 525

4.15 Kern des Kostenaufteilungsspiels für Bspl. 4.17 534
4.16 Lage der SHAPLEY-Lösung für Bspl. 4.17 535
4.17 Lage von SHAPLEY-Lösung und NUCLEOLUS 536
4.18 Verbindungsmöglichkeiten der Wasserversorgung 538
4.19 Kern des Kostenspiels 539
4.20 Lage der SHAPLEY-Aufteilung des Kostenspiels 540
4.21 Beispiel eines nicht konvexen MKSS 541
4.22 Schema der bedingten Ertrags-Gleichverteilung 554
4.23 Schema der Talmud-Regel 556
4.24 LORENZ-Kurven der Zuteilungsregeln 558

Tabellenverzeichnis

1.1 Kombinationen von Informationsständen 6
1.2 Beschreibungsmerkmale von Präferenzen 9
1.3 Relation auf E als Teilmenge von $E \times E$ 15
1.4 Möglichkeiten der Generierung von Präferenzfunktionalen 18
1.5 Eigenschaften der Skalenniveaus 25
1.6 Ergebnistabelle bei Sicherheit und einem Ziel 26
1.8 Grundstruktur der multikriteriellen Ergebnismatrix bei Sicherheit 48
1.9 Beispielhafte Entscheidungsmatrix bei mehrfacher Zielsetzung . 51
1.10 Anwendungsbeispiel der KÖRTH-Regel 53
1.11 Modifiziertes Anwendungsbeispiel der KÖRTH-Regel 54
1.12 Ausgangswerte des Skalierungs-Beispiels 67
1.13 Ordinalskalierte Paarvergleichsmatrix des Beispiels 74
1.14 Alternative ordinalskalierte Paarvergleichsmatrix des Beispiels 75
1.15 Verhältnisskalierte Paarvergleichsmatrix des Beispiels 76
1.16 Anwendungsbeispiel der Zielgewichtung 77
1.17 Ausgangswerte des multikriteriellen Beispiels 78
1.18 Nutzwertanalyse zur Standortauswahl 84
1.19 Skala der relativen Wichtigkeit 87
1.20 Durchschnittliche Konsistenzwerte 89
1.21 Paarvergleichsmatrix der Kriterien der Hierarchiestufe B 91

1.22 Anwendungsbeispiel des Goal-Programming 96
1.23 Grundstruktur der Ergebnismatrix bei Risiko 99
1.24 Ergebnismatrix des Beispiels 1.10 100
1.25 Ermittlung gemeinsamer Wahrscheinlichkeiten 103
1.26 Anwendung der BAYES-Regel 105
1.27 Anwendung des μ-σ-Prinzips 106
1.28 Anwendung des μ-ρ-Prinzips 108
1.29 Anwendung des HODGES-LEHMANN-Prinzips 109
1.30 Ausgangsdaten des BERNOULLI-Beispiels 140
1.31 Ergebnisse der BERNOULLI-Befragung 140
1.32 Erwartungswerte des Risikonutzens 140
1.33 Ausgangsdaten der Entscheidung unter Risiko 150
1.34 Verteilungsfunktionen der Alternativen 150
1.35 Wahrscheinlichkeitsfunktionen für a_2 und a_5 152
1.36 Verteilungsfunktionen und kumulierte Flächeninhalte 156
1.37 Einfluss der Nutzenfunktion des Akteurs 158
1.38 Einordnung der Dominanzkonzepte 159
1.39 Grundstruktur der Entscheidungsmatrix bei Ungewissheit 162
1.40 Gotteswette von PASCAL 163
1.41 Entscheidungsmatrix des Beispiels 1.18 164
1.42 Anwendung der WALD-Regel 170
1.43 Verletzung des Spalten-Linearitäts-Axioms 171
1.44 Anwendung der Maximax-Regel 172
1.45 Anwendung des HURWICZ-Prinzips 173
1.46 Verletzung des Spalten-Linearitäts-Axioms durch das HURWICZ-Prinzip 174
1.47 Nichterfüllung des Konvexitäts-Axioms durch das HURWICZ-Prinzip 174
1.48 Anwendung der LAPLACE-Regel 175
1.49 Nichterfüllung des Duplikations-Axioms durch die LAPLACE-Regel 175
1.50 Darstellung der maximalen Alternativen 177

1.51 Anwendung der Regel des geringsten Bedauerns 177
1.52 Einführung einer irrelevanten Alternative 177
1.53 Einfluss der irrelevanten Alternative a_7 178
1.54 Erfüllung der Axiome von Milnor durch die Verfahren 179
1.55 Ergebnisse der Entscheidungen bei Ungewissheit 179
1.56 Grundstruktur der intertemporalen Ergebnismatrix 188
1.57 Beispiel für die zeitliche Summendominanz 191
1.58 Stationarität von Präferenzen 199
1.59 Überblick über die Axiome rationalen Handelns 217
1.60 Präferenzfunktionale mit additiver Grundstruktur 219
1.61 Ausgangsdaten des mehrstufigen Entscheidungsproblems 227
1.62 Grundstruktur der intertemporalen Ergebnismatrix bei Risiko . 231

2.1 Relevanz der Kulturdimensionen für Führungsphasen 294
2.3 Ausgewählte Lösungen, Argumente und Ideen im Zusammenhang mit dem St.-Petersburg-Paradoxon 306
2.4 Ergebnisse im St.-Petersburg-Experiment 313
2.5 Common-Ratio-Effekt 319
2.6 Auszahlungsmatrix des Newcomb-Dilemmas 321
2.7 Erweiterte Darstellung des Newcomb-Dilemmas 322
2.8 Wahrscheinlichkeitenmatrix des Newcomb-Dilemmas 323
2.9 Mögliche Interpretationen der Wahrscheinlichkeiten des Newcomb-Dilemmas 324
2.10 Klassische Heuristiken und Phänomene 333
2.11 4-Felder-Muster der Risikoeinstellung gemäß der Prospect-Theory 342
2.12 Beispielhafte Ermittlung des Erwartungsnutzens der Prospect-Theory 343
2.13 Entwicklung der hyberbolischen Diskontierungsfaktoren 356
2.14 Entwicklung der Diskontierungsfaktoren und der Diskontrate im quasi-hyperbolischen Modell 362
2.15 Merkmale von ausgewählten Diskontierungsmodellen 368

3.1 Ausgewählte Effekte von Gruppenentscheidungen 388
3.2 Grundstruktur der kollektiven Entscheidungssituation 392
3.3 Anforderungen an einen Aggregationsmechanismus 395
3.4 Beispiel zur Nichterfüllung des Monotonie-Kriteriums 396
3.5 Beispiel zum No-show-Paradox 397
3.6 Ausgangssituation der Gremienentscheidung 402
3.7 Ergebnisse der BUCKLIN-Methode 404
3.8 Anwendung der BORDA-Regel 405
3.9 Einfluss einer irrelevanten Alternative auf die BORDA-Regel . . . 405
3.10 Darstellung der NANSON-Regel 406
3.11 Ergebnisse des direkten Paarvergleiches 409
3.12 Grundstruktur der Matrix der paarweisen Vergleiche 411
3.13 Matrix der Paarvergleiche 411
3.14 Matrix der Maxima der schwächsten Glieder 414
3.15 Zusammenfassung der Ergebnisse kollektiver Entscheidungsregeln 415
3.16 Erfüllung der Anforderungen durch Abstimmungsregeln 416
3.17 Alternative Ermittlung des SHAPLEY-SHUBIK-Index 423
3.18 Idealtypische Phasen der Gruppenentwicklung 426

4.1 Koalitionsfunktion des (Bei-)Spiels 479
4.2 (Bei-)Spiele für das Additivitätsaxiom 485
4.3 (Bei-)Spiel für die Populationsmonotonie 490
4.4 (Bei-)Spiel für unterschiedliche Gewichtungsfaktoren 497
4.5 Tabellarische Ermittlung der SHAPLEY-Lösung 502
4.6 SHAPLEY-Werte für das Additivitätsbeispiel 503
4.7 (Bei-)Spiel für nicht populationsmonotone SHAPLEY-Lösung . . 505
4.8 Ermittlung des Nucleolus für das (Bei-)Spiel 4.1 509
4.9 SHAPLEY-Werte und NUCLEOLUS für das Additivitätsbeispiel . 511
4.10 SHAPLEY- und τ-Werte für das Additivitätsbeispiel 517
4.11 (Bei-)Spiel für den nicht zum Kern gehörenden τ-Wert 517

4.12 Koordinaten der LORENZ-Kurven 520
4.13 LORENZ-undominierte Kernzuteilungen 524
4.14 SHAPLEY-Werte und DUTTA-RAY-Lösungen für das Additivitätsbeispiel 526
4.15 Überblick über die Ergebnisse 527
4.16 Eigenschaften der Lösungskonzepte 528
4.17 Eingangsdaten des Beispiels 4.17 533
4.18 Kostenfunktion der Molkereivarianten 533
4.19 Kostenreduktionsfunktion der Molkereivarianten 534
4.20 Kostenfunktion der Wasserversorgung 538
4.21 Kostenreduktionsfunktion der Wasserversorgung 539
4.22 Kosten- und Koalitionsfunktion des nicht konvexen MKSS 540
4.23 Kostenfunktion des Flughafenspiels 544
4.24 Koalitionsfunktion des Flughafenkostenreduktionsspiels 545
4.25 APR für Beispiel 4.21 551
4.26 ZBR für Beispiel 4.21 552
4.27 BEG für Beispiel 4.21 553
4.28 BVG für Beispiel 4.21 555
4.29 Talmud-Regel für Beispiel 4.21 557
4.30 Zusammenfassung der Ergebnisse für Beispiel 4.21 557
4.31 Koalitionsfunktion für Beispiel 4.22 560
4.32 Kooperative Lösungswerte für Beispiel 4.22 560
4.33 ZBR für Beispiel 4.22 561
4.34 APR für Beispiel 4.22 564
4.35 BEG für Beispiel 4.22 565
4.36 Talmud-Regel für Beispiel 4.22 565

Überblick und Einordnung

Das vorliegende Buch ist der **zweite Band** des Werkes „Investitionscontrolling: Entscheidungen zu Investitionen“. Im **ersten Band** werden die grundsätzlichen Merkmale der Planung, Realisierung und Kontrolle von Investitionen dargelegt sowie das Verständnis und die Aufgaben des Investitionscontrollings vorgestellt (vgl. Abb. 0.1). Darüber hinaus sind Verfahren der Investitionsrechnung bei Sicherheit und bei Unsicherheit dargestellt. Der anwendungsorientierte Einsatz der Modelle wird am Beispiel von Lebenszyklusrechnung und von wertorientierter Steuerung demonstriert.

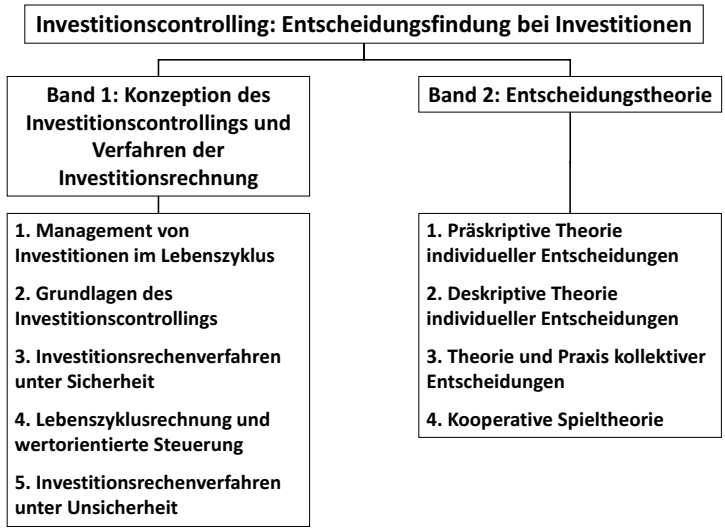


Abb. 0.1: Überblick über den Inhalt der beiden Bände. Quelle: Eigene Darstellung.

Neben diesen Verfahren werden im Investitionscontrolling ebenfalls regelmäßig Modelle der **Entscheidungstheorie** eingesetzt. Diese sind Gegenstand des vorliegenden **zweiten Bandes**. Besser gesagt: Alle Modelle basieren auf bestimmten Annahmen über die **Präferenzen** des Entscheidungsträgers, auch die Modelle der Investitionsrechnung. Die Diskussion dieser Annahmen steht deshalb im Zentrum des vorliegenden Bandes. Von der Übereinstimmung dieser Annahmen mit der Realität hängt der korrekte Einsatz und die Interpretation sämtlicher Modelle ab. Einige Annahmen werden standardmä-

ßig im Zusammenhang mit der durch von Neumann und Morgenstern formalisierten Erwartungsnutzentheorie erläutert. Eine genaue Betrachtung offenbart jedoch für sämtliche Modelle der Entscheidungstheorie – und damit auch der Investitionsrechnung – ähnliche Annahmen über die Präferenzen.

Neben diesen Analysen wird der Schwerpunkt auf diejenigen Aspekte gelegt, die oftmals wenig beleuchtet werden. Dazu zählen zweifelsohne die **kollektive Entscheidungstheorie** und die **kooperative Spieltheorie**.

Deshalb ergänzen sich diese Themenbereiche – und daher beide Bände – gegenseitig: Einerseits werden finanzielle Größen der Investitionsrechnung (z. B. der Kapitalwert) in den entscheidungstheoretischen Modellen als alleinige Eingangsgröße (z. B. bei Entscheidungen unter Sicherheit und einem Ziel oder beim Entscheidungsbaumverfahren) und/oder als eine von mehreren Zieldimensionen (z. B. bei den multikriteriellen Verfahren) verwendet. Andererseits bilden die Axiome und Modelle der Entscheidungstheorie aus dem vorliegenden zweiten Band die Grundlage für einige der Investitionsrechenverfahren, wie z. B. die Axiome der Zeitpräferenz für Rechenverfahren im unvollkommenen Kapitalmarkt oder die Erwartungsnutzentheorie für die Risikoanalyse.

Die Verbindungen zwischen den Themengebieten werden durch gegenseitige Querverweise illustriert. Diese Verweise zwischen den Bänden haben eine andere Zitationsstruktur als die Zitation für die übrige Literatur. Damit wird ein direkter Bezug hergestellt und deutlich gemacht, dass die Bände sich inhaltlich ergänzen.

Der vorliegende Band erhebt keinen Anspruch auf eine vollständige Darstellung der Entscheidungs- bzw. Spieltheorie. Vielmehr werden die Inhalte vorgestellt, die eine primäre Affinität zu den Investitionsentscheidungen im Unternehmen haben. Eine Ausnahme davon bildet die strategische Spieltheorie, die bereits in sehr vielen Standardwerken ausführlich erläutert ist. Deshalb wird dieser Themenbereich nicht behandelt, weshalb auch Anreizprobleme und Anreizsysteme nicht thematisiert werden.

Kapitel 1

Präskriptive Theorie individueller Entscheidungen

1.1 Einführung

Die folgenden Ausführungen sind in die grundlegenden Darstellungen der Planung und Entscheidung eingebettet.[1] Im weiteren Verlauf wird zwischen zwei Entscheidungssituationen und daraus resultierenden Modellklassen unterschieden:[2]

- **Entscheidungsmodell:** Es steht eine endliche Menge von Alternativen zur Auswahl, die klar voneinander abgegrenzt sind und sich gegenseitig ausschließen. Die Lösung für das Problem besteht in der Auswahl einer dieser Alternativen. Im vorliegenden Werk werden ausschließlich Entscheidungsmodelle vorgestellt.
- **Optimierungsmodell:** Ausgehend von einer Zielfunktion und einer Reihe von Nebenbedingungen muss eine Lösung gesucht werden. Es stehen keine expliziten Alternativen zur Auswahl, die Lösungsmenge ist demzufolge unendlich. Das ist die klassische Ausgangslage für Optimierungsverfahren. Dabei wird eine (oder mehrere) Ergebnisgröße(n) unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen minimiert oder maximiert. Auf diese Verfahren wird in diesem Werk nicht eingegangen.

Zur Konstruktion eines Entscheidungsmodells (vgl. Abb. 1.1) sind Informationen über:

- das Zielsystem des Entscheidungsträgers sowie
- das Entscheidungsfeld

erforderlich. Das **Zielsystem** enthält Angaben über die zu erreichenden **Zielgrößen** sowie über die **Präferenzen** des Akteurs. Der Akteur muss sich also im Klaren darüber sein, welche Ergebnisgröße er verfolgt und welche Ausprägung dieser Größe er bevorzugt. Ausgangspunkt einer Planung sind zu erreichende Ziele. Ein Ziel ist die Formulierung eines zukünftig zu erreichenden Zustandes und ist gekennzeichnet durch:[3]

- den Zielinhalt,
- die Präferenzen für die Ausprägungen des angestrebten Zustandes,
- den zeitlichen Bezug und

[1] Vgl. 1. Band, Abschn. 1.2 auf S. 5.
[2] Vgl. Klein/Scholl (2011: 40–41).
[3] Vgl. Küpper et al. (2013: 140–141).

© Der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

D. Müller, *Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36597-4_1

- die Orientierung auf den angestrebten Zustand und nicht auf die zur Erreichung erforderlichen Mittel und Wege.

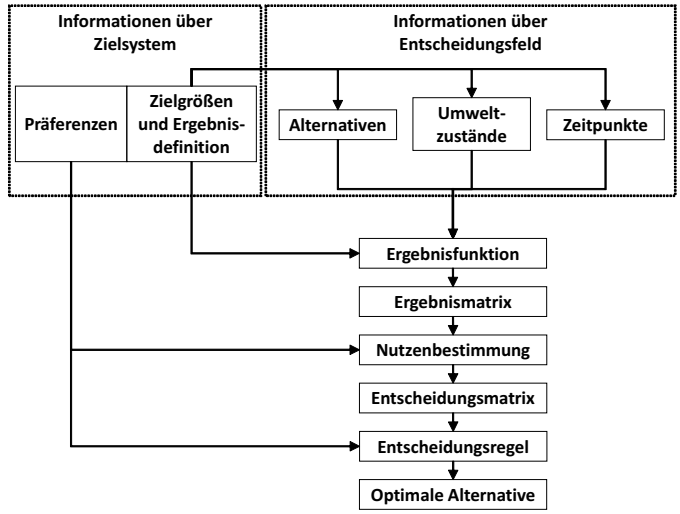


Abb. 1.1: Elemente eines einstufigen Entscheidungsmodells. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Sieben/Schildbach (1994: 16); Klein/Scholl (2011: 43).

Das **Entscheidungsfeld** besteht aus der endlichen Menge der verfügbaren Alternativen, der endlichen Menge der möglichen Umweltzustände, der endlichen Menge der möglichen Zeitpunkte und dem Ergebnis jeder Alternative für jeden möglichen Zustand zu jedem möglichen Zeitpunkt.

Die möglichen Aktionen zur Problemlösung werden als **Alternativen** bezeichnet. Diese sind i. d. R. nicht vorgegeben, sondern in der Suchphase zu identifizieren. Dabei ist sicherzustellen, dass eine ausreichend große Anzahl an Alternativen gesucht und in die Betrachtung einbezogen wird. Nachdem verschiedene Alternativen gefunden wurden, sind aussichtsreiche Varianten bzw. die optimale Alternative zu identifizieren.

Planung bezieht sich auf zukünftige Zustände. Aus diesem Grunde ist es möglich, dass verschiedene **Umweltzustände** eintreten können. Rahmendaten und Eingangsinformationen über die Zukunft können sicher oder unsicher sein. **Sicherheit** liegt vor, wenn dem Akteur bekannt ist, welche Umweltsituation eintreten wird bzw. eingetreten ist.

Ist die Planung dadurch charakterisiert, dass bei mindestens einer Alternative mehrere Umweltzustände möglich sind, so ist dies eine Planung unter **Unsicherheit**.

Die Verwendung der Begriffe „Unsicherheit“ und „Ungewissheit“ ist in der Literatur sehr unterschiedlich. Abbildung 1.2 zeigt eine Übersicht zum grundsätzlichen Verständnis der Begriffe.

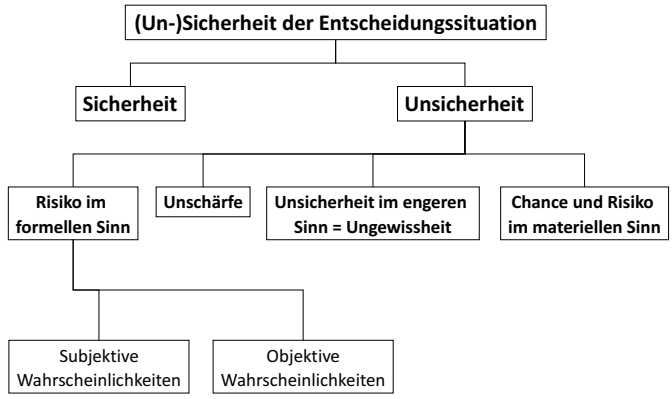


Abb. 1.2: (Un-)Sicherheit in der Planung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Adam (1997: 334–335).

Planung unter Unsicherheit wird weitergehend wie folgt unterschieden:

- **Ungewissheit**: Hält der Entscheidungsträger mehrere zukünftige Umweltzustände für möglich, sind aber die Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Umweltzustände unbekannt, liegt eine Entscheidung unter Ungewissheit vor.
- **Risiko**: In dieser Situation sind dem Akteur sämtliche möglichen Umweltzustände sowie die dazugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt. Diesem Verständnis liegt die Vorstellung der Schwankung von zukünftigen Umweltzuständen um einen Erwartungswert zugrunde, weshalb der Begriff auch als formaler Risikobegriff bezeichnet wird. Davon zu unterscheiden ist das materielle Risikoverständnis, welches einzig auf die negativen Wirkungen von Entscheidungen abstellt und das umgangssprachlich eine weite Verbreitung gefunden hat.
- **Unschärfe**: Diese Situation liegt vor, wenn mindestens eines der Beschreibungsmerkmale zukünftiger Zustände – Art, Menge, Zeitpunkt, Ort – nicht exakt durch eine Ausprägung beschrieben werden kann.[4] Mit Hilfe der Theorie der unscharfen Mengen (Fuzzy-Sets) lassen sich unscharfe Beschreibungen oder Relationen erfassen.

Den unterschiedlichen Kombinationen aus Alternativen, Umweltzuständen und Zeitpunkten sind **Ergebnisse** zuzuweisen. Es ist festzulegen, bei welcher

[4] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 38).

Alternative in welchem Umweltzustand, zu welchem Zeitpunkt mit welchem Ergebnis gerechnet wird. Als Resultat entsteht die **Ergebnismatrix**. Dabei kann der Fall eintreten, dass die Informationen über die möglichen Ergebnisse selbst wiederum unsicher oder sicher sind (vgl. Tab. 1.1).

Tab. 1.1: Kombinationen von Informationsständen. Quelle: Bamberg/Coenenberg /Krapp (2019: 24).

Informationsstand	*Informationsstand bezüglich der Ergebnisse*		
bezüglich der Zustände	Sicherheit	Risiko	Ungewissheit
Sicherheit	Sicherheit	Risiko	Ungewissheit
Risiko	Risiko	Risiko	Ungewissheit
Ungewissheit	Ungewissheit	Ungewissheit	Ungewissheit

Die Tabelle 1.1 verdeutlicht die verschiedenen Ursachen für die Sicherheit bzw. Unsicherheit einer Entscheidungssituation.

Den prognostizierten Ergebnissen muss der Entscheidungsträger einen **Nutzen** zuweisen. So entsteht aus der Ergebnismatrix die **Nutzenmatrix**, die oft synonym als **Entscheidungsmatrix** bezeichnet wird. Auf diese Entscheidungsmatrix wendet der Akteur die **Entscheidungsregel** an und identifiziert so die optimale Alternative zur Lösung seines Problems.

Das soeben beschriebene Matrix-basierte Vorgehen ist kennzeichnend für **einstufige** Entscheidungen, jedoch nicht die einzig mögliche Darstellungsform. Im Fall von **mehrstufigen** Entscheidungen kann der Akteur zu mehreren Zeitpunkten eine Entscheidung treffen, weshalb üblicherweise eine andere Darstellungsform gewählt wird.[5]

Die Modellierung von Entscheidungssituationen ist auf vielfältigen Wegen möglich (vgl. Abb. 1.3). Folgende Aspekte können Eingang in die Modellierung finden:

- Eigenschaft des Informationsstandes: Entscheidungen bei Sicherheit, Risiko oder Ungewissheit,
- Anzahl der verfolgten Ziele: einfache oder multikriterielle Entscheidung,
- Anzahl der Entscheidungen: ein- oder mehrstufige Entscheidung,
- Existenz eines weiteren Akteurs:
  - bewusst handelnde Gegenspieler: strategische Spieltheorie,
  - bewusst handelnde Mitspieler: kooperative Spieltheorie.

[5] Vgl. Abschn. 1.9 auf S. 221.

Von diesen Aspekten werden in dem vorliegenden Kapitel die ersten drei Dimensionen behandelt und die kooperative Spieltheorie wird in einem eigenständigen Kapitel behandelt.[6]

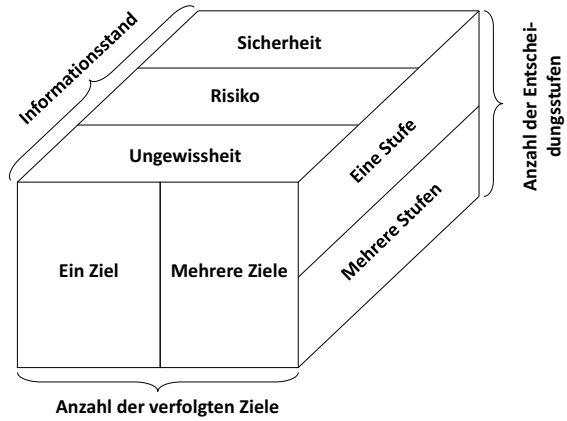


Abb. 1.3: Ausgewählte Dimensionen von Entscheidungsmodellen. Quelle: Eigene Darstellung.

Ausgangspunkt der präskriptiven Entscheidungstheorie ist der Idealtyp des menschlichen Entscheiders: der **homo oeconomicus**. Dieser Entscheidungsträger ist vollkommen im ökonomische Sinn. Er:[7]

- möchte, kann und darf jedes Problem rational lösen und dabei seinen eigenen Nutzen maximieren,
- verfügt über vollständige Informationen,
- ist in der Lage seine Präferenzen zu formulieren,
- behält die Präferenzen konstant über die Zeit bei,
- verfügt über den Willen und über das Können, sämtliche Verfahren der Problemanalyse und Problemlösung sachgerecht durchzuführen,
- verfügt über unbegrenzte Kapazitäten zur Informationsverarbeitung, Speicherung und Problemlösung,
- wird nicht von Emotionen beeinträchtigt,
- unterliegt in der Analyse, Findung und Umsetzung der Problemlösung keinen anderweitigen Einschränkungen,
- bearbeitet Entscheidungsprobleme zeitstetig und ohne Kosten.

[6] Vgl. Kapitel 4 auf S. 461.

[7] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 325); Wolf (2020: 129). Zu einer Kritik vgl. Abschn. 2.1 auf S. 287.

Ob diese Zuschreibungen noch ein menschliches Wesen (homo) beschreiben, oder vielmehr eine unfehlbare Instanz, sei dahingestellt. Diesem Wesen werden für verschiedene Situationen vielfältige Eigenschaften zugeschrieben, die ein vollkommen rationales Verhalten sicherstellen. Damit können die ökonomischen Entscheidungsprobleme möglichst gut mathematisch modelliert und gelöst werden.

Die präskriptive Entscheidungstheorie umfasst neben den – in diesem Kapitel behandelten – individuellen auch die kollektiven Entscheidungen[8] sowie die kooperative Spieltheorie.[9] Diese Bereiche werden in eigenständigen Darstellungen diskutiert, verwenden jedoch ebenfalls die Annahme des homo oeconomicus.

Die strategische Spieltheorie ist ebenfalls ein wesentlicher Bestandteil der präskriptiven Entscheidungstheorie. Dieser Bereich wird jedoch in dem vorliegenden Werk nicht behandelt, sondern es wird auf die umfangreiche Literatur verwiesen.[10]

1.2 Präferenzen, Skalen, Funktionen und Funktionale

1.2.1 Präferenzen

Für eine Entscheidung zwischen mehreren alternativen Ergebnissen muss klargestellt werden, wie der Akteur diese Ergebnisse bewertet. Dies erfolgt durch die Festlegung von Präferenzen. Damit wird die Vorziehenswürdigkeit von bestimmten Resultaten – oder auch die Abneigung diesen gegenüber – manifestiert. Der Akteur legt die Relation fest, in der er die Ergebnisse zueinander einordnet. Die Verwendung von Präferenzen bzw. Präferenzrelationen ist ein grundlegendes Konzept der Mikroökonomie zur Modellierung von Konsumenten und deren Entscheidungen.[11] Dazu wird die Vorziehenswürdigkeit bestimmter Merkmale der zu konsumierenden Güter betrachtet. Die Entscheidungstheorie basiert im Wesentlichen auf dieser Modellierung des Akteurs. Die Präferenzen für die Ausprägungen des angestrebten Zustandes und deren Relationen muss der Entscheidungsträger im Zusammenhang

[8] Vgl. Abschn. 3.2 auf S. 393.

[9] Vgl. Kapitel 4 auf S. 461.

[10] Vgl. Peters (2015); Holler/Illing/Napel (2019); Maschler/Solan/Zamir (2020).

[11] Das Konzept der Präferenzrelationen wurde 1926 von Ragnar Frisch (1895–1973) eingeführt, der 1969 zusammen mit Jan Tinbergen den ersten „Wirtschaftsnobelpreis“ (Offizielle Bezeichnung: Preis für Wirtschaftswissenschaften der schwedischen Reichsbank im Gedenken an Alfred Nobel) erhielt. Vgl. Frisch (1926); Frisch (1957); Barten/Böhm (1982: 384).

mit der Zielformulierung festlegen. Präferenzen können durch eine Reihe von Merkmalen charakterisiert werden (vgl. Tab. 1.2).

Tab. 1.2: Beschreibungsmerkmale von Präferenzen. Quelle: Eigene Darstellung.

Merkmal	Ausprägungsformen	Varianten
a) Art der Dimension	Höhenpräferenz	
	Artenpräferenz	
	Unsicherheitspräferenz	
	Zeitpräferenz	
b) Anzahl der Entscheidungsträger	Individuelle Präferenz	
	Kollektive Präferenz	
c) Anzahl der Dimensionen	Einfache Präferenz	
	Multidimensionale Präferenzen	
d) Objekt	Präferenz 1. Ordnung	
	Präferenz höherer Ordnung	
e) Separierbarkeit	Nicht separierbare Präferenzen	
	Separierbare Präferenzen	Additive Präferenzen
		Nicht additive Präferenzen
f) Anzahl der Entscheidungsstufen	Einmalige Präferenz	
	Sequenzielle Präferenzen	Veränderliche Präferenzen
		Unveränderliche Präferenzen

Diese Merkmale werden nun kurz erläutert.

- **Merkmal a)** (die Dimension der Präferenz) beschreibt, auf welches Element des Zielsystems sie sich bezieht. Es werden folgende Grundtypen von Präferenzen unterschieden:[12]
  - Höhenpräferenzen (Abschn. 1.3 auf S. 25–45),
  - Artenpräferenzen (Abschn. 1.4 auf S. 45–97),
  - Unsicherheitspräferenzen (Abschn. 1.5 und Abschn. 1.6 auf S. 98–180) und
  - Zeitpräferenzen (Abschn. 1.7 auf S. 181–216).

  Die Festlegung einer **Höhenpräferenz** ist in jeder Zielbildung erforderlich, um das angestrebte Ausmaß der Zielgröße festzulegen. Der Akteur muss bestimmen, welchen Nutzen er welcher **Höhe** des Ergebnisses beimisst. So ist es möglich, dass der maximale Nutzen bei dem Ergebnismaximum oder dem Ergebnisminimum erzielt wird. Ebenfalls denkbar ist das Erreichen des Nutzenmaximums bei einem vordefinierten Wert.

  Werden gleichzeitig Ziele angestrebt, die wenigstens teilweise im Konflikt zueinander stehen, sind **Artenpräferenzen** zu formulieren, welche die Rangfolge zwischen diesen Zielen beschreiben. Damit wird festgelegt, welcher Nutzen welcher **Zielart** zugeschrieben wird.

[12] Vgl. Sieben/Schildbach (1994: 25–27); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 28).

Fallen die Ergebnisse von Handlungsalternativen zu unterschiedlichen Zeitpunkten an, ist es erforderlich, die Vorziehenswürdigkeit dieser zeitlich unterschiedlichen Ergebnisse zu regeln. Der Akteur bestimmt mit der **Zeitpräferenz** den Nutzen, den er dem **Zeitpunkt** zuweist, an welchem das Ereignis eintritt.

Als spezielle Form der Artenpräferenz, die jedoch gesondert betrachtet wird, ist die **Unsicherheitspräferenz** anzuführen, welche in Entscheidungssituationen unter Unsicherheit relevant ist. D. h. der Nutzen aus der Ausprägung des Entscheidungsmerkmals „Grad der Sicherheit" ist festzulegen. Im weiteren Verlauf wird der Begriff der **Risikopräferenz** speziell für Entscheidungen bei Risiko verwendet.[13]

- **Merkmal b)** unterscheidet nach der Anzahl der Subjekte. Jeder Akteur verfügt über seine eigene, **individuelle Präferenz**. Da ein Großteil von Entscheidungen nicht durch Einzelpersonen, sondern in entsprechenden Gremien getroffen wird, ist festzulegen, wie aus den vielen individuellen Präferenzen eine **kollektive Präferenz** gebildet werden kann. Die Darstellungen in diesem Kapitel gehen von Allein-Entscheidern aus. Die Frage, wie die dabei entstehenden individuellen Präferenzordnungen zu einer gemeinsamen Ordnung zusammengefasst werden können, wird in einem eigenständigen Kapitel beantwortet.[14]
- **Merkmal c)** (Anzahl der Dimensionen) bringt zum Ausdruck, dass die vier grundständigen Präferenzdimensionen selten isoliert auftreten, sondern oftmals „Grundbausteine" von Präferenzsystemen bzw. von **multidimensionalen Präferenzen** sind. Folgende Beispiele können für multidimensionale Präferenzen angegeben werden:
  - Höhen- und Risikopräferenz: Bei Entscheidungen unter Risiko stellt die Risikonutzenfunktion eine Kombination aus Höhen- und Risikopräferenz dar.[15] Die Höhenpräferenz kann nicht isoliert von der Risikopräferenz betrachtet werden.
  - Zeit- und Unsicherheitspräferenzen:[16] Je größer der betrachtete zukünftige Zeitraum, desto größer werden auch die Unsicherheiten sein. Zusätzlich ist fragwürdig, ob bei sehr langen Zeiträumen prinzipiell die Zeitpräferenz ausschließlich unter Sicherheit betrachtet werden kann.
  - Ein weiteres Beispiel sind die Präferenzen von Unternehmenseigentümern, welche sowohl über finanzielle als auch über nicht-finanzielle Präferenzen verfügen.[17] Die finanziellen Präferenzen der Eigentümer bestehen aus der Höhen- und der Zeitpräferenz, da sie festlegen müssen, in welcher Form und zu welchem Zeitpunkt sie die Erträge aus

[13] Vgl. Abschn. 1.5 auf S. 98 und Abschn. 1.9.3 auf S. 230.

[14] Vgl. Kapitel 3 auf S. 387.

[15] Vgl. Bitz (1981: 176–179); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 97–100); Obermaier/Saliger (2020: 86).

[16] Vgl. Abschn. 1.9.3 auf S. 230.

[17] Vgl. Moxter (1964: 9–10).

dem Unternehmenseigentum verwenden möchten.[18] Grundsätzlich bestehen für Unternehmenseigentümer zwei konkurrierende Zielsetzungen:[19]

- **Vermögensmaximierung:** Maximierung des Vermögens bei gegebenem Einkommen (Entnahmen) und gegebener zeitlicher Struktur. Dies wird auch als Thesaurierungspräferenz bezeichnet.
- **Entnahmemaximierung:** Maximierung der jährlichen Entnahmen bzw. des jährlichen Einkommens bei gegebenem Endwert und gegebener zeitlicher Struktur der Entnahmen. Das kann als Ausschüttungspräferenz bezeichnet werden.

Prinzipiell betrachtet der Unternehmer sein Unternehmen als Mittel zum Zweck der Einkommenserzielung. Er muss eine Vorstellung darüber haben, wie er dieses Einkommen (für seinen Konsum) nutzen möchte, zu welchen Zeitpunkten und in welcher Höhe er das Einkommen verwenden möchte. Dies wird mit der Präferenz für Thesaurierung oder für Ausschüttungen bestimmt.[20]

Da die Zahlungsströme aus unterschiedlichen Investitionsobjekten entstammen und über unterschiedliche Zeiträume erwirtschaftet werden, ist neben diesen Präferenzen oftmals auch die Unsicherheitspräferenz damit verknüpft.[21]

Darüber hinaus verfolgen Unternehmenseigentümer i. d. R. nicht nur finanzielle Ziele und besitzen deshalb Vorstellungen über Höhe und Zeitpunkt der Ertragsverwendung, sondern sie besitzen auch Vorlieben für oder Aversionen gegen nicht-finanzielle Aspekte der Leistungserstellung in ihrem Unternehmen. Dies betrifft z. B. die Art der Leistungserstellung, wenn der Eigentümer entscheiden muss ob bzw. in welchem Maße traditionell produziert wird und ob moderne Produktionsmethoden und -materialien eingesetzt werden. Auch kann er darüber entscheiden ob seine Zulieferungen bestimmten Standards (fair trade) entsprechen oder nicht. Deshalb ist die Artenpräferenz ebenfalls oftmals Bestandteil multidimensionaler Präferenzsysteme. Da die Präferenzen der Eigentümer eine besondere Rolle spielen, werden sie als **Eigentümerpräferenzen** bezeichnet.

Eine gesonderte Erläuterung ist für die **Konsumpräferenz** angebracht. Diese wurde ursprünglich als eine – die Zeitpräferenz umfassende – Präferenzart konzipiert. Diesem Konzept liegt die Idee zugrunde, dass unabhängig vom zeitlichen Aspekt bestimmte Vorlieben für güterwirtschaftliche

[18] Vgl. Matschke (1993: 81); Schäfer (2005: 93); Hering (2017: 23).
[19] Vgl. 1. Band, Abschn. 3.3.6 auf S. 224.
[20] Vgl. Moxter (1964: 11); Drukarczyk (1970: 17–21).
[21] Vgl. Schäfer (2005: 93).

Komponenten existieren und deshalb getrennt erfasst werden müssen.[22] Diese Idee konnte sich jedoch nicht durchsetzen.[23]

In anderen Quellen wird der Begriff der Konsumpräferenz – manchmal im Zusammenhang mit dem Separationstheorem von Fisher – verwendet, um die kombinierte Höhen- und Zeitpräferenz der Kapitalgeber (also die Entscheidung zwischen Thesaurierungs- und Ausschüttungspräferenz) zu beschreiben.[24] Jedoch handelt es sich – bei genauerer Betrachtung – in sämtlichen Darstellungen von Präferenzen um die Analyse der Vorlieben von Akteuren bezüglich unterschiedlicher Konsumalternativen. Beispielsweise beschreibt die Zeitpräferenz den Nutzen aus dem zeitlichen Anfall von Konsumaktivitäten und die Artenpräferenz beschreibt, welcher Teilaspekt der Alternativen welchen Teilnutzen stiftet. Deshalb ist der Begriff der Konsumpräferenz für die angeführten Präferenzen der Unternehmenseigentümer nicht sonderlich geeignet. Stattdessen wird der bereits eingeführte Begriff der **Eigentümerpräferenz** verwendet. Diese umfasst – wie oben beschrieben – finanzielle (Zeit- und Höhenpräferenzen) und auch nicht-finanzielle (Sicherheits- und Artenpräferenzen) Vorlieben.

- **Merkmal d)** (Objekt) berücksichtigt, dass Präferenzen auf Sachinhalte oder auf andere Präferenzen gerichtet sein können. Präferenzen, die sich auf Elemente des Zielsystems selbst beziehen, sind **Präferenzen erster Ordnung**. Wenn sich Präferenzen jedoch auf andere Präferenzen beziehen, handelt es sich um **Präferenzen höherer Ordnung**. Mit dieser Zuordnung werden bestehende Begriffsbildungen nicht aufgegriffen, da diese nicht sonderlich trennscharf sind.[25] Die kollektive Präferenz ist ein ideales Beispiel für Präferenzen höherer Ordnung, da es sich um eine Präferenz über individuelle Präferenzen handelt. Streng genommen ist das Problem der Bildung einer kollektiven Präferenzordnung ähnlich der multikriteriellen oder intertemporalen Problematik.[26] Da jedoch Präferenzordnungen von selbstbestimmten Individuen zusammengefasst werden, müssen andere Anforderungen und Regeln gelten. Deshalb wird die kollektive Präferenz auch als Präferenz höherer Ordnung bezeichnet. Ein anderes Beispiel sind ethische Präferenzen, die darüber bestimmen, ob ein verfolgtes Ziel (z. B. Gewinnmaximierung) überhaupt erstrebenswert ist.
- **Merkmal e)** (Separierbarkeit) ist von grundlegender Bedeutung für sämtliche Entscheidungssituationen (außer dem Fall der einperiodigen Entscheidung bei einfacher Zielsetzung und Sicherheit). Der Akteur sieht sich i. d. R. mehreren Attributen einer Dimension des Entscheidungspro-

[22] Vgl. Lehmann (1973: 81).

[23] Vgl. die umfangreichen Darstellungen zur Zeitpräferenz im Abschn. 1.7 auf S. 181 ff.

[24] Vgl. Drukarczyk (1970: 18); Matschke (1993: 81); Schäfer (2005: 83–84); Trautmann (2007: 25–31); Hering (2017: 23). Das Separationstheorem wird im 1. Band, Abschn. 3.3.6 auf S. 224 ff. detailliert dargestellt.

[25] Vgl. Sieben (1976: 203); Matschke (1993: 81); Sieben/Schildbach (1994: 27–29).

[26] Vgl. Tab. 3.2 auf S. 392.

blems – Zeitpunkte, Zielarten, Zuständen – gegenüber, weshalb er seine Präferenzen für jedes dieser Attribute festlegen muss. Damit ist die Kardinalfrage verbunden, ob die Präferenzen für jedes Attribut unabhängig, also separierbar, von den Präferenzen anderer Attribute sind.[27] Für die überwiegende Mehrzahl der Modelle wird von separierbaren Präferenzen ausgegangen.[28] Diese ziemlich simpel und einleuchtend erscheinende Annahme wurde frühzeitig formuliert und präzisiert.[29] Separierbarkeit bedeutet z. B. bei Entscheidungen mit mehreren Zielen, dass die Präferenzen bezüglich eines Teilzieles unabhängig von den Präferenzen bezüglich anderer Teilziele sind.[30] Ähnlich ist die Konstellation bei intertemporalen Entscheidungen, bei denen angenommen wird, dass die Präferenzen des Akteurs zu einem Zeitpunkt unabhängig von den Präferenzen zu anderen Zeitpunkten sind.[31] Bei Entscheidungen unter Risiko wird – im Rahmen des Bernoulli-Prinzips bzw. der Erwartungsnutzentheorie – ebenfalls von separierbaren Präferenzen ausgegangen.[32] Einige bekannte Abweichungen von diesen Rationalitätspostulaten, wie z. B. das Allais-Paradox, beruhen auf der Verletzung dieser Annahme.[33]

Wenn die Unabhängigkeit bzw. Separierbarkeit gegeben ist, muss festgelegt werden, wie die Zusammenfassung der getrennt geäußerten Präferenzen erfolgt. Die heutige Standardform ist die additive Zusammenfassung, wenngleich diese nicht unumstritten war bzw. ist.[34] Für die additive Zusammenfassung entstand schon frühzeitig eine Vielzahl von Axiomensystemen.[35] Andere Formen, wie z. B. die multiplikative Zusammenfassung, sind möglich, jedoch schwerer zu begründen und zu handhaben.

Obwohl die Separierbarkeit als Eigenschaft sehr einleuchtend ist, stellt sie eine ziemlich restriktive Annahme dar. Diese dürfte nur dann realitätsnah sein, wenn die Attribute keine Bezüge zueinander aufweisen.[36] Für Mehrfachzielsetzungen impliziert dies beispielsweise möglichst "weit voneinander entfernte" Bedürfnisse und bei intertemporalen Entscheidungen möglichst weit auseinander liegende Zeitpunkte.[37]Trotz der restriktiven Implikationen wird die Unabhängigkeit und die Additivität der Präferenzen in vielen Standardmodellen verwendet.

[27] Vgl. Krelle (1968: 72–75).
[28] Vgl. Debreu (1960); Fishburn (1965); Gottinger (1969); Barro/King (1984).
[29] Vgl. Strotz (1957); Gorman (1959); Strotz (1959).
[30] Vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61.
[31] Vgl. Anf. 1.7.5 auf S. 195.
[32] Vgl. Anf. 1.5.5 auf S. 116.
[33] Vgl. Abschn. 2.3.2.2 auf S. 315.
[34] Vgl. Samuelson (1948: 174–183); Strotz (1957: 269).
[35] Vgl. Fishburn (1966); Gorman (1968).
[36] Vgl. Honohan/Neary (2003: 199–204); Honohan/Neary (2021: 508–512).
[37] Vgl. Bspl. 1.19 auf S. 195 für die damit verbundenen Schwierigkeiten.

- **Merkmal f)** (Anzahl der Entscheidungsstufen) gibt an, ob der Akteur ein einziges Mal oder mehrmals hintereinander seine Präferenzen bilden muss. Im Fall einer einstufigen Entscheidung muss der Akteur lediglich einmal seine Präferenzen festlegen. Diese Konstellation ist einfach und deshalb unproblematisch. Sind jedoch mehrere Entscheidungsstufen möglich, muss der Akteur seine Präferenzen wiederholt zu mehreren Zeitpunkten festlegen.[38] Daraus entsteht das Problem, dass sich die Präferenzen im Zeitablauf verändern können. Dies erschwert eine konsistente Problemlösung, weshalb in den Standardmodellen zu mehrstufigen Entscheidungen von stabilen – d. h. nicht veränderbaren – Präferenzen ausgegangen wird.[39]

Die Präferenzen sind von entscheidender Bedeutung zur optimalen Lösung des Problems im Sinne des Entscheidungsträgers, da sie die Grundlage für seine individuelle Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionale bilden.[40] In der Entscheidungs-, der Spiel- und der Investitionstheorie sind zur Problemlösung viele mathematische Methoden entwickelt worden. Deren Verwendung stellt jedoch bestimmte Anforderungen an die Präferenzen. Diese Anforderungen stellen die axiomatische Basis der mathematischen Verfahren dar, weshalb sie auch als Axiome bezeichnet werden. Die ersten Ansätze zur Axiomatisierung des rationalen Entscheidungsverhaltens stammen von Frisch.[41] Im weiteren Verlauf werden die Begriffe "Axiom" und "Anforderung" synonym verwendet. Damit soll deutlich gemacht werden, dass es sich um Anforderungen an das Entscheidungsverhalten handelt. Diese Anforderungen stehen im Mittelpunkt und bilden den "roten Faden" der folgenden Analysen.

1.2.2 Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionale

Für die weiteren Erläuterungen wird folgende Notation festgelegt:

- Ein Akteur sieht sich einer endlichen Aktionenmenge $A = \{a_1, ..., a_m\}$ gegenüber.
- Jede Alternative a_i führt zu einem bekannten Zeitpunkt mit Sicherheit zu einem bekannten Ergebnis e_i.
- Diese Ergebnisse bilden die nichtleere, endliche Ergebnismenge E.

Der Akteur muss für jedes Ergebnis festlegen, wie er dieses im Vergleich zu sich selbst und zu anderen Ergebnissen einschätzt. Dazu stellt er diese Kombinationen einander gegenüber und legt die Präferenzrelation R fest (vgl.

[38] Das Begriffspaar *"statische vs. dynamische Präferenz"* wird hier nicht verwendet, da es eine Entwicklung der Präferenzen impliziert.

[39] Vgl. Abschn. 1.9.3 auf S. 230.

[40] Vgl. Abb. 1.1 auf S. 4.

[41] Vgl. Frisch (1926); Frisch (1957: 80–84); Johansen (1969: 304).

Tabelle 1.3). Aus Tabelle 1.3 wird deutlich, dass R eine Teilmenge des kartesischen Produktes der Ergebnismenge E mit sich selbst $E \times E$ ist.

Tab. 1.3: Relation auf E als Teilmenge von $E \times E$. Quelle: Eigene Darstellung.

R	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$	$\mathbf{e_4}$
$\mathbf{e_1}$				
$\mathbf{e_2}$				
$\mathbf{e_3}$				
$\mathbf{e_4}$				

Der Akteur muss Tabelle 1.3 zeilenweise von links nach rechts lesen und die Vorziehenswürdigkeit der Ergebniskombinationen eintragen. Die Präferenzrelation R ist deshalb eine binäre Relation, wobei es üblich ist, anstelle von $(e_1,e_2) \in R$ zu formulieren $e_1 R e_2$.

Definition 1.1: *Die Präferenzrelation R eines Akteurs auf einer Ergebnismenge E ist eine binäre Relation und stellt eine Teilmenge von $E \times E$ dar.*

Im Folgenden werden folgende Notationen für R verwendet:[42]

- Strenge Präferenz: $e_1 \succ e_2$, d. h. e_1 wird gegenüber e_2 strikt vorgezogen.
- Indifferenz: $e_1 \sim e_2$ bedeutet, der Akteur ist zwischen beiden Ergebnissen indifferent.
- Schwache Präferenz: $e_1 \succsim e_2$, d. h. für den Akteur ist e_1 sowohl besser, als auch genauso gut wie e_2.

Damit die strenge Präferenz und die Indifferenz korrekt zur schwachen Präferenz $\succsim$ kombiniert werden, müssen folgende Relationen für jedes Paar $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$ gelten:[43]

- entweder $e_1 \succsim e_2$ oder $e_2 \succsim e_1$ oder beides,
- $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow (e_1 \succsim e_2 \wedge e_2 \succsim e_1)$,
- $e_1 \succ e_2 \Leftrightarrow e_2 \neg \succsim e_1$.

Ist ein Akteur indifferent zwischen zwei Ergebnissen, so wird jedes dieser Ergebnisse dem anderen schwach gegenüber bevorzugt. Präferiert der Akteur hingegen das Ergebnis e_1 strikt gegenüber dem Ergebnis e_2, so kann das Ergebnis e_2 nicht gegenüber Ergebnis e_1 schwach vorgezogen werden.

Zur Entscheidungsfindung müssen die Präferenzen des Akteurs ordnungstreu bzw. ordnungserhaltend erfasst und abgebildet werden. Das heißt, eine empirische Struktur soll durch Zahlen so abgebildet werden, dass diese Struktur

[42] Zur folgenden Darstellung vgl. French (1988: 62–73); Ossadnik (1998: 17–19); Maschler/Solan/Zamir (2020: 9–13).

[43] Vgl. French (1988: 70).

erhalten bleibt. Deshalb besteht das Ziel in einer strukturerhaltenden Abbildung (Homomorphismus) der empirischen Struktur.[44]

Eine Möglichkeit dazu besteht in der Verwendung einer **Nutzenfunktion**. Diese wird als Bewertungsfunktion auf die Ergebnisse gelegt und bildet diese jeweils auf die reellen Zahlen ab (vgl. Def. 1.2). Der Akteur weist jedem Ergebnis der Alternative i einen Nutzen wie folgt zu: $u_i = f(e_i)$. Es ist üblich, die Nutzenwerte auf das Intervall [0, 1] zu normieren.[45]

Definition 1.2: *Eine ordnungstreue Nutzenfunktion $u : E \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, die jedem Ergebnis $e \in E$ eine reelle Zahl $u(e) \in \mathbb{R}$ so zuordnet, dass:*

$$e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2),$$
$$e_1 \succ e_2 \Leftrightarrow u(e_1) > u(e_2),$$
$$e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) = u(e_2).$$

Im nächsten Schritt werden diese Nutzenwerte zusammengefasst. Dies erfolgt durch ein **Präferenzfunktional Φ**. Das Konzept des Präferenzfunktionals wurde von Tintner zur Entscheidungsfindung bei Risiko (*risk preference functional*) eingeführt, um Präferenzen gegenüber Wahrscheinlichkeitsverteilungen, also Funktionen, zu erfassen.[46] Das Präferenzfunktional ordnet einer Handlungsalternative $a \in A$ eine reelle Zahl so zu, dass über die Rangfolge dieser Zahlen die subjektive Wertvorstellung des Akteurs ausgedrückt wird (vgl. Definition 1.3).[47]

Definition 1.3: *Ein ordnungstreues Präferenzfunktional $\Phi : A \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Alternative $a \in A$ eine reelle Zahl $\Phi(a) \in \mathbb{R}$ so zu, dass:*

$$a_1 \succsim a_2 \Leftrightarrow \Phi(a_1) \geq \Phi(a_2),$$
$$a_1 \succ a_2 \Leftrightarrow \Phi(a_1) > \Phi(a_2),$$
$$a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \Phi(a_1) = \Phi(a_2).$$

Wenn eine Abbildung der Präferenzen nach Def. 1.3 erfolgt, wird diese Abbildung als **ordnungstreue Abbildung** bezeichnet. Ein Funktional ist eine Zuordnungsvorschrift, die einer Funktion eine Zahl zuordnet. Eine Funktion hingegen ist eine Vorschrift, die einer Zahl wiederum eine Zahl zuordnet.[48] Synonym werden auch die Begriffe „Präferenzfunktion“ und „Bewertungsfunktion“ für das Präferenzfunktional verwendet.[49] Ein sehr bekanntes Präferenzfunktional ist der **Kapitalwert**.[50]

---

[44] Vgl. Wilhelm (1986: 469–475).

[45] Vgl. Merksatz 1.3 auf S. 35.

[46] Vgl. Tintner (1941: 301); Tintner (1942: 100); Arrow (1951: 422).

[47] Vgl. Bitz (1981: 31); Trautmann (2007: 235–236); Werners (2013: 25–26); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 32).

[48] Vgl. Schneeweiß (1966: 36); Menges (1974: 271).

[49] Vgl. Bitz (1981: 31); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 36–37).

[50] Vgl. Abschn. 1.7.2.4 auf S. 208.

Eine Nutzenfunktion $u : E \to \mathbb{R}$ überführt zunächst die Ergebnisgrößen der Alternativen in die reellen Zahlen. Anschließend wird durch Ausführen weiterer Operationen auf den sich ergebenden Nutzenwerten ein Präferenzfunktional formuliert. Das Präferenzfunktional $\Phi : A \to \mathbb{R}$ bildet die Alternativen schließlich direkt auf die reellen Zahlen ab. [51]

Im einfachsten Fall hingegen ist mit jeder Alternative genau ein sicheres, bekanntes Ergebnis verbunden. In diesem Fall kann direkt die Nutzenfunktion zur Entscheidungsfindung herangezogen werden.

Das Funktional muss so beschaffen sein, dass es die Präferenzen des Akteurs möglichst gut abbildet. Es soll die Reihenfolge der Alternativen, die aus den Präferenzen folgt, realitätsgetreu, d. h. ordnungstreu wiedergeben. Die Kunst des Problemlösens besteht darin, für die jeweilige Entscheidungssituation ein passendes – weil **ordnungstreues** – Präferenzfunktional zu finden. Die prinzipiell bestehenden Möglichkeiten zur Bestimmung eines Präferenzfunktionals sind in Tabelle 1.4 dargestellt.

Zur Entscheidungsfindung muss die beste Alternative ausgewählt werden, es ist diejenige Alternative zu wählen, welche den Wert des Präferenzfunktionals maximiert oder - in einigen wenigen Fällen - minimiert (vgl. Def. 1.4).[52]

Definition 1.4: *Sei $\Phi : A \to \mathbb{R}$ das Präferenzfunktional. Die optimale Alternative a_{opt} ist bestimmt durch: $\Phi(a_{opt}) = \max\limits_{a \in A} \Phi(a)$ oder $\Phi(a_{opt}) = \min\limits_{a \in A} \Phi(a)$.*

Diese Kombination von Präferenzfunktional und Optimierungskriterium wird als **Entscheidungsregel** bezeichnet. Zur Orientierung wird folgende Zuordnung vorgenommen:

- Eine **Nutzenfunktion** ist die Abbildung der Ergebnisse im Fall von Entscheidungen bei **einem Ziel und Sicherheit**.[53]
- Ein **Präferenzfunktional** ist die Abbildung von Alternativen im Fall von Entscheidungen **mit mehreren Zielen und Sicherheit**,[54] Entscheidungen **unter Unsicherheit**[55] sowie **intertemporalen** Entscheidungen.[56]

[51] Vgl. Fischer (2003: 164).
[52] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 32).
[53] Vgl. Abschn. 1.3 auf S. 25.
[54] Vgl. Abschn. 1.4 auf S. 45.
[55] Vgl. Abschn. 1.5 auf S. 98. und Abschn. 1.6 auf S. 160
[56] Vgl. Abschn. 1.7 auf S. 181.

Tab. 1.4: Möglichkeiten der Generierung von Präferenzfunktionalen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Brandtner (2012: 17–20).

Art der Bestimmung des Präferenz-funktionals	**Beschreibung**

Ad-hoc-Vorgabe	- Es werden nur einzelne Aspekte möglicher Präferenzen bzw. einseitig orientierte Präferenzen (z. B. bestes oder schlechtestes Ergebnis) betrachtet.
	- Das Funktional wird so vorgegeben, dass es exakt auf diese spezifische Situation passt.
	- Es wird postuliert, dieses Funktional würde eine ordnungstreue Abbildung der ausgewählten Präferenzen garantieren.
	- Beispiele:
	  - Entscheidungskriterien bei Risiko (Abschn. 1.5.3 auf S. 104),
	  - Entscheidungsregeln bei Ungewissheit (Abschn. 1.6.3 auf S. 169).

Axiomatische Begründung der Eigenschaften der Akteurspräferen-zen	- Zunächst werden die Eigenschaften der zu messenden empirischen Struktur festgelegt, welche anschließend ordnungstreu gemessen werden kann.
	- Deshalb werden im ersten Schritt Anforderungen an die Präferenzen des Akteurs aufgestellt. Diese sollen eine rationale Vorgehensweise beschreiben.
	- Im nächsten Schritt kann auf dieser Basis das Präferenzfunktional logisch abgeleitet werden.
	- Die Ordnungstreue des Funktionals ist also eine logische Folge der vorgegebenen Eigenschaften der Präferenzen.
	- Damit werden Aussagen über die Rationalität von Entscheidungen (bzw. Abweichungen davon) möglich.
	- Beispiele:
	  - Axiome rationaler Höhenpräferenzen (Abschn. 1.3 auf S. 25),
	  - Axiome rationaler Artenpräferenzen (Abschn. 1.4.3.2 auf S. 55),
	  - Axiome rationaler Risikopräferenzen (Abschn. 1.5.4.1 auf S. 109),
	  - Axiome rationaler Zeitpräferenzen (Abschn. 1.7 auf S. 181).

Axiomatische Begründung der Eigenschaften des Funktionals selbst	- Es werden Eigenschaften des Funktionals definiert, die eine ordnungstreue Abbildung der Präferenzen ermöglichen sollen.
	- Die Ordnungstreue des Funktionals wird durch die Vorgabe bestimmter Eigenschaften postuliert.
	- Beispiele:
	  - Axiome von Milnor für ein rationales Entscheidungsverfahren unter Ungewissheit (Abschn. 1.6.2 auf S. 164),
	  - Axiome eines rationalen Aggregationsmechanismus für individuelle Präferenzen (Abschn. 3.2 auf S. 393).

Zur Gewinnung von Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionalen sind folgende Fragen zu beantworten:

- Wie schätzt der Akteur die Relation der Ergebnisse ein?
- Auf welcher Skala werden Ergebnisse und Nutzen gemessen?

Um diese Fragen beantworten zu können, werden im folgenden Abschnitt die verschiedenen Skalentypen und darauf basierende Nutzenfunktionen vorgestellt.

1.2.3 Arten von Skalen und Nutzenfunktionen

Um die Eigenschaft der verwendeten Skala beurteilen zu können, ist die Kenntnis der axiomatischen – also zugewiesenen – Eigenschaften der in der Skala verwendeten Zahlen erforderlich (vgl. Abbildung 1.4).

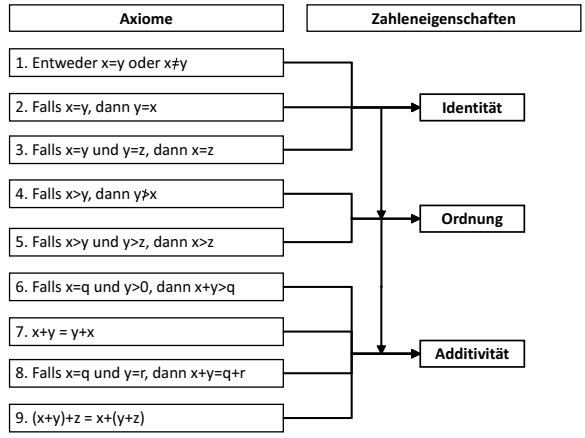


Abb. 1.4: Axiomatische Zuweisung von Zahleneigenschaften. Quelle: Zangemeister (1976: 150).

In Abhängigkeit von der axiomatischen Zuweisung können folgende Skalenniveaus unterschieden werden:[57]

- Nominalskala,
- Ordinalskala,
- Intervallskala,
- Verhältnisskala,
- Differenzskala sowie
- absolute Skala.

Diese Skalenarten werden nun erläutert.

1. Nominalskala:

Die **Nominalskala** als einfachste Skala beruht auf der Verwendung einer Zahl, um die Zugehörigkeit zu einer Klasse auszudrücken und diese Klasse zu benennen. Die zugewiesenen Zahlen können nicht für sinnvolle Rechenoperationen verwendet werden. Es werden lediglich Aussagen über den Unterschied oder die Gleichheit der Eigenschaften, z. B. des Nutzens gemacht. Anstelle der Zahl als Bezeichnungsmerkmal kann jedoch auch eine verbale Kennzeichnung dienen. Für Planungs- und Entscheidungszwecke ist diese Skala im Allgemeinen kaum geeignet. Streng genommen ist der Begriff der

[57] Vgl. Schneeweiß (1963: 184–185); Zangemeister (1976: 149).

Skala in diesem Zusammenhang irreführend, da keine Ordnung oder Relation hergestellt werden kann, welche über die Zugehörigkeits- bzw. Bezeichnungsaussage hinausgeht.[58] Die verwendeten Zahlen basieren lediglich auf den Axiomen 1, 2 und 3 der Abbildung 1.4.

2. Ordinalskala:

Bessere Verwendungsmöglichkeiten weist die **Ordinalskala** auf. Diese Skala drückt die Richtung von Bewertungsunterschieden aus und kann deshalb zur Erstellung einer Rangordnung verwendet werden. Dies ist möglich, da den Zahlen auch die Merkmale 4 und 5 der Abbildung 1.4 zugewiesen werden.

Die Ordinalskala eignet sich jedoch lediglich für das Aufstellen einer Reihenfolge. Darüber hinausgehende Operationen sind nicht möglich.[59] Klassische Situationen mit ordinalen Präferenzordnungen sind **Abstimmungen** in unternehmerischen Gremien.

Auf einer Ordinalskala können keine Ausprägungsdifferenzen festgestellt werden, sondern lediglich qualitative Differenzen. Eine Ordinalskala ist **invariant** gegen **streng monoton steigende** Transformationen. Das bedeutet, dass die Rangordnung von Ergebnissen identisch bleibt, auch wenn zu den Ergebniswerten z. B. eine beliebige Zahl hinzuaddiert wird oder der Ergebniswert mit einer beliebigen positiven Zahl multipliziert wird.

Wird der Nutzen auf einer ordinalen Skala gemessen, resultiert eine **ordinale Nutzenfunktion**, die nach Definition 1.5 beschrieben wird.[60]

Definition 1.5: *Eine Funktion $u : E \to \mathbb{R}$ ist eine ordinale Nutzenfunktion, wenn für alle $e_1, e_2 \in E$ gilt: $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2)$. Dann ist für jede Funktion h mit $h' > 0$ die Verkettung $h \circ u$ definiert durch $(h \circ u)(e) = h(u(e))$ und führt zu $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow h(u(e_1)) \geq h(u(e_2))$.*

Ordinale Nutzenfunktionen sind vielfach anzutreffen und vielseitig einsetzbar.

3. Intervallskala:

Die **Intervallskala** unterstellt, dass neben den verwendeten Größen auch die verwendeten Intervalle ordnungsfähig sind. Deshalb ist es möglich, den Abstand zwischen den Intervallen zu messen. Auf diese Weise können die Ausprägungswerte derart verglichen werden, dass Aussagen möglich sind, um wie viele Einheiten der Skala sich die Werte unterscheiden.

Die Ordnung auf Intervallskalen ist **invariant** gegenüber **positiv-affinen** Transformationen.[61] Eine affine Transformation setzt sich zusammen aus ei-

[58] Vgl. Gäfgen (1974: 144–150).

[59] Vgl. Gäfgen (1974: 150–155); Zangemeister (1976: 153–154).

[60] Vgl. Chankong/Haimes (1983: 69); Fishburn (1989a: 129); Maschler/Zolan/Samir (2020: 11).

[61] Vgl. Bitz (1981: 84–85).

ner **linearen Abbildung** zuzüglich eines **Verschiebungsvektors**.[62] Für die Beschreibung von Präferenzen und Nutzenfunktionen sind **affine Transformationen** wichtig, weshalb sie in Definition 1.6 beschrieben werden.[63]

Definition 1.6: *Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ ist eine positiv-affine Transformation von e, wenn es eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$ und eine reelle Zahl β gibt, so dass gilt: $f(e) = \alpha \cdot e + \beta \ \forall \ e \in E$.*

In der Definition 1.6 wird deutlich, dass es sich um eine positiv-affine Transformation handelt, da $\alpha > 0$. Der Term β ist demzufolge der Verschiebungsvektor. Mittels einer positiv-affinen Transformation werden nur der Nullpunkt und die Maßeinheit verändert. Deshalb bleibt die Präferenzrelation erhalten, auch wenn sich die verwendeten Maßeinheiten ändern.

Im weiteren Verlauf wird für Funktionen nach Definition 1.6 der Begriff der **positiv affinen Transformation** und synonym der Begriff **„positiv lineare Transformation“** verwendet, da dieser in der - besonders englischen - Literatur sehr häufig zu finden ist.

Das bekannteste Beispiel für intervallskalierte Größen sind die verschiedenen Skalen der Temperaturmessung.[64] Der untere Fixpunkt der Celsius-Skala liegt bei $P_u = 0°\text{C}$ und wird auf den Gefrierpunkt von Wasser bei Normaldruck festgelegt. Der obere Fixpunkt liegt bei $P_o = 100°\text{C}$ und wird auf den Siedepunkt von Wasser bei Normaldruck definiert. Das Skalenintervall ergibt sich aus: $\frac{P_o - P_u}{100}$. Im Fall der Fahrenheit-Skala wurde ein unterer Fixpunkt (Gefrierpunkt von Wasser) mit $P_u = 32°\text{F}$ und der obere Fixpunkt (Siedepunkt von Wasser) mit $P_o = 212°\text{F}$ definiert. Als Nullpunkt $P_0 = 0°\text{F}$ wurde eine künstlich erzeugte Temperatur definiert, die bei ca. $-18°\text{C}$ liegt. Das Skalenintervall ergibt sich aus: $\frac{P_o - P_u}{180}$. Die Umrechnung einer Temperatur von $f°\text{F}$ in $c\ °\text{C}$ erfolgt durch:

$$\begin{aligned} c &= (f - 32) \cdot \frac{100}{180} \\ &= -\frac{32 \cdot 100}{180} + \frac{100}{180} \cdot f \\ &= -17\frac{7}{9} + \frac{5}{9} \cdot f. \end{aligned}$$

Dies ist eine einfache positiv affine Transformation. Auf welcher Skala die Temperaturen gemessen werden ist demzufolge unerheblich, da die Relationen zwischen den Ergebnissen erhalten bleiben. Nachteilig an dieser Skalenform ist der Umstand, dass der Fix- bzw. Nullpunkt der Skala subjektiv gewählt wird. Es sind lediglich die Verhältnisse der Wertdifferenzen vergleich-

[62] Vgl. Bär (2018: 239–240).
[63] Vgl. Schneeweiß (1963: 185); Maschler/Solan/Zamir (2020: 22).
[64] Vgl. Bitz (1981: 156–157).

bar, nicht jedoch die Verhältnisse der Werte selbst. Für das Beispiel der oben angeführten Temperaturskalen ist es deshalb nicht möglich, eine Aussage zu treffen, dass 10 °C doppelt so warm sind wie 5 °C.

Wird der Nutzen auf einer Intervallskala gemessen, so wird die Funktion als kardinale Nutzenfunktion bezeichnet (vgl. Def. 1.7).

Definition 1.7: *Eine kardinale Nutzenfunktion ist eine Funktion* $u : E \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften, dass für irgend zwei* e_1, e_2 *aus* E *gilt:* $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2)$*. Jede andere Funktion* v *mit:* $v(e) = \alpha \cdot u(e) + \beta$*, wobei* $\alpha > 0$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.*

Im weiteren Verlauf wird eine Nutzenfunktion entsprechend Definition 1.7 als intervallskalierte Funktion bzw. kardinale Nutzenfunktion bezeichnet.

Eine Nutzenfunktion nach Def. 1.7 berücksichtigt jedoch keine Nutzendifferenzen zwischen Wertepaaren. Um dies zu erreichen, wird der Übergang der Präferenz vom Ergebnis 2 zum Ergebnis 1 betrachtet. Das Paar $(e_1 \leftarrow e_2)$ beschreibt den Übergang vom Ergebnis 2 zum Ergebnis 1. Im Fall der Relation $e_1 \succ e_2$ ist die Differenz der zugehörige Nutzenzuwachs. Der Übergang von e_2 zu e_1 wird bezeichnet mit $e_2 \to e_1$ bzw. $e_1 \leftarrow e_2$.

Im Folgenden werden Präferenzen in Bezug auf die Differenzen zwischen zwei Ergebnissen formuliert und es wird dafür ein spezifiziertes Relationssymbol $\succsim_D$ eingeführt. Wie bereits erwähnt, wird mit $(e_1 \leftarrow e_2)$ der Übergang vom Ergebnis 2 zum Ergebnis 1 beschrieben. Im weiteren Verlauf wird von ausschließlich positiven Differenzstrukturen ausgegangen, so dass beim Übergang $e_1 \leftarrow e_2$ ein Nutzenzuwachs entsteht. Dies führt zu einer Nutzenfunktion, die kardinal messend ist (vgl. Def. 1.8).[65]

Definition 1.8: *Eine Nutzenfunktion* $u : E \to \mathbb{R}$ *ist kardinal messend, wenn für irgend zwei* e_1, e_2 *aus* E *gilt:* $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2)$ *sowie für irgend zwei Paare* (e_1, e_2) *und* (e_3, e_4) *mit* $(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_4)$ *gilt:* $u(e_1) - u(e_2) \geq u(e_3) - u(e_4)$*. Jede andere Funktion* v *mit:* $v(e) = \alpha \cdot u(e) + \beta$*, wobei* $\alpha > 0$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.*

Eine Funktion, die dieser Definition entspricht, wird als *„kardinal messende Funktion“* bezeichnet.[66] Die Messung erfolgt auf einer Intervallskala und ist invariant gegenüber linear-affinen Transformationen (vgl. Def. 1.6). Das bedeutet jedoch im Umkehrschluss nicht, dass jede Funktion, die invariant gegenüber linear-affinen Transformationen ist, auch kardinal messend nach Def. 1.8 ist. Ein Beispiel dafür ist eine Nutzenfunktion nach Def. 1.7. (vgl. Merksatz 1.1).

[65] Vgl. Alt (1936: 164–165); Schneeweiß (1963: 196); Fishburn (1979: 84–85); Dyer/Sarin (1979: 811); Dyckhoff (1993: 140).

[66] Vgl. Dyckhoff (1993: 140); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 114); Klein/Scholl (2011: 100); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 35).

Merksatz 1.1: *Jede kardinal messende Funktion nach Def. 1.8 ist eine kardinale Funktion nach Def. 1.7. Die Umkehrung der Aussage gilt nicht, woraus folgt: kardinal messende Nutzenfunktion ⇒ kardinale Nutzenfunktion.*

Jedoch werden in vielen Quellen Nutzenfunktionen nach Def. 1.7 als kardinale Nutzenfunktionen bezeichnet,[67] obwohl sie streng genommen lediglich ordinal messend sind.[68] Zusammenfassend ergeben sich zwei unterschiedliche Verständnisse von Kardinalität:

- Kardinalität im Sinn der Abbildung von **Präferenzordnungen** (vgl. Def. 1.7) und Invarianz gegen positiv-affine Transformationen entsprechend Def. 1.6 oder
- Kardinalität im Sinn der Abbildung von **Präferenzdifferenzen** (vgl. Def. 1.8) und Invarianz gegen positiv-affine Transformationen entsprechend Def. 1.6.

Das erste Verständnis ist allgemeiner – aber auch weniger aussagekräftig – im Vergleich zur zweiten Definition. Aufbauend auf der Arbeit von Alt ist das zweite Verständnis das ältere, wurde jedoch durch die erste Interpretation abgelöst. Dies liegt im Wesentlichen an dem Beitrag von Samuelson.[69] Er stellte - ob in Kenntnis oder Unkenntnis des Beitrags von Alt, ist umstritten[70] - den Zusammenhang bzw. die Bedeutungsgleichheit zwischen einer Funktion, die invariant gegenüber positiv affinen Transformationen ist, und dem Begriff der kardinalen Messbarkeit her.[71] Ausgehend vom englischsprachigen Raum wurde diese Sichtweise später auch im deutschsprachigen Raum abgelöst,[72] obwohl frühzeitig auf die mangelnde Kardinalität von Definition 1.7 hingewiesen wurde.[73] Wichtige Beiträge zur Entscheidungstheorie (z. B. von Neumann/Morgenstern (1953) oder Milnor (1954)) verwenden jedoch den Begriff *"numerical utility"* für kardinale Funktionen nach Def. 1.7.[74]

Deshalb wird oftmals auch im deutschsprachigen Raum mit dem Begriff der kardinalen Nutzenfunktion das erste Verständnis bezeichnet. Zur besseren Unterscheidung wird diese Bezeichnung beibehalten und eine Funktion in der zweiten Interpretation als *„kardinal messende Funktion"* bezeichnet.

---

[67] Vgl. Debreu (1960); Fishburn (1989a: 129); Kruschwitz/Husmann (2012: 48–49); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 39).

[68] Vgl. Kürsten (1992); Dyckhoff (1993: 141).

[69] Vgl. Samuelson (1938). Paul A. Samuelson (1915–2009) erhielt 1970 zusammen mit Leonid Hurwicz – dem Begründer des Hurwicz-Prinzips (vgl. S. 172) – und Eric Maskin den „Wirtschaftsnobelpreis".

[70] Vgl. Moscati (2013: 930–931).

[71] Vgl. Fishburn (1989a: 129).

[72] Vgl. die historische Analyse von Moscati (2013).

[73] Vgl. Baumol (1958).

[74] Vgl. Fußnote 388 auf S. 118 sowie Fußnote 523 auf S. 161.

4. Verhältnisskala:

Mit Blick auf Definition 1.6 wurde geschlussfolgert, dass die Anordnung der Wertdifferenzen invariant gegenüber positiv affinen Transformationen ist. Jedoch kann gezeigt werden, dass die Relation der Verhältnisse **nicht invariant** gegen eine derartige Transformation ist:

$$\frac{f(e_1)}{f(e_2)} = \frac{\alpha \cdot e_1 + \beta}{\alpha \cdot e_2 + \beta} \neq \frac{e_1}{e_2}.$$

Die Skala, welche eine Bildung von Verhältnissen der Merkmalswerte selbst erlaubt, wird aufgrund dieser Eigenschaft als **Verhältnisskala** bezeichnet. Diese Form bietet eine stärkere Form der Skalierung, da die verwendeten Zahlen **alle Axiome** aus der Abbildung 1.4 erfüllen.[75] Der Nullpunkt dieser Skala ist eindeutig festgelegt. Mit den Werten können alle mathematischen Operationen ohne Einschränkung durchgeführt werden.

Ein Blick auf die obige Darstellung der Quotienten zeigt, dass $\frac{f(e_1)}{f(e_2)} = \frac{e_1}{e_2}$, wenn $\beta = 0$. Deshalb ist die Ordnung auf der Verhältnisskala invariant gegen Streckungen nach Definition 1.9 - auch als lineare Transformationen bezeichnet.[76]

Definition 1.9: *Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Transformation von e, wenn es eine positive reelle Zahl $\alpha > 0$ gibt, so dass gilt: $f(e) = \alpha \cdot e$ $\forall\ e \in E$.*

Als Beispiel kann hier auf die verschiedenen Skalen zur Temperaturmessung hingewiesen werden. In Ergänzung zu den obigen Ausführungen kann darauf hingewiesen, dass – im Gegensatz zur Fahrenheit- und zur Celsius-Skala – nur die Kelvin-Skala eine Verhältnisskala ist. Die Aussage, dass 40°K doppelt so warm sind wie 20°K ist korrekt, da es einen absoluten Nullpunkt gibt. Die Angabe von Preisen in verschiedenen Währungen erfolgt ebenfalls auf einer Verhältnisskala, da der Nullpunkt stets fixiert ist und lediglich die Skaleneinheiten frei gewählt werden.

5. Differenzskala:

Von lediglich geringerer Bedeutung ist die Differenzskala. Diese zeichnet sich durch eine festgelegte Einheit und einen willkürlich festzulegenden Nullpunkt aus. Die Ergebnisse auf dieser Skala sind invariant gegenüber Transformationen vom Typ: $f(e) = e + \beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$. Ein Beispiel ist die sog. Rasch-Skala zur Messung des Einflusses von Persönlichkeitsmerkmalen auf die Leistungsfähigkeit.[77]

[75] Vgl. Zangemeister (1976: 154).
[76] Vgl. Schneeweiß (1963: 185).
[77] Vgl. Schiel (2006: 235–245).

6. Absolute Skala:

Eine Skala mit festgelegtem Nullpunkt und definierter Einheit ist eine absolute Skala. Die zulässigen Transformationen beschränken sich auf $f(e) = e$, d. h. es sind keine Transformationen zulässig. Beispiele für absolute Skalen sind Stückzahlen oder Wahrscheinlichkeiten.

In Tabelle 1.5 sind die vorgestellten Skalenniveaus und ihre wichtigsten Eigenschaften zusammenfassend dargestellt. Die Intervall-, Verhältnis-, Differenz- und Absolute Skala werden auch unter dem Begriff metrische bzw. kardinale Skala zusammengefasst.

Tab. 1.5: Eigenschaften der Skalenniveaus. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Schneeweiß (1963: 185); Zimmermann/Gutsche (1991: 11–13).

Merkmal / Skalenniveau	Zulässige Transformation	Invariant bleiben bei der zulässigen Transformation	Beispiele
Nominalskala	jede eindeutige Funktion $f(x)$	Eindeutigkeit der Messwerte	Kontonummern, Matrikelnummern
Ordinalskala	jede streng monoton steigende Funktion $f(x)$	Rangordnung der Messwerte	Schulnoten, Erdbebenskala nach Richter
Intervallskala	jede positiv-affine Funktion $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie $\alpha > 0$	Verhältnisse der Intervalle zwischen den Messwerten	Celsius- und Fahrenheit-Temperaturskala,
Verhältnisskala	jede lineare Funktion $f(x) = \alpha \cdot x$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$	Verhältnisse der Messwerte	Kelvin-Temperaturskala, Preisangaben, Zeit-/Gewichtsmessung
Differenzskala	jede Funktion $f(x) = x + \beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$	Differenz der Messwerte	Personenparameter im Rasch-Modell
Absolute Skala	jede Funktion $f(x) = x$	Messwerte	Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten

Es wird deutlich, dass die Verhältnisskala als Sonderfall der Intervallskala bezeichnet werden kann, wenn $\beta = 0$. Die Differenzskala kann ebenfalls als Sonderfall der Intervallskala bezeichnet werden, wenn $\alpha = 1$.

1.3 Höhenpräferenz - Einstufige Entscheidungen bei Sicherheit und einem Ziel

1.3.1 Einführung

Die einfachste Form der Entscheidung liegt bei einfacher Zielsetzung und sicheren Erwartungen vor. Für die weiteren Ausführungen gelten folgende Annahmen und Notationen:

- In der Zukunft existiert lediglich ein möglicher Zustand.
- Die endliche, nicht leere Aktionenmenge $A = \{a_1,...,a_m\}$ ist gegeben durch m Alternativen $a_i (i = 1,....,m)$, die sich gegenseitig ausschließen.
- Der Akteur muss mit einer **einstufigen Entscheidung** aus A die optimale Alternative herausfiltern.
- Jede Alternative a_i führt zu einem bekannten, sicheren Ergebnis e_i.
- Die Ergebnisse sämtlicher Alternativen treten zu einem identischen Zeitpunkt ein.
- Die Ergebnisse e_i mit $i = 1,...,m$ bilden eine Menge $E = \{e_1,...,e_m\}$ (vgl. Tab. 1.6).

Tab. 1.6: Ergebnistabelle bei Sicherheit und einem Ziel. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Ergebnis
a_1	e_1
a_2	e_2
$\vdots$	$\vdots$
a_{m-1}	e_{m-1}
a_m	e_m

- Auch die **Unterlassung** einer Maßnahme ist eine zulässige Alternative.

Die Entscheidung wird von einer Instanz – Person, Personengruppe oder Gremium – getroffen. Diese Instanz wird im Folgenden als Akteur bezeichnet und entspricht der Charakterisierung des homo oeconomicus in Abschn. 1.1. Möglichkeiten zur Herbeiführung kollektiver Entscheidungen werden hier nicht betrachtet, sondern es wird auf das entsprechende Kapitel verwiesen.[78]

Zur Entscheidungsfindung muss die beste Alternative ausgewählt werden. Das Präferenzfunktional bei Entscheidungen mit einer Zielsetzung unter Sicherheit lautet:[79] $\Phi(a) = u(a)$. Für den hier vorliegenden einfachen Fall ist diejenige Alternative zu wählen, welche den höchsten Nutzen erzielt. Die optimale Alternative a_{opt} ist deshalb bestimmt durch E.-regel 1.1.

Entscheidungsregel 1.1: *Bei einer einstufigen Entscheidung unter Sicherheit und bei einer Zielsetzung ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:* $\Phi(a_{opt}) = \max_i \Phi(a_i) = \max_i u_i$.

Um zu einer Entscheidung zu gelangen, müssen die Ergebnisse mittels einer Nutzenfunktion[80] in Nutzenwerte umgerechnet werden. Die **Höhenpräfe-**

[78] Vgl. Kapitel 3 auf S. 387.
[79] Vgl. Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 38).
[80] Vgl. Def. 1.2 auf S. 16.

renz beschreibt das angestrebte Ausmaß der Zielgröße. Folgende Höhenpräferenzen sind denkbar:[81]

- **Extremierung:** In diesem Fall wird die Maximierung oder die Minimierung der Ergebnisgröße angestrebt. Der Nutzen wächst (Maximierung) oder fällt (Minimierung) bei zunehmenden Ergebniswerten streng monoton. Klassische Beispiele sind die Erlösmaximierung oder die Kostenminimierung.
- **Approximierung:** Es wird eine gewünschte Ergebnisgröße festgelegt, die zu einem Nutzenmaximum führt. Positive und negative Abweichungen davon führen zu einem abnehmenden Nutzen. Ein Beispiel dafür sind Liefertermine. Verfrühte Lieferungen bedeuten eine Nutzenreduktion in Form von Lagerkosten, wohingegen eine Verspätung zu Vertragsstrafen und damit ebenfalls zur Nutzenreduktion führt.
- **Satisfizierung:** Es wird ein Anspruchsniveau definiert, welches mindestens zu erreichen ist, bevor überhaupt ein Nutzen entsteht. Darüber hinausgehende Ergebniswerte führen zur Existenz oder auch zu einer Steigerung des Nutzens.
- **Meliorisierung:** Neben diesen Vorgehensweisen besteht die Möglichkeit, Ergebnisgrößen, die in der Vergangenheit schon erreicht wurden, als Ausgangs- bzw. Referenzpunkt zu verwenden. Im Rahmen der Nutzenbestimmung wird lediglich die Richtung festgelegt, in welche eine Veränderung von diesem Referenzpunkt zu erfolgen hat.

Bei der Abbildung des Nutzens treten folgende Fragen auf:

- Welchen Nutzen haben die Ergebnisse für den Akteur?
- Lässt sich dieser Nutzen als Funktion des Ergebnisses abbilden?
- Welche Anforderungen müssen die Präferenzen des Akteurs für eine solche Abbildung erfüllen?

In den folgenden Abschnitten werden diejenige Anforderungen an die Präferenzen vorgestellt, die die Existenz von Nutzenfunktionen sicherstellen. Diese Anforderungen werden oft als **Axiome des rationalen Entscheidens** bezeichnet.

Die Vorgehensweise zur Bestimmung des Präferenzfunktionals besteht demzufolge in der zweiten Variante.[82] Damit der Leser den Überblick behält, werden zum Abschluss der Darstellungen die wesentlichen Axiome und die sich daraus ergebende Funktionen bzw. Funktionale zusammengefasst.[83]

[81] Vgl. Zelewski (2008: 13); Klein/Scholl (2011: 101–103).

[82] Vgl. Tab. 1.4 auf S. 18.

[83] Vgl. Tab. 1.59 auf S. 217.

1.3.2 Axiome rationalen Handelns

1.3.2.1 Ordinaler Nutzen

Zur rationalen Entscheidungsfindung unter Sicherheit werden traditionell folgende Grundanforderungen an die Präferenzen eines Akteurs gestellt:

- Axiome 1.3.1 bis 1.3.3: Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität,
- Axiom 1.3.4: Stetigkeit,
- Axiom 1.3.5: Monotonie.

Diese Axiome gelten für sichere Entscheidungen mit einem Ziel und sind auch Bestandteil des Axiomensystems bei multikriteriellen Entscheidungen. Interessanterweise beinhalten die Axiomatik bei Entscheidungen unter Ungewissheit, die Axiomatik betreffs Entscheidungen bei Risiko sowie die Axiomatik intertemporaler Entscheidungen ähnliche Anforderungen.[84] Diese Übereinstimmungen werden in der zusammenfassenden Diskussion extra thematisiert.[85]

Die Axiome werden nun kurz erläutert. Eine Kritik erfolgt an anderer Stelle.[86] Grundlegend wird vom Akteur gefordert, alle Ergebnisse zu erfassen und miteinander zu vergleichen, so dass eine vollständige Präferenzrelation entsteht (vgl. Anf. 1.3.1).[87]

Anforderung 1.3.1 (Vollständigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist vollständig, wenn für jedes Paar $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$ festgelegt wird: entweder $e_1 \succsim e_2$ oder $e_2 \succsim e_1$ oder beides.*

Jedes Ergebnis muss sich selbst gegenüber schwach präferiert werden, was als Reflexivität bezeichnet wird (vgl. Anf. 1.3.2).

Anforderung 1.3.2 (Reflexivität): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist reflexiv, wenn gilt: $e_1 \succsim e_1$ für jedes $e_i \in E$.*

Die nächste Forderung beschreibt den Umstand, dass die Relation von zwei Ergebnissen indirekt aus der Relation dieser Ergebnisse zu einem dritten Ergebnis resultieren muss. Dies wird als Transitivität bezeichnet (vgl. Anf. 1.3.3).

---

[84] Vgl. Tab. 1.59 auf S. 217.
[85] Vgl. Abschn. 1.8 auf S. 216.
[86] Vgl. Abschn. 1.3.3 auf S. 40.
[87] Vgl. French (1988: 69–70); Ossadnik (1998: 17–19); Zimmermann (2008: 18–19).

Anforderung 1.3.3 (Transitivität): *Eine Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist transitiv, wenn aus $e_1 \succsim e_2$ und $e_2 \succsim e_3$ für jede Kombination $e_1, e_2, e_3 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$, $e_1 \neq e_3$ und $e_2 \neq e_3$ folgt: $e_1 \succsim e_3$.*

Das Vollständigkeits- und das Transitivitäts-Axiom waren schon Bestandteile des ersten Axiomensystems von Ragnar Frisch.[88]

Wenn eine Präferenzrelation vollständig, reflexiv und transitiv ist, handelt es sich um eine - wenn auch lediglich schwache - **Präferenzordnung**.

Zur weiteren Erläuterung werden die Ergebnisse e_1 und e_2 als Bündel der Güter (x,y) interpretiert. Die Menge dieser Güter ist endlich. Dann bezeichnen (x_1,y_1) das Güterbündel e_1 und (x_2,y_2) das Güterbündel e_2.

Es wird davon ausgegangen, dass ein Akteur gegenüber Güterbündeln mit identischen Nutzen indifferent ist. So kann die Indifferenzmenge beschrieben werden (vgl. Def. 1.10).

Definition 1.10: *Die Indifferenzmenge $I(e_1)$ besteht aus sämtlichen Güterkombinationen für die gilt $e_1 \sim e_i$, so dass folgt: $I(e_1) = \{e_i \in E | e_1 \sim e_i\}$.*

Die Indifferenzmenge kann unterschiedlich gestaltet sein. In der Regel wird sie als **Indifferenzkurve** dargestellt. In dem Beispiel gilt $e_1 \sim e_2$ (vgl. Abb. 1.5 a). Jede Indifferenzkurve besteht aus Güterkombinationen, die für den Akteur dasselbe **Nutzenniveau** stiften.

Deshalb wird üblicherweise davon ausgegangen, dass es sich um Güter bzw. Güterkombinationen handelt, deren positive Mengen beliebig teilbar sind. Die Anzahl der möglichen Güterkombinationen und demzufolge die Anzahl der Indifferenzkurven ist deshalb unendlich.[89]

Das Nutzenniveau nimmt mit steigendem Abstand vom Koordinatenursprung zu. In der Abb. 1.5 a) gilt deshalb $u(I_1) < u(I_2) < u(I_3)$, was in der Abb. 1.6 b) besser ersichtlich wird.

Die **Transitivität** der Präferenzen (vgl. Anf. 1.3.3) führt zur **Parallelität** sämtlicher Indifferenzkurven. Wären die Präferenzen intransitiv, würden sich die Indifferenzkurven schneiden.

[88] Vgl. Frisch (1926: 3–5); Frisch (1957: 81).

[89] Diese Annahme ist in einem anderem Kontext ebenfalls relevant. Vgl. Def. 1.4.2 auf S. 58.

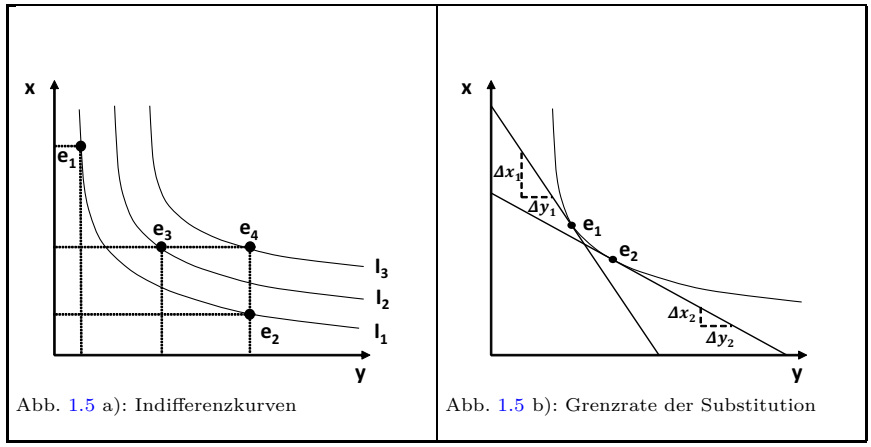


Abb. 1.5 a): Indifferenzkurven

Abb. 1.5 b): Grenzrate der Substitution

Abb. 1.5: Indifferenzkurven und Grenzrate der Substitution. Quelle: Eigene Darstellung.

Werden nun die Güterkombinationen ein und derselben Indifferenzkurve betrachtet, kann die Frage nach der Austauschrate zwischen den Gütern beantwortet werden. Da der Nutzen für den Entscheidungsträger für sämtliche Punkte ein und derselben Indifferenzkurve konstant ist, muss die Verringerung der Menge eines Gutes durch die Erhöhung der Menge des anderen Gutes kompensiert werden. Zur Erklärung wird der Nutzen zweier Güter x und y sowie die damit verbundene Nutzenfunktion

$$u = f(x,y)$$

betrachtet. Die Änderung des Gesamtnutzens bei gleichzeitiger Variation der Gütermengen ergibt sich aus:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

Wird von einem konstanten Gesamtnutzen ausgegangen, folgt $du = 0$ und somit:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

Dies kann formuliert werden zu:

$$-\frac{dx}{dy} = \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \right)$$

Die linke Seite der letzten Gleichung wird als **Grenzrate der Substitution** bezeichnet (vgl. Def. 1.11).

Definition 1.11: *Die Grenzrate der Substitution von Gut x durch Gut y ist definiert durch:* $-\frac{dx}{dy} = \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right)$

Die Grenzrate des Substitution $\frac{dx}{dy}$ beschreibt diejenige notwendige Erhöhung der Menge des Gutes x, um eine Senkung der Menge von Gut y zu kompensieren. Sie beschreibt demzufolge das marginale Austauschverhältnis zwischen den Gütern.

Term $\frac{\partial u}{\partial x}$ definiert den Nutzenzuwachs, den eine zusätzliche Einheit des Gutes x stiftet und der deshalb als **Grenznutzen** bezeichnet wird. Damit wird deutlich, dass die Grenzrate der Substitution dem umgekehrten Verhältnis der Grenznutzen der Güter entspricht.

Die Grenzrate der Substitution entspricht grafisch der Tangente an einem Punkt der Indifferenzkurve (vgl. Abb. 1.5 b). Offensichtlich unterscheiden sich in der Abb. 1.5 b) die Anstiege der verschiedenen Tangenten, was gleichbedeutend mit unterschiedlichen Grenzraten der Substitution ist.

Die nächste Anforderung ist die Stetigkeit der Präferenzen. Die Bedeutung dieser Forderung lässt sich wie folgt grafisch veranschaulichen: Zur Erstellung der Nutzenfunktion ist es erforderlich, die Indifferenzkurven aus der 2-dimensionalen in eine 3-dimensionale Darstellung zu überführen (vgl. Abb. 1.6 a). Dazu dürfen die Indifferenzkurven keine Sprungstellen aufweisen.

Die Stetigkeit der Präferenzen sichert die Stetigkeit der Nutzenfunktion, welche die Indifferenzkurven verbindet und den Übergang von einem Nutzenniveau zum anderen Niveau an jeder Stelle der Indifferenzkurve ermöglicht (vgl. Abb. 1.6 b). Die Grundlage für die Formulierung der Stetigkeit in der Nutzenmessung bildet das sog. ARCHIMEDISCHE Axiom (vgl. Axiom 1.1).[90]

Axiom 1.1 (ARCHIMEDISCHES Axiom): *Sind x,$y \in \mathbb{R}$ und ist $x > 0$, so existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $y < n \cdot x$.*

Es handelt sich also um eine grundsätzliche Eigenschaft, die den natürlichen Zahlen zugewiesen wird. In der Geometrie wird das Stetigkeits-Axiom wie folgt formuliert: *„Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, daß das n-malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.“*[91]

[90] Vgl. Schindler (2002: 40–41).

[91] Hilbert (1987: 30).

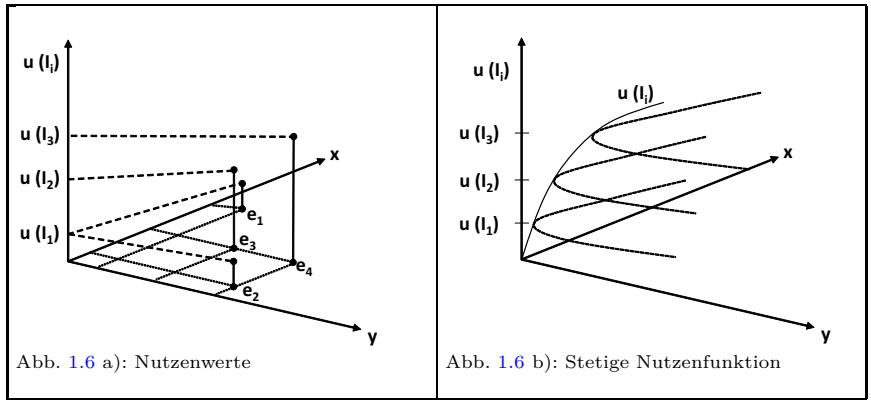


Abb. 1.6 a): Nutzenwerte

Abb. 1.6 b): Stetige Nutzenfunktion

Abb. 1.6: Nutzenwerte und Nutzenfunktion. Quelle: Eigene Darstellung.

Diese Eigenschaft ist grundlegend für eine ganze Reihe von Beiträgen zur Nutzentheorie,[92] wie z. B. für:

- die grundlegenden Gedanken zur Messbarkeit des Nutzens,[93]
- die multiattributive Nutzentheorie,[94]
- den von-Neumann-Morgenstern-Nutzen.[95]

Die Stetigkeit wird im weiteren Verlauf wie in Axiom 1.3.4 beschrieben.[96]

Anforderung 1.3.4 (Stetigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist stetig, wenn für beliebige drei Ergebnisse mit $e_1 \succ e_2 \succ e_3$ ein $\lambda \in]0,1[$ existiert, so dass gilt: $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_3 \sim e_2$.*

Es ist demzufolge plausibel, dass $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_3$ dem Ergebnis e_2 vorgezogen wird, wenn λ den Wert 1 annimmt oder sehr nah am Wert 1 liegt. Weiterhin ist es plausibel anzunehmen, dass die Änderung von λ vom Wert 1 hin zum Wert Null zu einem Punkt führt, an dem die beiden - wie beschrieben - gleichwertig sind. Eine weitere Änderung von λ führt anschließend zu einer Umkehrung der Präferenzrelation.

In der Literatur sind weitere Definitionen der Stetigkeit zu finden.[97] Diese werden in verschiedenen Kontexten und Axiomen-Systemen verwendet. Da im weiteren Verlauf einige davon notwendig sind, werden diese kurz vorgestellt.

[92] Vgl. Krantz et al. (1971: 25–26).

[93] Vgl. Alt (1936: 164); Schneeweiß (1963: 195–196).

[94] Vgl. Abschn. 1.4.3 auf S. 54.

[95] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 630) sowie Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

[96] Vgl. Jarrow (1988: 10); Kruschwitz/Lorenz (2019: 276).

[97] Vgl. Gottinger (1970); Schmidt (2004: 761–762); Dubra/Maccheroni/Ok (2004: 121); Karni (2014: 8–9).

Ergänzend zur Indifferenzmenge $I(e_1)$ aus Def. 1.10 können die folgenden zwei Mengen unterschieden werden:[98]

- die „Nicht-besser-als-Menge“ (NBA-Menge)[99] und
- die „Nicht-schlechter-als-Menge“ (NSA-Menge)[100].

Diese Mengen sind in Def. 1.12 beschrieben.

Definition 1.12: *Für die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist die NBA-Menge von e_1 definiert durch NBA $(e_1) = \{e_i \in E | e_1 \succsim e_i\}$ und die NSA-Menge von e_1 ist definiert mit NSA $(e_1) = \{e_i \in E | e_1 \precsim e_i\}$.*

Die NSA-Menge von e_1 beinhaltet diejenigen Güterkombinationen, für die aus Sicht des Akteurs die Relation $e_i \succsim e_1$ gilt. Diese Menge beinhaltet also alle Kombinationen, die besser bzw. ebenso gut sind wie e_1, demzufolge auch die Kombinationen auf der Indifferenzkurve. In dem Beispielfall gilt demzufolge $NSA\ (e_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (vgl. Abb. 1.5 a). Für die NBA-Menge gilt dann die umgekehrte Relation. Eine häufig zu findende Formulierung der Stetigkeit ist in Def. 1.13 beschrieben.[101]

Definition 1.13 (Stetigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist stetig, wenn für alle $e_i \in E$ sowohl die NBA (e_i)-Menge als auch die NSA (e_i)-Menge abgeschlossen ist.*

Die Formulierung der Stetigkeit nach Definition 1.13 ist strenger als die Beschreibung in Anforderung 1.3.4 bzw. impliziert diese. Stetigkeit nach Definition 1.13 führt dazu, dass die damit verbundene Nutzenfunktion ebenfalls stetig, im Sinn von differenzierbar ist.[102] Für Entscheidungen bei Risiko werden ebenfalls zwei Arten von Stetigkeit sowie ähnliche damit verbundene Konsequenzen unterschieden.[103]

Die Stetigkeit fordert, dass die Präferenzen des Akteurs keine „Sprünge“ aufweisen. Das lässt sich aus der Abgeschlossenheit der Konturmengen folgendermaßen erklären: Die Abgeschlossenheit einer Menge garantiert, dass der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Gliedern aus dieser Menge ebenfalls ein Element dieser Menge ist. Damit wird sichergestellt, dass sich die Präferenzrelationen nicht umkehren, wenn ein Grenzübergang im Unendlichen

[98] Vgl. Kreps (2013: 7–8); Wiese (2021: 68).

[99] Synonym: untere Konturmenge.

[100] Synonym: obere Konturmenge.

[101] Vgl. Breyer (2020: 132); Kolmar (2021: 182). Gérard Debreu (1921–2004), der 1983 den „Wirtschaftsnobelpreis“ erhielt, legte mehrere grundlegende Beiträge zum Thema der stetigen Nutzenfunktionen vor. Für additive stetige Nutzenfunktionen vgl. Debreu (1960).

[102] Vgl. Debreu (1954: 160–161); Fishburn (1979: 35–37); Barten/Böhm (1982: 386–388).

[103] Vgl. Schmidt (2004: 761–766); Karni (2014: 9–10).

erfolgt. Infinitesimal kleine Änderungen der Güterbündel führen demzufolge nicht zu einer Umkehrung der Präferenzrelation.

Diese vier bisher formulierten Anforderungen - Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität, Stetigkeit - sind erforderlich, um ausgehend von den Präferenzen des Akteurs eine **ordinale Nutzenfunktion** entsprechend der Definition 1.5 auf S. 20 zu beschreiben (vgl. Merksatz 1.2).[104]

Merksatz 1.2: *Wenn die Präferenzrelation $\succsim$ auf E vollständig, reflexiv, transitiv und stetig ist, existiert eine Nutzenfunktion $u : E \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für irgend zwei e_1, e_2 aus E gilt: $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2)$.*

Merksatz 1.2 wird auch als **Existenz-Theorem von Debreu** über ordinale Nutzenfunktionen bezeichnet. Interessanterweise erfolgte die Axiomatisierung der allgemeineren und einfacheren Repräsentation ordinaler Nutzenfunktionen durch Debreu nach der Axiomatisierung kardinaler Nutzenfunktionen durch von Neumann/Morgenstern bzw. Herstein/Milnor und Marschak.[105]

Zusätzlich zu diesen Eigenschaften werden häufig noch **Beschränktheit** und **Monotonie** erwähnt bzw. gefordert. Zuerst soll die Beschränktheit erläutert werden (vgl. Eigenschaft 1.3.1). Ein Akteur muss in der Lage sein, das beste Ergebnis $\overline{e}$ und das schlechteste Ergebnis $\underline{e}$ zu identifizieren, jedoch so, dass diese Werte nicht unendlich groß sind. Sämtliche anderen Ergebnisse müssen dazwischen eingeordnet werden können.[106] Dies wird durch das Stetigkeits-Axiom gesichert.[107] Wenn es ein Ergebnis e_2 geben soll, welches gleichwertig zur Kombination von e_1 und e_3 ist, so sind unendliche Werte von e_1 bzw. e_3 ausgeschlossen.

Eigenschaft 1.3.1 (Beschränktheit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist beschränkt, wenn für das beste Ergebnis $\overline{e}$ und das schlechteste Ergebnis $\underline{e}$ sowie sämtliche anderen Ergebnisse e_i mit $e_i \neq \underline{e}$ und $e_i \neq \overline{e}$ gilt: $\overline{e} \succsim e_i \succsim \underline{e}$.*

Damit wird die Ergebnismenge auf endliche Werte beschränkt. Der Akteur muss in der Lage sein, ein bestes Ergebnis mit endlichen Werten und ein schlechtestes Ergebnis, wiederum mit endlichen Werten, anzugeben. Üblicherweise wird die Nutzenfunktion so normiert, dass das beste Ergebnis den Wert 1 erhält und dem schlechtesten Ergebnis der Wert 0 zugewiesen wird. Das wird auch als **Bandbreitennormierung** bezeichnet.[108]

---

[104] Vgl. Debreu (1954: 162–163); Schneeweiß (1963: 193); Barten/Böhm (1982: 388); Hens/Pamini (2008: 291).

[105] Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

[106] Vgl. Jarrow (1988: 11); Kruschwitz/Husmann (2012: 28).

[107] Vgl. Anf. 1.3.4 auf S. 32.

[108] Vgl. Klein/Scholl (2011: 100).

Die **Monotonie** beschreibt das Motto „Mehr ist besser“. Dazu dient die Vorstellung, dass der Akteur über eine Präferenzordnung der Form $e_1 \succ e_2$ verfügt und sich zwischen zwei - aus diesen Gütern - zusammengesetzten Güterkörben entscheiden soll. Wenn er sich rational verhält, müsste er denjenigen Korb bevorzugen, welcher einen größeren Anteil des Gutes e_1 beinhaltet (vgl. Axiom 1.3.5).

Anforderung 1.3.5 (Monotonie): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist monoton, wenn für irgend zwei Ergebnisse mit $e_1 \succ e_2$ und $\lambda, \mu \in [0,1]$ sowie $\lambda > \mu$ gilt: $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_2 \succ \mu \cdot e_1 + (1-\mu) \cdot e_2$.*

Monotonie bezieht sich offensichtlich auf qualitativ vergleichbare Güter, da bei großen Qualitätsunterschieden keine rein quantitative Betrachtung ausreicht. Die Güter müssen deshalb auf einer absoluten Skala mess- und vergleichbar sein.[109] Das Monotonie-Axiom wird in der Literatur auch als *„Order-preserving-axiom“* oder Dominanz-Axiom bezeichnet.[110] Mit diesen Eigenschaften kann die Nutzenfunktion wie folgt beschrieben werden (vgl. Merksatz 1.3).[111]

Merksatz 1.3: *Wenn die Präferenzrelation $\succsim$ auf E vollständig, reflexiv, transitiv, stetig und monoton ist, existiert eine Nutzenfunktion $u : E \to \mathbb{R}$, so dass für irgend zwei e_1, e_2 aus E gilt: $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2)$ sowie:*

$$u(e) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } e \sim \overline{e}, \\ \lambda \in]0,1[& \text{wenn } \overline{e} \succ e \succ \underline{e} \text{ und } e \sim \lambda \cdot \overline{e} + (1-\lambda) \cdot \underline{e}, \\ 0 & \text{wenn } e \sim \underline{e}. \end{cases}$$

Wenn die Stetigkeit in Merksatz 1.3 entsprechend der Definition 1.13 festgelegt wird,[112] ist die Nutzenfunktion ebenfalls stetig.

Eine weitere Annahme rationalen Verhaltens besteht in der **Konvexität**. Die **strenge Konvexität** in Anf. 1.3.6 beschreibt den Umstand, dass ein rationaler Akteur anstelle von zwei Extremergebnissen, die für ihn dieselbe Wertigkeit besitzen, eine Mischung aus diesen Ergebnissen - eine konvexe Linearkombination - lieber hätte. Ein intuitives Beispiel sind die Ergebnisse „2 l Apfelsaft“ und „2 kg Rindersteak“. Mit dem Axiom der strengen Konvexität wird postuliert, dass der Akteur - wenn aus seiner Sicht gilt „2 l Apfelsaft $\sim$ 2 kg Rindersteak“ - eine Mischung der Form „1 l Apfelsaft“ und „1 kg Rindersteak“ bevorzugen würde.[113]

---

[109] Vgl. Kolmar (2021: 183).

[110] Vgl. Jarrow (1988: 9); Kruschwitz/Husmann (2012: 29).

[111] Vgl. Fishburn (1979: 32–38); González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 8); Kruschwitz/Husmann (2012: 29–30).

[112] Vgl. S. 33.

[113] Vgl. Kolmar (2021: 183).

Anforderung 1.3.6 (Strikte Konvexität): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist strikt konvex, wenn für alle $e_i \in E$ mit $e_1 \neq e_2 \wedge e_1 \sim e_2$ folgt: $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_2 \succ e_1$ für alle $\lambda \in]0,1[$.*

In der Abbildung 1.7 a) ist die bisherige Darstellung der Präferenzordnung erweitert um die Konsumbündel e_5 und e_6. Es wird deutlich, dass die Relation streng konvex ist, da $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_2 \succ e_6$. Jede beliebige Mischung aus e_1 und e_2 wird e_6 vorgezogen und liegt auf einer Indifferenzkurve mit einem höheren Nutzen, wie z. B. e_5.

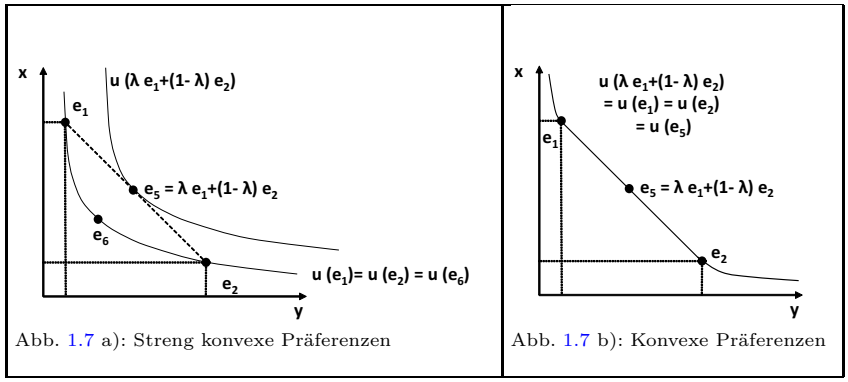


Abb. 1.7 a): Streng konvexe Präferenzen

Abb. 1.7 b): Konvexe Präferenzen

Abb. 1.7: Konvexe und streng konvexe Präferenzen. Quelle: Eigene Darstellung.

Die strenge Konvexität der Präferenzen ist die Begründung für die bereits dargestellten unterschiedlichen Grenzraten der Substitution in Abb. 1.5 b). Mit Blick auf die Abb. 1.7 a) werden die zwei Konsumbündel e_1 und e_2 betrachtet. Im Punkt e_1 hat der Akteur bereits eine relativ hohe Menge von Gut x in seinem Bündel. Um eine zusätzliche Einheit des Gutes y zu erhalten, wäre er deshalb bereit, auf eine relativ große Menge von Gut x zu verzichten. Diese Verzichtmenge nimmt jedoch in dem Maße ab, wie die Menge von Gut y ansteigt. Deshalb wird der Akteur im Punkt e_2 für eine zusätzliche Einheit von Gut y auf eine - im Vergleich zum Punkt e_1 - geringere Menge von Gut x verzichten. Die Grenzrate der Substitution[114] nimmt demzufolge ab. Streng konvexe Präferenzen implizieren deshalb abnehmende Grenzraten der Substitution.

Im Gegensatz zur strengen Form der Konvexität würde ein Akteur im Fall von „einfacher“ **Konvexität** die Einzelbündel als nicht schlechter im Vergleich zum Mischbündel einschätzen (vgl. Anf. 1.3.7).[115]

[114] Vgl. Def. 1.11 auf S. 31.

[115] Vgl. Kolmar (2021: 183).

Anforderung 1.3.7 (Konvexität): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist konvex, wenn für alle $e_i \in E$ mit $e_1 \succsim e_2$ folgt: $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_2 \succsim e_1$ für alle $\lambda \in [0,1]$.*

In der Abbildung 1.7 b) ist eine Präferenzrelation dargestellt, die zwischen den Punkten e_1 und e_2 konvex ist. Das Mischbündel im Punkt e_5 wird als nicht schlechter eingeschätzt, wie die beiden reinen Güterbündel.

Diese wesentlichen Axiome sind in der abschließenden Übersicht zusammengefasst.[116]

1.3.2.2 Kardinal messender Nutzen

Nachdem die Anforderungen an die Präferenzen für die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion vorgestellt wurden, soll erläutert werden, welche Bedingungen für die Existenz einer kardinalen bzw. kardinal messenden Funktion erfüllt sein müssen. Es wurde gezeigt,[117] dass jede kardinal messende Funktion eine kardinale Funktion ist. An dieser Stelle werden die Anforderungen an die Existenz einer kardinal messenden Funktion erläutert. Diese sind umfassender als die Anforderungen für kardinale Funktionen, die an anderer Stelle vorgestellt werden.[118] Kardinal messend ist eine Nutzenfunktion mit folgenden Eigenschaften:

Eigenschaft 1.3.2: $e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow u(e_1) \geq u(e_2)$

sowie

Eigenschaft 1.3.3: $(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_4) \Leftrightarrow u(e_1) - u(e_2) \geq u(e_3) - u(e_4)$.

Dazu sind die Präferenzen zwischen dem Übergang von einem Ergebnis zu einem anderen Ergebnis zu betrachten. Dabei gilt:

- Schwache Präferenz: Für den Fall, dass die Präferenz für den Übergang zwischen den Ergebnissen (e_2, e_1) größer bzw. nicht geringer ist, als die Präferenz für die Differenz zweier anderer Ergebnisse (e_4, e_3) wird formuliert: $(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_4)$. Das bedeutet, der Wechsel von e_2 zu e_1 wird dem Wechsel von e_4 zu e_3 schwach vorgezogen.
- Strikte Präferenz: Wird der Wechsel von e_2 zu e_1 dem Wechsel von e_4 zu e_3 strikt vorgezogen, gilt: $(e_1 \leftarrow e_2) \succ_D (e_3 \leftarrow e_4)$, mit: $\neg((e_3 \leftarrow e_4) \succsim_D (e_1 \leftarrow e_2))$.

[116] Vgl. Tab. 1.59 auf S. 217.

[117] Vgl. Merksatz 1.1 auf S. 23.

[118] Vgl. z. B. Abschn. 1.4.3.2 auf S. 55 oder Abschn. 1.5.4.1 auf S. 109.

- Indifferenz: Ist die Präferenz identisch, gilt: $(e_1 \leftarrow e_2) \sim_D (e_3 \leftarrow e_4)$, mit: $(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_4) \wedge (e_3 \leftarrow e_4) \succsim_D (e_1 \leftarrow e_2)$.

Wie bereits erwähnt, wird von ausschließlich positiven Differenzstrukturen ausgegangen, so dass beim Übergang $e_2 \rightarrow e_1$ ein Nutzenzuwachs entsteht. Grundsätzlich müssen für die Präferenzrelationen von Differenzen ($\succsim_D$) dieselben Anforderungen gelten, wie für die Präferenzrelation von Ergebnissen ($\succsim$): Vollständigkeit, Reflexivität und Transitivität (Axiome 1.3.1 bis 1.3.3). Zusätzlich sind weitere Relationen zu beachten.[119] Zur Erfüllung der Eigenschaften 1.3.2 und 1.3.3 muss gefordert werden, dass die Wertdifferenz eines Nutzenzuwachses beim Übergang von zwei unterschiedlich eingeschätzten Ergebnissen größer ist, als der Wert des Austausches eines Ergebnisses mit sich selbst (vgl. Anforderung 1.3.8).

Anforderung 1.3.8 (Konsistenz): *Die Relationen $\succsim$ und $\succsim_D$ auf $E \times E$ sind konsistent, wenn für jedes Paar $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 \neq e_2$ gilt:*

$$e_1 \succsim e_2 \Leftrightarrow (e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_3) \forall e_3 \in E.$$

Weiterhin wird festgehalten, dass aus der Eigenschaft 1.3.3 folgt:[120]

$$\begin{aligned}(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_4) &\Leftrightarrow u(e_1) - u(e_2) \geq u(e_3) - u(e_4),\\ &\Leftrightarrow u(e_4) - u(e_3) \geq u(e_2) - u(e_1),\\ &\Leftrightarrow \quad (e_4 \leftarrow e_3) \succsim_D (e_2 \leftarrow e_1).\end{aligned}$$

Das bedeutet, wenn der **Nutzenzuwachs** beim Übergang von $(e_2 \rightarrow e_1)$ (also Aufgabe von e_2 und Erhalt von e_1) nicht geringer ist als beim Übergang von $(e_4 \rightarrow e_3)$, muss auch umgekehrt gelten, dass der **Nutzenverlust** beim Übergang von $(e_1 \rightarrow e_2)$ (also Aufgabe von e_1 und Erhalt von e_2) nicht geringer sein darf, als der Verlust bei Aufgabe von e_3 und Erhalt von e_4. Diese Äquivalenz wird in Anforderung 1.3.9 formuliert.

Anforderung 1.3.9 (Äquivalenz): *Die Präferenzrelation $\succsim_D$ auf $E \times E$ ist äquivalent, wenn für alle $e_1, e_2, e_3, e_4 \in E$ gilt:*

$$(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_3 \leftarrow e_4) \Leftrightarrow (e_4 \leftarrow e_3) \succsim_D (e_2 \leftarrow e_1).$$

Daneben impliziert Eigenschaft 1.3.3 folgende Relation:[121]

$$\left.\begin{matrix}(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_4 \leftarrow e_5)\\ (e_2 \leftarrow e_3) \succsim_D (e_5 \leftarrow e_6)\end{matrix}\right\} \quad \begin{aligned}&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix}u(e_1) - u(e_2) & \geq u(e_4) - u(e_5),\\ u(e_2) - u(e_3) & \geq u(e_5) - u(e_6),\end{matrix}\right.\\ &\Leftrightarrow \quad u(e_1) - u(e_3) \geq u(e_4) - u(e_6),\\ &\Leftrightarrow \quad (e_1 \leftarrow e_3) \succsim_D (e_4 \leftarrow e_6).\end{aligned}$$

[119] Vgl. Roberts (1985: 134–142); French (1988: 83–85); Zimmermann (2008: 20–21).
[120] Vgl. Krantz et al. (1971: 143); French (1988: 84).
[121] Vgl. French (1988: 84).

Damit wird ausgedrückt, dass die Differenzunterschiede stabil bzw. transitiv sein müssen. Das muss unerheblich davon gelten, ob es sich um einen direkten oder indirekten Vergleich der Wertdifferenzen handelt. Dies wird in der Anforderung 1.3.10 zusammengefasst.[122] Vom Grundsatz her beschreibt die Anforderung die **Transitivität**, nämlich von Nutzendifferenzen. Werden zwei größere Abschnitte der Nutzenskala zusammengefügt, muss der resultierende Abschnitt größer sein, als wenn zwei kleinere Abschnitte zusammengesetzt werden. Zur besseren Unterscheidung von der bisher vorgestellten Transitivität erfolgt eine andere Benennung.

Anforderung 1.3.10 (Stabilität): *Die Präferenzrelation* $\succsim_D$ *auf* $E \times E$ *ist stabil, wenn für alle* $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \in E$ *gilt:*

$$\left.\begin{array}{l}(e_1 \leftarrow e_2) \succsim_D (e_4 \leftarrow e_5) \\ (e_2 \leftarrow e_3) \succsim_D (e_5 \leftarrow e_6)\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (e_1 \leftarrow e_3) \succsim_D (e_4 \leftarrow e_6).$$

Bisher wurde davon ausgegangen, dass die Anzahl der Indifferenzkurven unendlich ist, d. h. jeder Punkt auf der Zwei-Güterkombinationen-Fläche eine zulässige Kombination darstellt. Dies impliziert beliebig teilbare Gütermengen. Im Fall von Investitionsprojekten liegt jedoch eine endliche Anzahl, sich gegenseitig ausschließender Alternativen vor. Jede dieser Alternativen verspricht jeweils ein Ergebnis. Damit eine kardinal messende Wertfunktion existiert, muss sichergestellt werden, dass jede Wertdifferenz durch eine Kombination von Ergebnissen – ergo: Alternativen – ausgedrückt werden kann. Die Alternativenmenge muss demzufolge **„reich genug“** sein. Diese Forderung wird als Lösbarkeit bezeichnet (vgl. Anforderung 1.3.11).[123]

Anforderung 1.3.11 (Lösbarkeit): *Für alle* $e_2, e_3, e_4 \in E \; \exists \; e_1 \in E$*, so dass gilt* $(e_1 \leftarrow e_2) \sim_D (e_3 \leftarrow e_4)$ *und für alle* $e_2, e_3 \in E \; \exists \; e_1 \in E$*, so dass gilt* $(e_2 \leftarrow e_1) \sim_D (e_1 \leftarrow e_3)$*.*

Der Akteur muss demzufolge in der Lage sein, die folgenden zwei Fragen zu beantworten:

- Welches Ergebnis $e_1 \in E$ erfüllt die Beziehung $(e_1 \leftarrow e_2) \sim_D (e_3 \leftarrow e_4)$, wenn die Ergebnisse $e_2, e_3, e_4 \in E$ gegeben sind?
- Welches Ergebnis $e_1 \in E$ erfüllt die Beziehung $(e_2 \leftarrow e_1) \sim_D (e_1 \leftarrow e_3)$, wenn die Ergebnisse $e_2, e_3 \in E$ gegeben sind?

Das auf diesen Relationen aufbauende Gleichungssystem muss mit den vorhandenen Ergebnissen/Alternativen gelöst werden können. Diese Forderung ist deshalb – streng genommen – primär nicht an die Präferenzen des Akteurs, sondern an die Alternativenmenge gerichtet.

[122] Vgl. French (1988: 84); Zimmermann (2008: 20).

[123] Vgl. Krantz et al. (1971: 254–256); Roberts (1985: 137); French (1988: 87–88).

Mit diesen Anforderungen werden die Eigenschaften 1.3.2 und 1.3.3 erfüllt. Damit – und zuzüglich der Stetigkeit – kann die Existenz einer kardinal messenden Nutzenfunktion sichergestellt werden (vgl. Merksatz 1.4).[124]

Merksatz 1.4: *Wenn die Präferenzrelation $\succsim$ auf E vollständig, reflexiv, transitiv und stetig ist und wenn die Präferenzrelation $\succsim_D$ auf $E \times E$ vollständig, reflexiv, transitiv, stetig, konsistent, äquivalent und stabil ist und die Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist, existiert eine Nutzenfunktion $u : E \to \mathbb{R}$, die kardinal messend nach Def. 1.8 auf S. 22 ist.*

1.3.3 Zusammenfassende Kritik

Mit den beschriebenen Anforderungen an die Präferenzen können einfachste Situationen abgebildet werden. Abschließend werden diese Anforderungen nun kurz kritisch betrachtet. Als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer ordinalen Nutzenfunktion wurden:

- Vollständigkeit,
- Reflexivität,
- Transitivität sowie
- Stetigkeit

herausgestellt.[125] Diese werden kurz kritisch analysiert:

- **Vollständigkeit:** Die Forderung nach Vollständigkeit[126] erscheint simpel, beinhaltet jedoch die folgende Implikation, die bei praktischen Anwendungen teilweise problematisch ist: Sämtliche Ergebnisse der Menge E müssen **vergleichbar** sein. Deshalb kann die Vollständigkeit auch wie folgt beschrieben werden:[127] Die Präferenzrelation $\succsim$ auf E ist vollständig, wenn $\nexists\, e_1, e_2 \in E$, so dass weder $e_1 \not\succsim e_2$ noch $e_2 \not\succsim e_1$. Mit dieser Formulierung wird deutlich, dass die Vollständigkeit die Vergleichbarkeit impliziert. Eine Reihe von Problemen der Entscheidungstheorie entsteht durch den Umstand, dass Alternativen bzw. Ergebnisse miteinander verglichen werden, die nicht vergleichbar sind. Ergänzend wird darauf hingewiesen, dass mit zunehmender Größe der Alternativenmenge auch die Schwierigkeit wächst, sämtliche Elemente miteinander zu vergleichen. Vollständigkeit kann in unterschiedlichen Abstufungen vorliegen, so dass der Grad

[124] Vgl. Roberts (1985: 135–139); French (1988: 88–89).
[125] Vgl. Merksatz 1.2 auf S. 34.
[126] Vgl. Anf. 1.3.1 auf S. 28.
[127] Vgl. French (1988: 69); Fishburn (1991: 114).

der Vollständigkeit quantitativ bestimmt werden kann. Darauf wird hier jedoch nicht eingegangen, sondern auf die Literatur verwiesen.[128]

- **Reflexivität:** Die Reflexivitäts-Anforderung[129] ist unkritisch und wird nicht näher betrachtet.
- **Transitivität:** Diese Forderung[130] ist weithin akzeptiert und erscheint zweckmäßig bzw. logisch. Beispiel 1.1 soll jedoch auf eine Quelle der praktischen Probleme hinweisen.[131]

Beispiel 1.1:

Ein Akteur soll seine Präferenz für die Raumtemperatur angeben. Er bevorzugt $20^\circ C$. Erfahrungsgemäß ist er jedoch nicht in der Lage, Temperaturdifferenzen von $0{,}001^\circ C$ zu bemerken bzw. zu fühlen. Das bedeutet:

$$
\begin{array}{llcl}
(I) & 20{,}000^\circ C & \sim & 20{,}001^\circ C \\
(II) & 20{,}001^\circ C & \sim & 20{,}002^\circ C \\
(III) & 20{,}002^\circ C & \sim & 20{,}003^\circ C \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(IV) & 99{,}999^\circ C & \sim & 100{,}000^\circ C \\
\multicolumn{4}{c}{\textit{Transitivität führt demnach zu:}} \\
(V) & 20{,}000^\circ C & \sim & 100{,}000^\circ C
\end{array}
$$

Aussage (V) enthält einen Widerspruch.[132] *Die Fühlbarkeitsschwelle des Probanden führt zu einer paradoxen Schlussfolgerung. Die soeben beschriebene Situation ähnelt dem* Sorites*-Paradox.*[133] *Die Aussagen (I), (II) und (III) sind einzeln betrachtet logisch und akzeptabel. Nicht akzeptabel bzw. nicht zulässig ist die Anwendung dieses Vorgehens auf eine so große Anzahl an Temperaturschritten, also auf einen so großen Definitionsbereich.*

Es sind weitere Beispiele für die Verletzung der Transitivität aufgrund der Fühlbarkeitsschwelle zu finden.[134] Andere Probleme in Bezug auf die Transitivität ergeben sich aus den möglichen Entscheidungskonstellationen. Zur Erläuterung wird folgende Unterscheidung vorgenommen:

1. Einfache Transitivität: Der Akteur muss einmalig eine transitive Relation für eine Ergebnismenge bilden.

---

[128] Vgl. Esser (2001: 189–190).

[129] Vgl. Anf. 1.3.2 auf S. 28.

[130] Vgl. Anf. 1.3.3 auf S. 28.

[131] Vgl. French (1988: 64).

[132] Die Vorgehensweise entspricht einem klassischen Widerspruchsbeweis. Vgl. Aufg. 4.1 auf S. 569.

[133] Vgl. Kannetzky (2000: 114–141); Fink (2018: 16). Vgl. Abschn. 2.3 auf S. 301 zur vertiefenden Analyse von Paradoxien.

[134] Vgl. Krelle (1968: 21–24); Tversky (1969); Bitz (1981: 186–187); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 45–46).

2. Sequenzielle Transitivität: Der Akteur muss dieselbe Ergebnismenge mehrmalig in eine transitive Relation bringen.
3. Transitivität bei variierender Darstellung: Der Akteur muss dieselbe Ergebnismenge, die jedoch in abweichender Darstellungsform vorliegt, einmalig in eine transitive Relation bringen.

Auf diese Punkte wird nun kurz eingegangen. Im Fall **einfacher Transitivität** kann – neben dem oben skizzierten Problem der Fühlbarkeitsschwelle – bei großen Ergebnismengen oder bei Entscheidungen mit mehreren Zielen das Problem auftreten, dass nicht sämtliche Elemente erfasst und deshalb transitiv geordnet werden. Zusätzlich kann das Phänomen auftreten, dass die Reihenfolge der Gegenüberstellung von Alternativen über die Präferenzordnung entscheidet. Ein bekanntes Beispiel dafür ist das Condorcet-Paradox.[135]

Komplizierter ist die Erfüllung der Transitivität im Fall **sequenzieller Entscheidungen**. Wenn der Akteur zu unterschiedlichen Zeitpunkten seine Präferenzen festlegt, besteht die Gefahr, dass diese Präferenzen instabil bzw. widersprüchlich sind. Im Zusammenhang mit der **Zeitpräferenz** wird das Problem der zeitlichen Konsistenz von Entscheidungen ausführlich diskutiert.[136] Die Bedeutung von stabilen Präferenzen wird für sequenzielle Entscheidungen besonders hervorgehoben.[137]

Wenn die Präferenzen im Zeitablauf nicht stabil sind, können Ergebnisse entstehen, die – insgesamt betrachtet – intransitiv sind. Eine spezielle Konstellation in diesem Zusammenhang ist die sog. *„money pump“* bzw. *„Geldpumpe“*.[138] Dabei führt die Intransitivität sequenzieller Entscheidungen im Rahmen eines Zirkeltausches zu einem Vermögensverlust oder -zuwachs. Bekanntestes Beispiel dafür im deutschsprachigen Raum ist das Märchen vom *„Hans im Glück“*, dessen Tauschgeschäfte wie folgt aussahen:

$$\text{Gold} \prec \text{Pferd} \prec \text{Kuh} \prec \text{Schwein} \prec \text{Gans} \prec \text{Stein} \prec \text{Nichts} \succ \text{Gold}$$

Zur „Entschuldigung“ des Protagonisten sei erwähnt, dass er nicht sequenziell über dieselbe Alternativenmenge urteilen konnte/musste, sondern bei jeder Entscheidung neue Alternativen verfügbar waren. Das Beispiel verdeutlicht jedoch, wie wichtig die Restriktion ist, dass der Akteur seine Präferenzen sequenziell für dieselbe Alternativen- bzw. Ergebnismenge festlegen muss. Es existieren unterschiedliche Varianten von *„Geldpumpen“*. Auf diese wird hier jedoch nicht eingegangen, sondern stattdessen

[135] Vgl. Abschn. 3.2.3.2 auf S. 403.
[136] Vgl. Abschn. 1.7 auf S. 181.
[137] Vgl. Abschn. 1.9 auf S. 221.
[138] Vgl. Fishburn (1991: 116); Weikard (2001: 494); Kolmar (2017: 167–168).

wird auf die Literatur verwiesen.[139] Wichtig für die weitere Darstellung ist die Feststellung, dass dieser Effekt nur bei mehrstufigen Entscheidungen auftritt.[140] Dies wird an entsprechender Stelle wieder aufgegriffen.[141]

Ebenfalls problematisch ist die **Transitivität bei variierender Darstellung**. Von einem rationalen Problemlöser wird gefordert, dass er die Präferenzen transitiv festlegt, unabhängig davon, in welcher Art und Weise ihm das Problem präsentiert wird. Das wird in einigen Axiomensystemen explizit festgelegt.[142] In der Praxis ist diese Forderung jedoch nicht immer erfüllt. So tritt z. B. bei Entscheidungen unter Unsicherheit das Phänomen auf, dass die Art der Darstellungsform zu intransitiven Entscheidungen führt.

- **Stetigkeit:** Diese Forderung[143] ist als unproblematisch einzustufen. Jedoch gibt es auch Ordnungen, die diese Anforderung nicht erfüllen. Ein prominentes Beispiel für nicht stetige Präferenzen ist die lexikografische Präferenzordnung (vgl. Beispiel 1.2).[144]

Beispiel 1.2:

Die Präferenzordnung eines Akteurs ist lexikografisch, wenn er die Güter in der Reihenfolge absteigender Wertigkeit ordnet. Ein bekanntes Beispiel sind Medaillenspiegel bei Sportwettkämpfen. Die Präferenzordnung lautet üblicherweise Gold $\succ$ Silber $\succ$ Bronze. Teilnehmer 1 dominiert Teilnehmer 2 lexikografisch, d. h. $T_1 \succ_{Lex} T_2$ wenn gilt:

$$T_1 \succ_{Lex} T_2 \quad \begin{cases} \text{wenn } G_1 > G_2, \\ \text{wenn } G_1 = G_2 \text{ und } S_1 > S_2, \\ \text{wenn } G_1 = G_2 \text{ und } S_1 = S_2 \text{ und } B_1 > B_2. \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung wird das bisherige Beispiel verändert und verschiedene Medaillen-Kombinationen in einer zweidimensionalen Abbildung dargestellt (vgl. Abb. 1.8 a).

In dem Beispiel gilt Gold $\succ$ Silber, was zu folgender Präferenzordnung führt: $e_4 \succ e_2 \succ e_3 \succ e_1$. Eine solche Ordnung ist vollständig, transitiv und reflexiv, jedoch nicht stetig. Dies kann wie folgt erklärt werden:

- *Es wird deutlich, dass eine infinitesimal kleine Änderung in der Medaillen-Kombination eine Veränderung der Ordnung bewirkt. Erhält e_2 nur eine Gold-Medaille mehr, ändert sich die Ordnung zu $e_2 \succ e_4$. Selbst für den Fall beliebig teilbarer Güterbündel würde eine kleine Erhöhung des Gold-Anteils von e_2 zu einer entsprechenden Änderung führen. Andererseits führen selbst große Änderungen des Silber-Anteils, z. B. bei e_1 zu keiner Änderung der Ordnung. Selbst wenn der Silber-Anteil unendlich groß wäre, hätte dies keine Auswirkungen.*

---

[139] Vgl. Hansson (2018: 567–574).

[140] Vgl. Cubitt/Sugden (2001: 123–124).

[141] Vgl. Abschn. 1.9 auf S. 221.

[142] Vgl. z. B. für Entscheidungen bei Risiko das Axiom 1.2 auf S. 113.

[143] Vgl. Anf. 1.3.4 auf S. 32 sowie Def. 1.13 auf S. 33.

[144] Vgl. Debreu (1954: 164); Schneeweiß (1963: 190); Hens/Pamini (2008: 35).

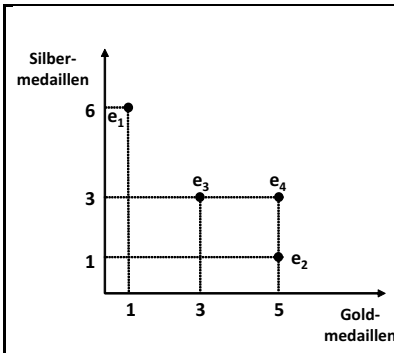


Abb. 1.8 a): Zweidimensionale Darstellung

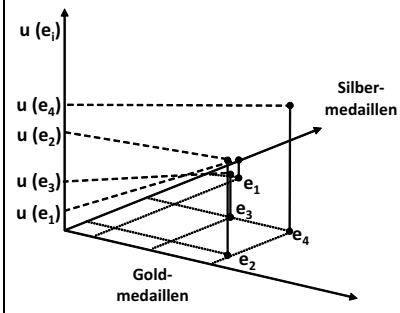


Abb. 1.8 b): Dreidimensionale Darstellung

Abb. 1.8: Lexikografische Präferenzen. Quelle: Eigene Darstellung.

- *Die mathematisch formulierte Begründung basiert auf dem Fakt, dass eine Menge, die mit einer lexikografischen Ordnung versehen wird, nicht abgeschlossen ist.*[145] *Das kann dazu führen, dass der Grenzwert einer Reihe aus Elementen dieser Menge selbst kein Element dieser Menge ist. Zur Erläuterung sei für das bisher diskutierte Beispiel angenommen, es handle sich um beliebig teilbare Gold- und Silbermengen mit der bekannten lexikografischen Präferenzordnung. Das Güterbündel* e_1 *beinhaltet die Kombination* (1,6)*, wohingegen das Güterbündel* e_2 *so verändert wird, dass es die Kombination* $(1+4/n,1)$ *enthält. Die Präferenzordnung ist bekannt:* $e_2 \succ e_1$*. Für das Bündel* e_2 *folgt jedoch der Grenzwert:* $\lim_{n\to\infty} e_2 = (1,1)$*. Die ursprüngliche Präferenzordnung* $e_2 \succ e_1$ *verändert sich nun zu* $e_1 \succ e_2$*.*

Es wird deutlich, dass lexikografische Präferenzen nicht mittels einer stetigen Nutzenfunktion erfasst werden können. Das bedeutet jedoch nicht, dass sie irrational sind. Die lexikografische Ordnung ist für multikriterielle Probleme anwendbar.[146] Lexikografische Präferenzen können lediglich nicht so elegant mathematisch erfasst werden. Im weiteren Verlauf wird ein Beispiel für lexikografische Präferenzen bei Risiko erläutert.[147]

Diese Ausführungen zeigen, welche praktischen Implikationen mit den grundsätzlichen, einfach erscheinenden Anforderungen an Präferenzen verbunden sein können. Im Hinblick auf die kardinal messbare Nutzenfunktion wurden mit den Eigenschaften

- Konsistenz,
- Äquivalenz,
- Stabilität,
- Lösbarkeit

[145] Vgl. Hülsmann et al. (2005: 23–24).
[146] Vgl. Abschn. 1.4.2 auf S. 51.
[147] Vgl. Bspl. 1.15 auf S. 143.

weitere Anforderungen formuliert.[148] Die **Konsistenz**-Forderung[149] ist unstrittig. Mit der Forderung nach **Äquivalenz**[150] soll sichergestellt werden, dass die Bewertung des Betrags von Nutzendifferenzen unabhängig von der Richtung ist. Demzufolge muss der Nutzenzuwachs um einen Differenzbetrag Δ ebenso positiv wertgeschätzt werden, wie ein Nutzenverlust um denselben Betrag negativ wertgeschätzt wird. Dass die **Stabilität**[151] die Transitivität von Differenzen beschreibt, wurde bereits erwähnt. Auf die Probleme von Akteuren in praktische Situationen zu transitiven Entscheidungen über Ergebniswerte zu gelangen, wurde bereits eingegangen. An dieser Stelle muss deshalb gefragt werden, wie das praktische Verhalten im ungleich komplizierteren Fall der Transitivität von Wertdifferenzen gestaltet ist.

Diese Anforderungen sind aus messtheoretischer Sicht erforderlich. Zu der Frage, ob und wie diese Postulate in der Praxis erfüllt sind, liegen keine Ergebnisse vor. Mit der **Lösbarkeit**[152] wird eine Eigenschaft der Alternativenmenge beschrieben und keine Anforderung an die Präferenzen formuliert. Es darf bezweifelt werden, dass – gerade bei einer geringen Anzahl an Alternativen – diese Forderung in der Praxis immer erfüllt ist. Im weiteren Verlauf wird dies an einem Beispiel demonstriert.[153] Es wird folgender Zielkonflikt offensichtlich: Je größer die Alternativenmenge ist, desto schwerer sind Vollständigkeit und Transitivität zu erfüllen. Gleichzeitig ist jedoch eine entsprechende Anzahl an Alternativen erforderlich, um die Lösbarkeit zu erfüllen.

1.4 Artenpräferenz - Einstufige Entscheidungen bei Sicherheit und mehreren Zielen

1.4.1 Einführung

Im weiteren Verlauf wird zwischen zwei Entscheidungssituationen und daraus resultierenden Modellklassen unterschieden:

- **Multi-Attribute-Decision-Making (MADM):** Es steht eine endliche Menge von Alternativen zur Auswahl, die klar voneinander abgegrenzt sind und sich gegenseitig ausschließen. Die Lösung für das Problem be-

[148] Vgl. Merksatz 1.4 auf S. 40.
[149] Vgl. Anf. 1.3.8 auf S. 38.
[150] Vgl. Anf. 1.3.9 auf S. 38.
[151] Vgl. Anf. 1.3.10 auf S. 39.
[152] Vgl. Anf. 1.3.11 auf S. 39.
[153] Vgl. Fortführung des Beispiels 1.4 auf S. 59.

steht in der Auswahl einer dieser Alternativen. Im weiteren Verlauf werden ausschließlich Situationen des MADM vorgestellt.

- **Multi-Objective-Decision-Making (MODM):** Ausgehend von einer Zielfunktion und einer Reihe von Nebenbedingungen muss eine Lösung gesucht werden. Es stehen keine Alternativen zur Auswahl, die Lösungsmenge ist demzufolge unendlich. Das ist die klassische Ausgangslage für Optimierungsverfahren. Dabei wird eine oder mehrere Ergebnisgrößen unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen minimiert oder maximiert. Auf diese Verfahren wird in diesem Werk nicht eingegangen.

Häufig werden in einem Unternehmen mehrere Ziele verfolgt. Demzufolge liegt ein Zielsystem vor, welches folgende Ansprüche zu erfüllen hat:

- **Realisierbarkeit und Durchsetzbarkeit:** Ziele sollen erreichbar und durchsetzbar sein, was im Rahmen von Prognosen zu überprüfen ist.
- **Operationalität:** Ziele müssen hinreichend präzise sein, d. h. Zielinhalt, angestrebtes Ausmaß, zeitlicher Bezug und erforderliche Präferenzen sind so konkret wie möglich festzulegen.
- **Ordnung:** Zwischen den einzelnen Zielen muss eine Hierarchie festgelegt werden, die beschreibt, welche Ziele über-, unter- oder gleichgeordnet sind.
- **Konsistenz:** Ziele sollten aufeinander abgestimmt und widerspruchsfrei sein, womit jedoch nicht ausgeschlossen wird, dass zwischen den Zielen Konflikte auftreten können.
- **Vollständigkeit:** Alle wichtigen Ziele sind in das Zielsystem aufzunehmen.
- **Organisationskongruenz:** Zielsystem und Organisationsstruktur sollen insoweit kongruent zueinander sein, dass die Ziele durch entsprechende Organisationseinheiten bearbeitet werden können, dass die Ziele nicht im Konflikt mit organisatorischen Gegebenheiten stehen und dass eine eindeutige sowie klare Zuordnung von Zielen zu Verantwortlichkeiten möglich ist.
- **Transparenz und Überprüfbarkeit:** Das Zielsystem muss verständlich, übersichtlich und überprüfbar sein.
- **Redundanzfreiheit:** Es ist sicherzustellen, dass nicht mehrere Ziele mit demselben Inhalt, jedoch unterschiedlichen Formulierungen in dem System enthalten sind.

Die Ziele des so entstandenen Zielsystems sind darauf hin zu überprüfen, in welcher Beziehung die angestrebten Zustände zueinander stehen. Stehen die Ziele in keinem Zusammenhang, handelt es sich um **Zielneutralität**. Wird durch die Erreichung eines Zieles auch die Erreichung eines anderen Zieles unterstützt, liegt **Zielkomplementarität** vor. Führen Maßnahmen zur Erreichung eines Zieles zu negativen Wirkungen auf die Erreichung eines anderen Zieles, liegt **Zielkonkurrenz** bzw. liegen **Zielkonflikte** vor. Im

Extremfall schließen sich die Ziele gegenseitig aus, was als **Zielantinomie** bezeichnet wird.[154]

Zur Lösung von Zielkonflikten bieten sich prinzipiell folgende Vorgehensweisen an:[155]

- **Zielunterdrückung:** Das als dominant erkannte Ziel wird unter Vernachlässigung der anderen Ziele minimiert bzw. maximiert, so dass Zieldominanz vorliegt.
- **Zielkompromiss:** Die Unterdrückung von Zielen (temporär oder dauerhaft) ist in den Unternehmen selten durchsetzbar bzw. sinnvoll, da i. d. R. mehrere Ziele verfolgt werden. Deshalb versucht der Akteur einen **Zielkompromiss** zu finden.
- **Anspruchsniveaufestlegung:** Neben diesen Vorgehensweisen kann für ein oder mehrere Ziele ein Erfüllungsgrad vorgegeben werden, der mindestens zu erreichen ist. Unter Berücksichtigung dieses Anspruchsniveaus kann ein dominantes Ziel verfolgt werden, so dass die Zielrestriktion folgt.

Die verschiedenen Zielkriterien können mit Blick auf die Kompensierbarkeit auch wie folgt unterteilt werden:

- **kompensierbares Kriterium:** Eine geringe Ausprägung dieses Kriteriums kann durch eine bessere Ausprägung eines anderen Kriteriums kompensiert werden. Jede beliebige Ausprägung, auch der Wert Null, ist zulässig.
- **Anspruchsniveau-Kriterium:** Wird ein definiertes Anspruchsniveau dieses Kriteriums über- oder unterschritten, wird die Alternative ausgeschlossen. Eine Kompensation mit anderen Kriterien ist nicht möglich. Durch die Festlegung von derartigen Mindeststandards kann die Vorauswahl strukturiert werden.
- **Ausschluss-Kriterium:** Es existieren einige Kriterien, die lediglich binär auf das Vorliegen einer positiven Ausprägung abgefragt werden können, wie z. B. das Vorliegen einer notwendigen Zertifizierung. Das Nicht-Vorliegen des Merkmals führt zum Ausschluss vom weiteren Verfahren. Eine Kompensation ist ebenfalls nicht möglich.

Bei Entscheidungsproblemen in der Praxis erfolgt i. d. R. eine Vorprüfung der Alternativen hinsichtlich Ausschluss- bzw. Anspruchsniveau-Kriterien. Diejenigen Alternativen, die diese Vorauswahl bestehen, werden eingehender geprüft. Im weiteren Verlauf wird von einer bereits erfolgten Vorprüfung ausgegangen. Für die weiteren Darstellungen werden folgende Notationen und Annahmen verwendet:

- Die endliche, nicht leere Aktionenmenge $A = \{a_1, ..., a_m\}$ ist gegeben durch m Alternativen a_i mit $i = 1,....,m$, die sich gegenseitig ausschließen.

[154] Vgl. Wild (1974: 63–64); Klein/Scholl (2011: 100).

[155] Vgl. Bitz (1981: 29).

- Die endliche, nicht leere Menge an Teilzielen $K = \{k_1,...,k_l\}$ ist gegeben mit $k_r \in K$.
- Jede Alternative a_i führt bei jedem Teilziel k_r mit Sicherheit zu einem bekannten Ergebnis e_{ir}.
- Die Ergebnisse sämtlicher Alternativen und Teilziele treten zu einem identischen Zeitpunkt ein.
- So entsteht die multikriterielle **Ergebnismatrix** (vgl. Tab. 1.8).

Tab. 1.8: Grundstruktur der multikriteriellen Ergebnismatrix bei Sicherheit. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 26).

Aktion \ Teilziel	$\mathbf{k_1}$	$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_3}$	$\cdots$	$\mathbf{k_l}$
$\mathbf{a_1}$	e_{11}	e_{12}	e_{13}	$\cdots$	e_{1l}
$\mathbf{a_2}$	e_{21}	e_{22}	e_{23}	$\cdots$	e_{2l}
$\mathbf{a_3}$	e_{31}	e_{32}	e_{33}	$\cdots$	e_{3l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\mathbf{a_m}$	e_{m1}	e_{m2}	e_{m3}	$\cdots$	e_{ml}

- Bisher – bei Vorliegen von lediglich einem Ziel – wurden die Präferenzrelationen auf der Ergebnismenge E beschrieben. Für die nun folgende Betrachtung der endlichen Anzahl von l Zielen ist jedoch das l-dimensionale kartesische Produkt $E_1 \times E_2 \times ... \times E_l$ relevant. E_1 ist die Menge der Ergebnisse der Alternativen im Teilziel 1, E_2 ist die Menge der Ergebnisse der Alternativen im Teilziel 2 usw.
- Die Alternativen werden als Vektoren der Ausprägung bzw. Ergebnisse der verschiedenen Teilziele notiert, so dass $a_i = (e_{i,1}, e_{i,2},...,e_{i,l})$.[156] Die folgenden Darstellungen – und damit die gesamte Theorie additiver Präferenzfunktionale – beziehen sich auf das vollständige kartesische Produkt $E^l = E_1 \times E_2 \times ... \times E_l = \prod_{r=1}^{l} E_r$.[157]
- Neben der Berücksichtigung der Gesamtmenge der Teilziele K ist es möglich bzw. erforderlich, lediglich Teilmengen (z. B. X, Y oder Z) zu betrachten. Um die Teilmengen zu unterscheiden, wird die endliche Menge der Teilzielindizes bezeichnet mit $L = \{1,2,3,...,l\}$ und eine Teilmenge davon $I \subseteq L$ definiert. Die Menge $X = \prod_{r \in I} E_r$ beschreibt eine nichtleere Teilmenge und $Y = \prod_{r \notin I} E_r$ stellt die Komplementärmenge $Y = E^l \backslash X$ dar.

[156] Vgl. Krantz et al. (1971: 247); French (1988: 103); Wakker (1989: 27); Takemura (2019: 157–158).

[157] Vgl. Krantz et al. (1971: 311).

- Der Akteur muss mit einer einstufigen Entscheidung aus der endlichen Menge an Handlungsmöglichkeiten die optimale Alternative herausfiltern.

Wichtig ist der Hinweis darauf, dass der Ausgangspunkt der Betrachtung in Tab. 1.8 eine **Ergebnismatrix** darstellt, die in eine **Entscheidungs- bzw. Nutzenmatrix** umzuwandeln ist. Dafür sind folgende wichtige Fragen zu beantworten:[158]

- Welchen Nutzen haben die Ergebnisse der verschiedenen Teilziele für den Akteur?
- In welcher Relation stehen die Nutzenwerte der verschiedenen Teilziele aus Sicht des Akteurs?
- Können diese Teilnutzen zu einem Gesamtnutzen zusammengefasst werden? Und wenn ja, wie?
- Welche Anforderungen müssen die Präferenzen des Akteurs für eine solche Zusammenfassung erfüllen?

Der **erste Schritt** zur Lösung eines multikriteriellen Entscheidungsproblems besteht in der Umwandlung der Ergebnismatrix in eine Nutzenmatrix bzw. Entscheidungsmatrix. Dabei muss für jedes Teilziel $k_r \in K$ eine Nutzenfunktion bekannt sein oder ermittelt werden, so dass folgt: $u_{ir} = u(e_{ir})$.[159] Mit dieser Funktion wird also die **Höhenpräferenz** des Akteurs abgebildet. Das diesbezügliche Vorgehen wurde bereits ausführlich erläutert.[160] Dies wirft die Frage nach der Gestalt der Nutzenfunktionen auf. Für positive ökonomische Werte (z. B. Gewinn, Umsatz oder Kapitalwert) mag diese Funktion einfach zu bestimmen sein. Für qualitative Kriterien ist dies jedoch nicht so einfach möglich. Anhand eines Beispiels wird dies später detailliert erläutert.[161]

In diesem Zusammenhang muss das Skalenniveau der Nutzenfunktion festgelegt werden. Es wurde bereits ausführlich auf die drei möglichen Typen von Nutzenfunktionen eingegangen:

- ordinale Nutzenfunktion,[162]
- kardinale Nutzenfunktion[163] und
- kardinal messende Nutzenfunktion.[164]

Jedes dieser Niveaus stellt andere Anforderungen an die Präferenzen des Akteurs, welche an entsprechender Stelle bereits diskutiert wurden.[165]

[158] Vgl. Abb. 1.1 auf S. 4.
[159] Vgl. Def. 1.2 auf S. 16.
[160] Vgl. Abschn. 1.3 auf S. 25.
[161] Vgl. Abschn. 1.4.3.4 auf S. 77.
[162] Vgl. Def. 1.5 auf S. 20.
[163] Vgl. Def. 1.7 auf S. 22.
[164] Vgl. Def. 1.8 auf S. 22.
[165] Vgl. Abschn. 1.3.2 auf S. 28.

Der **zweite Schritt** besteht in der Überprüfung der Alternativenmenge auf **ineffiziente Alternativen**. Eine Alternative ist dann effizient, wenn sie von anderen Alternativen dominiert wird. In diesem Zusammenhang werden verschiedene Arten von Dominanz unterschieden. Eine Form ist die **absolute Dominanz** (vgl. Def. 1.14).[166]

Definition 1.14: *Gegeben ist die Zielmenge* $K = \{k_1, k_2, ..., k_l\}$ *mit* $k_r \in K$ *und die Alternativenmenge A. Eine Aktion* $a_1 \in A$ *heißt genau dann absolut dominant in Bezug auf K und* $a_2 \in A$*, wenn gilt:* $\min_r u_{1r} \geq \max_r u_{2r}$.

Das bedeutet, das Ergebnis mit dem geringsten Nutzenwert der Alternative 1 in sämtlichen Teilzielen ist nicht kleiner als das Ergebnis mit dem höchsten Nutzen der Alternative 2 in sämtlichen Teilzielen. Absolut dominierte Alternativen können aus der weiteren Analyse ausgeschlossen werden. Eine weitere Form ist die Dominanz nach Def. 1.15.[167]

Definition 1.15: *Gegeben ist die Zielmenge* $K = \{k_1, k_2, ..., k_l\}$ *mit* $k_r \in K$ *und die Alternativenmenge A mit* $a_i \in A$*. Eine Aktion* $a_n \in A$ *heißt genau dann effizient bezüglich A und K, wenn es keine Aktion* $a_q \in A$ *gibt, für welche gilt:*[168]

a) $u_{qr} \geq u_{nr} \; \forall \; r = 1, ..., l$
sowie
b) $u_{qr} > u_{nr}$ *für mindestens ein r.*

Wenn es eine Aktion $a_q \in A$ gibt, welche diese beiden Kriterien erfüllt, so dominiert a_q die Alternative a_n. Die Alternative a_n kann aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden.

Offensichtlich impliziert die absolute Dominanz nach Def. 1.14 die Dominanz nach Def. 1.15. Die Umkehrbeziehung gilt dagegen nicht. Wenn eine Alternative dominiert wird, ist sie **ineffizient**. Ineffiziente Alternativen können aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden. Für das **Goal-Programming**[169] kann keine dieser Dominanz-Überprüfungen durchgeführt werden. Für die weiteren Darstellungen wird das Beispiel 1.3 eingeführt und es wird die Effizienzprüfung erläutert.

Beispiel 1.3:

Für die weiteren Darstellungen wird das Beispiel aus Tabelle 1.9 eingeführt. Die unterstellte Nutzenfunktion lautet: $u(e_{ir}) = e_{ir}$.

---

[166] Vgl. Bitz (1981: 21); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 108).
[167] Vgl. Bitz (1981: 21); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 51).
[168] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 51).
[169] Vgl. Abschn. 1.4.3.7 auf S. 95.

Tab. 1.9: Beispielhafte Entscheidungsmatrix bei mehrfacher Zielsetzung. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion \ Teilziel	k_1	k_2	k_3	$\min_r u_{ir}$	$\max_r u_{ir}$
a_1	10	20	16	10	20
a_2	14	19	18	14	19
a_3	15	19	15	15	19
a_4	15	13	15	13	15
a_5	16	18	12	12	18

Wird die Alternativenmenge auf absolute Dominanz hin untersucht, so kann Folgendes festgestellt werden: Nach Def.1.14 wird Alternative a_4 von a_3 absolut dominiert. Die Prüfung auf Dominanz nach Def. 1.15 zeigt dasselbe Ergebnis. Alternative a_4 wird durch a_3 dominiert, da: $u_{3r} > u_{4r}$ für $r = 2$ sowie $u_{3r} = u_{4r}$ für $r = 1$ und $r = 3$. Sämtliche anderen Alternativen sind effizient.

Im **dritten Schritt** muss die **Artenpräferenz** festgelegt werden. Zur Lösung stehen **nicht-kompensatorische** und **kompensatorische** Verfahren zur Auswahl. **Kompensatorische Verfahren** gehen davon aus, dass die geringe Ausprägung eines Teilziels durch eine bessere Ausprägung eines anderen Teilziels kompensiert werden kann. **Nicht-kompensatorische** Verfahren hingegen verwenden diese Annahme nicht. Es werden folgende Verfahren bzw. Theorien vorgestellt:

- lexikografische Ordnung (Abschn. 1.4.2),
- KÖRTH-Regel (Abschn. 1.4.2),

} Nicht-kompensatorische Verfahren

- multiattributive Nutzentheorie (Abschn. 1.4.3.4),
- Nutzwertanalyse (Abschn. 1.4.3.5),
- analytischer Hierarchieprozess (Abschn. 1.4.3.6),
- Goal-Programming (Abschn. 1.4.3.7).

} Kompensatorische Verfahren

Im ersten Schritt werden die nicht-kompensatorischen Modelle vorgestellt.

1.4.2 Nicht-kompensatorische Verfahren

Lexikografische Ordnung:

Bei diesem Verfahren wird im ersten Schritt eine Rangordnung der Ziele gebildet und im Anschluss daran werden die Alternativen lediglich hinsichtlich ihres Erfüllungsgrades des Zieles der ersten Ordnung beurteilt. Existiert auf der Ebene der Ziele der ersten Ordnung keine relativ vorteilhafte Alternative, wird der Vergleich auf den nachrangigen Ebenen fortgesetzt, bis eine vorteilhafte Alternative identifiziert ist. Allgemeingültig werden l Ziele

$k_r (r = 1,....,l)$ betrachtet. Diese Ziele werden vom Akteur in der **Reihenfolge absteigender Wichtigkeit** geordnet, so dass k_1 das wichtigste Ziel, k_2 das zweitwichtigste Ziel und k_l das unwichtigste Ziel darstellt. Die Ergebnisse der Alternative a_A werden entsprechend der Wichtigkeit der Ziele geordnet in $u_{A;1}, u_{A;2},...,u_{A;l}$ und die Ergebnisse der Alternative a_B werden geordnet in $u_{B;1}, u_{B;2},...,u_{B;l}$. Die Alternative a_A ist lexikografisch kleiner bzw. gleich a_B, wenn gilt:[170]

$(u_{A;1},u_{A;2},...u_{A;l}) = (u_{B;1},u_{B;2},...u_{B;l})$

oder $(u_{A;1}) < (u_{B;1})$

oder $(u_{A;1}) = (u_{B;1})$ *und* $(u_{A;2}) < (u_{B;2})$

oder $(u_{A;1}) = (u_{B;1})$ *und* $(u_{A;2}) = (u_{B;2})$ *und* $(u_{A;3}) < (u_{B;3})$

oder ...

oder $(u_{A;1}) = (u_{B;1})$ *und* ... *und* $(u_{A;l-1}) = (u_{B;l-1})$ *und* $(u_{A;l}) < (u_{B;l})$

Dieses Vorgehen wird nun kurz erläutert.

Fortführung des Beispiels 1.3 von S. 50:

Für die Entscheidungsmatrix des Beispiels wird folgende Zielordnung unterstellt: $k_2 \succ k_3 \succ k_1$. Damit ist Alternative a_1 die optimale Alternative. Auf Rang zwei folgt Alternative a_2, die zwar beim Ziel k_2 denselben Zielerreichungsgrad wie Alternative a_3 aufweist, jedoch bei dem nächstwichtigen Ziel k_3 einen höheren Nutzen erreicht. Demzufolge folgen a_3 und a_5 auf den nächsten Positionen.

Es wird deutlich, dass die Wahl der optimalen Alternative von der festgelegten Rangordnung der Teilziele abhängig ist. Das Verfahren basiert auf einer lexikografischen Präferenzordnung. Auf die Unmöglichkeit der Abbildung solcher Ordnungen mittels einer stetigen Nutzenfunktion wurde bereits hingewiesen.[171] Geeignet ist das Verfahren deshalb primär für Probleme, bei denen lediglich ordinal-skalierte Informationen über die Relevanz der Teilziele vorliegen. Da keine Kompensation zwischen den unterschiedlichen Erfüllungsgraden bei allen Teilzielen erfolgt, nutzt das Verfahren nicht sämtliche vorliegende Informationen.

Körth-Regel:[172]

Dieser Ansatz wurde 1969 entwickelt[173] und entspricht dem Minimax-Kriterium unter Unsicherheit, weshalb er auch als Maximierung des minimalen Ziel-

[170] Vgl. Henze/Last (2005: 53). Vgl. auch die Verwendung der lexikografischen Ordnung im Rahmen der kooperativen Spieltheorie im Abschnitt 4.5.3 auf S. 506.

[171] Vgl. Bspl. 1.2 auf S. 43.

[172] Benannt nach deren Begründer Heinz Körth.

[173] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 54–55).

erreichungsgrades bezeichnet wird.[174] In einem ersten Schritt wird für jedes Teilziel k_r diejenige Alternative ermittelt, die das Maximum in Bezug auf dieses Teilziel $max_h\, u_{hr}$ erreicht. Im nächsten Schritt werden die Resultate der übrigen Alternativen in Relation zu diesem Wert gesetzt.

Es resultiert: $\frac{u_{ir}}{max_h\, u_{hr}}$. Im Anschluss wird dasjenige Teilziel ermittelt, bei dem jede Alternative den minimalen Wert dieses Quotienten erzielt, d. h. $\min\limits_r \left(\frac{u_{ir}}{max_h\, u_{hr}}\right)$. Das Maximum dieser minimalen Quotienten definiert im letzten Schritt die optimale Alternative. Die optimale Alternative a_{opt} ergibt sich aus E.-regel 1.2.[175]

Entscheidungsregel 1.2: *Bei Anwendung der* KÖRTH*-Regel ist diejenige Alternative* $a_{opt} \in A$ *optimal, für die gilt:* $\Phi(a_{opt}) = \max\limits_i \left[\min\limits_r \left(\frac{u_{ir}}{max_h\, u_{hr}}\right)\right]$.

Die Anwendung dieser Regel wird im folgenden Beispiel demonstriert.

Fortführung des Beispiels 1.3 von S. 50:

Mit den Eingangsdaten des Beispiels ergeben sich die Werte in Tabelle 1.10.

Tab. 1.10: Anwendungsbeispiel der KÖRTH-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.9 auf S. 51.

Alternative	Teilziele			Funktional: $\min\limits_r \left(\frac{u_{ir}}{max_h\, u_{hr}}\right)$	
	k_1	k_2	k_3		
a_1	$\frac{10}{16}$	$\frac{20}{20}$	$\frac{16}{18}$	$\mathbf{\frac{10}{16} = 0{,}625}$	
a_2	$\frac{14}{16}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{18}{18}$	$\mathbf{\frac{14}{16} = 0{,}875}$	$\Leftarrow$ **max**
a_3	$\frac{15}{16}$	$\frac{19}{20}$	$\frac{15}{18}$	$\mathbf{\frac{15}{18} \approx 0{,}833}$	
a_5	$\frac{16}{16}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{12}{18}$	$\mathbf{\frac{12}{18} \approx 0{,}667}$	

Die optimale Alternative gemäß der KÖRTH*-Regel ist demzufolge die Alternative* a_2.

Während diese Regel im betrachteten Beispielfall plausibel erscheint, lassen sich Situationen konstruieren, in denen diese Plausibilität nicht mehr gegeben ist. Dazu sei das Beispiel in Tabelle 1.11 betrachtet.

[174] Vgl. Abschn. 1.6 auf S. 160.

[175] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 54).

Tab. 1.11: Modifiziertes Anwendungsbeispiel der KÖRTH-Regel. Quelle: Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 55).

Alternative	**Teilziele**				**Funktional:** $\min_r \left(\frac{u_{ir}}{\max_h u_{hr}} \right)$	
	k_1	k_2	k_3	k_4		
Ausgangsdaten						
a_1	1	1000	1000	1000		
a_2	1001	1	1	1		
⇒ Das führt zu den folgenden Ergebniswerten						
a_1	$\frac{1}{1001}$	1	1	1	$\frac{1}{1001}$	
a_2	1	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	⇐ **max**

Die Feststellung der Alternative a_2 als optimale Alternative der KÖRTH-Regel ist vor dem Hintergrund, dass diese Alternative in Bezug auf das Maximum im Ziel k_1 nur unwesentlich besser ist als die Alternative a_1, die jedoch in Bezug auf die drei anderen Teilziele eine bessere Ausprägung besitzt, fraglich.

1.4.3 Kompensatorische Verfahren

1.4.3.1 Einführung

Es wurde bereits dargelegt, dass kompensatorische Verfahren auf der Annahme beruhen, eine geringe Ausprägung eines Teilziels durch eine bessere Ausprägung eines anderen Teilziels zu kompensieren.[176] Damit können die verschiedenen Teilziele additiv zu einer Gesamtgröße verknüpft werden. Eine ganze Reihe von Verfahren der multikriteriellen Entscheidungsfindung wurde auf der Basis der Wertaddition entwickelt, wie z. B. die multiattributive Nutzentheorie, die Nutzwertanalyse der analytische Hierarchieprozess. Aber auch im Rahmen der Produktentwicklung wird auf die theoretischen Grundlagen des additiven Nutzens zurückgegriffen, z. B. bei der Conjoint-Analyse.[177]

Alle diese Verfahren basieren auf meßtheoretischen Grundlagen, die im nächsten Abschnitt als **Theorie des additiven Nutzens** zusammengefasst sind. Damit wird die Basis für die detaillierte Vorstellung der einzelnen Verfahren geschaffen.

[176] Vgl. Abschn. 1.4.1 auf S. 45.

[177] Vgl. Müller (2020: 289–290).

1.4.3.2 Axiome rationalen Handelns

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist ein Rückblick.[178] In diesem wurde der Begriff des Präferenzfunktionals und der Unterschied zur Nutzenfunktion erläutert. Diese definitorischen Grundlagen werden hier wieder aufgegriffen und folgendermaßen spezifiziert:

- Für jedes Teilziel r existiert eine Nutzenfunktion $u_r(e_r)$, die den Ergebnissen der verschiedenen Alternativen jeweils einen Nutzenwert zuweist.[179] Damit kann die Höhenpräferenz erfasst werden.
- Diese Funktionen können durch ein ordnungstreues Präferenzfunktional[180] aggregiert werden, welches die Artenpräferenz abbildet.

In diesem Zusammenhang wird synonym für das Präferenzfunktional der Begriff der Wertfunktion (*value function*), der messbaren Wertfunktion (*measurable value function*), Gesamtnutzenfunktion oder auch der Präferenzfunktion verwendet.[181] Aus Konsistenzgründen werden diese Begriffe hier nicht verwendet.

Die im Folgenden dargestellte Vorgehensweise zur Entwicklung des Präferenzfunktionals besteht in der Formulierung von Anforderungen an die Präferenzen des Akteurs. Um die folgenden Darstellungen möglichst einfach zu halten, werden lediglich additive Funktionale betrachtet und darauf hingewiesen, dass auch andere Formen, z. B. multiplikative oder multilineare Funktionale, möglich sind. Es stellt sich die Frage, welche Anforderungen die Präferenzen erfüllen müssen, damit ein additives Funktional entsprechend Definition 1.16 existiert.[182]

Definition 1.16: *Das Präferenzfunktional einer Alternative bei mehrfacher Zielsetzung $\Phi(a)$ ergibt sich aus der Summe der Nutzenwerte u_r der Ergebnisse e_r sämtlicher l Teilziele wie folgt:* $\Phi(a) = \sum_{r=1}^{l} u_r(e_r)$.

Damit eine solche additive Zusammenfassung möglich ist, müssen die Präferenzen bestimmte Anforderungen erfüllen. Dies kann mit der Eigenschaft und der Messbarkeit der Teilziele wie folgt erklärt werden: Jedes Teilziel kann auf einer Ursprungsskala gemessen werden, wie z. B. Entfernungskilometer, Arbeitnehmeranzahl, Temperatur, Grundstücksgröße, Kaufpreis. Ausgehend von dieser Ursprungsskala bringt der Akteur die zur Verfügung stehenden

[178] Vgl. Abschn. 1.2 auf S. 8.

[179] Vgl. Def. 1.2 auf S. 16.

[180] Vgl. Def. 1.3 auf S. 16.

[181] Vgl. Dyer/Sarin (1979); Schneeweiß (1991: 98); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 111); Klein/Scholl (2011: 109).

[182] Vgl. Krantz et al. (1971: 302); French (1988: 103); Keeney/Raiffa (1993: 116); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 57).

Alternativen in eine Reihenfolge, so dass eine Bewertungsskala entsteht. Auf Basis dieser relativen Bewertungen wird der Nutzen der Ausprägung der Teilziele ermittelt. Schlussendlich erfolgt eine Zusammenfassung dieser Ausprägungen.

Es wurden an anderer Stelle bereits Anforderungen an Präferenzen beschrieben, die für eine mathematische Modellierung stetiger Nutzenfunktionen bei einfacher Zielsetzung gelten.[183] Nun soll geklärt werden, welche Anforderungen für die Abbildung eines additiv zusammengesetzten Funktionals zu beachten sind. Mit den folgenden Ausführungen sollen die Bedingungen für die Existenz einer additiven Präferenzstruktur offengelegt werden. Im englischsprachigen Bereich wird dies unter dem Begriff *„conjoint measurement“* subsumiert.

Die Betrachtung des gesamten kartesischen Produktes E^l ist eine Implikation der mathematischen Grundlagen, jedoch sind aus praktischer Sicht oftmals lediglich Teilmengen von Interesse oder existent. Zur Veranschaulichung dient Beispiel 1.4.

Beispiel 1.4:

Es wird der Fahrzeugkauf mit vier Teilzielen Beschleunigung (B), Größe (G), Leistung (L) und Ausstattung (A) betrachtet. Diese Eigenschaften liegen in den Ausprägungen $B\,[m/s^2] = \{9, 3, 3/2\}$,[184] $G = \{klein,\ mittel,\ groß\}$, $L\,[PS] = \{50,\ 100,\ 150\}$ *und* $A = \{einfach,\ gediegen,\ luxuriös\}$ *vor. Dann folgt die Anzahl der Elemente der Ergebnismenge* $|E| = |A| \cdot |B| \cdot |G| \cdot |L|$ *mit 81 geordneten Paaren. Für jede dieser Kombinationen muss sichergestellt werden, dass diese in der Realität existiert. Jedoch ist es fraglich, ob es ein großes, luxuriös ausgestattetes Fahrzeug mit lediglich 50 PS gibt und ob es ein solches Fahrzeug gibt, welches eine Beschleunigung von 9* m/s^2 *aufweist.*

Ausgangspunkt der weiteren Analyse sind die bereits vorgestellten grundsätzlichen Annahmen rationaler Präferenzen für Entscheidungen bei einfacher Zielsetzung.[185] Diese Eigenschaften werden nun vorausgesetzt und im weiteren Verlauf als die *“Axiome rationaler eindimensionaler Entscheidungen“* bezeichnet (vgl. Def. 1.17).[186]

Definition 1.17: *Für jedes Teilziel* $k_r \in K$ *erfüllt die Präferenzrelation* $\succsim$ *auf* E_r *folgende Axiome rationaler eindimensionaler Entscheidungen: Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität (Axiome 1.3.1 bis 1.3.3), Stetigkeit (Axiom 1.3.4) und Monotonie (Axiom 1.3.5).*

---

[183] Vgl. Abschn. 1.3.2 auf S. 28.

[184] Hinweis: Ein Wert von 9 m/s² entspricht einer Beschleunigung von 0 km/h auf 100 km/h in ca. 3 Sekunden.

[185] Vgl. Abschn. 1.3.2 auf S. 28, insbes. Merksatz 1.3 auf S. 35.

[186] Vgl. Fishburn (1979: 32–38).

Für jedes Teilziel erfüllen die Präferenzen also die Anforderungen des rationalen Entscheidens. Nun stellt sich die Frage, ob und wie die verschiedenen Teilnutzen-Dimensionen entsprechend Definition 1.16 zusammengefasst werden können. Kompensatorische Verfahren setzen voraus, dass für den Akteur eine geringere Ausprägung des Teilziels durch eine bessere Ausprägung eines anderen Teilziels kompensiert werden kann.

Mit der Annahme der additiven Präferenzstruktur wird demzufolge die **Substituierbarkeit der Teilziele** vorausgesetzt. Damit kann Merksatz 1.5 formuliert werden.

Merksatz 1.5 (Kompensation): *Wenn für den Akteur die Teilziele kompensatorischer Natur sind, so müssen für jedes Paar von Teilzielen Indifferenzkurven und Grenzraten der Substitution existieren.*

Im Folgenden werden Anforderungen an Präferenzen vorgestellt, die zusätzlich zu den in Def. 1.17 genannten Axiomen erforderlich sind. Anders ausgedrückt: Es wird gezeigt, welche Anforderungen die Präferenzen des Akteurs erfüllen müssen, so dass die Einzelnutzenfunktionen durch ein additives Funktional zusammengefasst werden können. Zu Beginn sind zwei Restriktionen einzuführen, die die Lage und Existenz der Indifferenzkurven betreffen.

a) Wesentlichkeit:

Es muss sichergestellt werden, dass keine Teilziele enthalten sind, die für die Präferenzordnung des Akteurs irrelevant sind.[187] Dies wird mit dem Begriff „Wesentlichkeit“ beschrieben (vgl. Anf. 1.4.1).

Anforderung 1.4.1 (Wesentlichkeit): *Die l Teilziele sind wesentlich für die Präferenzordnung auf E^l, wenn für jedes $k_r \in K$ ein $e_{1,r}$ und ein $e_{2,r} \in E_r$ sowie ein $e_3 \in E_{K\setminus\{k_r\}}$ existieren, so dass gilt:* $(e_{1,r}; e_3) \succ (e_{2,r}; e_3)$.

Es dürfen nur wesentliche Teilziele enthalten sein. Diese Forderung erscheint auf den ersten Blick trivial. Jedoch ist es bei Existenz von vielen Teilzielen durchaus vorstellbar, dass die Erfüllung von $l-1$ Teilzielen dazu führt, das ein Teilziel letztlich irrelevant ist. Eine grundlegende Arbeit zur Theorie des additiven Nutzens stammt wiederum von Debreu. Darin wird darauf hingewiesen, dass mindestens drei Teilziele wesentlich sein müssen.[188] Damit wird vermieden, dass Neutralität zwischen den Teilzielen existiert, so dass die Indifferenzkurven parallel zu den Achsen verlaufen. Die Wesentlichkeit der Teilziele sichert die Existenz eines additiven Funktionals. Es kann gezeigt werden, dass bei Erfüllung sämtlicher (bisher aufgeführter und noch

[187] Vgl. Wakker (1988: 424); Wakker (1991: 505–506); Fishburn/Edwards (1997: 147); Bleichrodt/Quiggin (1999: 705).

[188] Vgl. Debreu (1960: 21).

folgender) Axiome, aber Nichterfüllung der Wesentlichkeit, die Präferenzen nicht abgebildet werden können.[189]

Die folgende Axiomatik ist auf Entscheidungssituationen mit **mindestens drei Teilzielen** ausgerichtet, die alle **wesentlich** sind.[190]

b) Begrenzte Lösbarkeit:

Die kompensatorische Natur der Teilziele erfordert die Existenz von Indifferenzkurven zwischen den Teilzielen. Bei der Darstellung der grundlegenden Axiome rationalen Verhaltens wurde die Lösbarkeit als eine Anforderung an die Präferenzen bzw. an die Alternativenmenge vorgestellt.[191] Jede Wertdifferenz muss durch eine geeignete Alternative abbildbar sein, die Alternativenmenge muss möglichst dicht sein. Dies ist auch für multikriterielle Probleme zu fordern, wobei jedoch eine etwas schwächere Form, die sog. **begrenzte Lösbarkeit** erforderlich ist (vgl. Anf. 1.4.2).[192]

Anforderung 1.4.2 (Begrenzte Lösbarkeit): *Die Relation* $\succsim$ *auf* $E^l = X \times Y$ *erfüllt die Bedingung der begrenzten Lösbarkeit, wenn für alle* $\overline{x}, x, \underline{x} \in X$ *und* $y_1, y_2 \in Y$ *mit:* $(\overline{x},y_1) \succsim (x,y_2) \succsim (\underline{x},y_1)$ $\exists\, x^* \in X$*, so dass gilt:* $(x^*,y_1) \sim (x,y_2)$.

Mit dieser Eigenschaft soll sichergestellt werden, dass sämtliche Ausprägungen für jedes Paar von Teilzielen in einer Indifferenzkurve abgebildet werden können (vgl. Abb. 1.9 a).

Zur Erklärung kann ein Akteur herangezogen werden, dem mehrere Bündel der beliebig teilbaren Güter (x,y) mit unterschiedlichen Mengen zur Auswahl stehen. Wenn für ihn gilt: $(\overline{x},y_1) \succ (x,y_2) \succ (\underline{x},y_1)$, so muss es eine Menge x^* mit $\underline{x} < x^* < \overline{x}$ geben, so dass folgt: $(x^*,y_1) \sim (x,y_2)$ (vgl. Abb. 1.9 b). Die Relation $(x^*,y_1) \sim (x,y_2)$ liefert auch die Erklärung für die Bezeichnung der Bedingung: Wenn drei Ausprägungswerte bekannt sind, muss es möglich sein, daraus den vierten fehlenden Wert zu ermitteln. Die Ausprägung der Teilziele bei den einzelnen Alternativen muss demzufolge die Konstruktion beliebig vieler Indifferenzkurven ermöglichen.

Abb. 1.9 a) macht deutlich, dass das Lösbarkeits-Axiom allein keine rationalen Präferenzen sicherstellt. Erst in Ergänzung zu den übrigen Axiomen resultiert die bekannte Darstellung (vg. 1.9 b). Die Bedeutung der Wesent-

[189] Vgl. Roberts (1985: 229).

[190] Liegen lediglich zwei wesentliche Teilziele vor, ist die Eigenschaft der wechselseitigen Unabhängigkeit (vgl. Axiom 1.4.4 auf S. 61) durch die Thomson-Bedingung zu ersetzen. Vgl. Krantz et al. (1971: 256); French (1988: 116); Nitzsch (1992: 50–52).

[191] Vgl. Anf. 1.3.11 auf S. 39.

[192] Vgl. Krantz et al. (1971: 256); French (1988: 114); Wakker (1988: 424); Pomerol/Barba-Romero (2000: 154); Takemura (2019: 161).

lichkeit und Lösbarkeit wird im Zusammenhang mit der Ermittlung der Skalierungskonstanten zu einem späteren Zeitpunkt deutlich.[193]

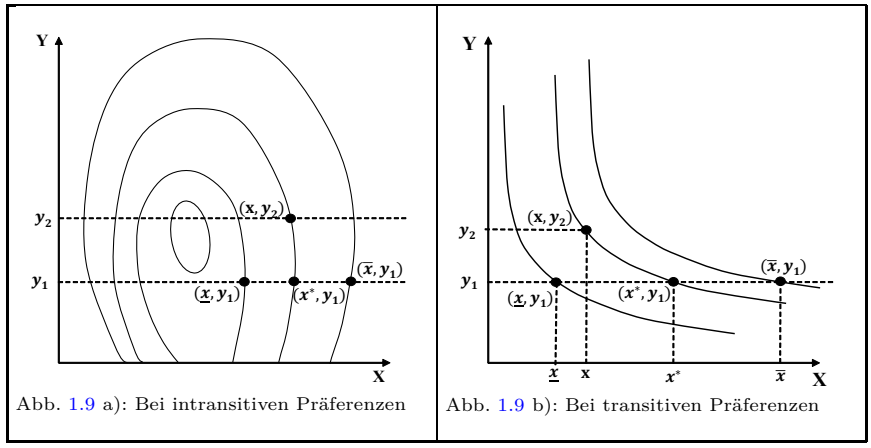


Abb. 1.9 a): Bei intransitiven Präferenzen

Abb. 1.9 b): Bei transitiven Präferenzen

Abb. 1.9: Indifferenzkurven und begrenzte Lösbarkeits-Axiom. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: French (1988: 114); Pomerol/Barba-Romero (2000: 154); Takemura (2019: 163).

Die Fortführung des Beispiels 1.4 zeigt, dass jedoch kritisch gefragt werden muss, ob die Lösbarkeits-Anforderung immer erfüllbar ist.

Fortführung des Beispiels 1.4:

Es wird wiederum der Fahrzeugkauf mit vier Teilzielen Beschleunigung (B), Größe (G), Leistung (L) und Ausstattung (A) betrachtet. Werden nun z. B. die Teilziele „Größe" als X und „Leistung" als Y betrachtet, so ist es fraglich, ob es eine Größe x^* gibt, welche zur Indifferenz der unterschiedlichen Leistungen führt. Die Lösbarkeitsbedingung fordert, dass es ebenso viele Größen-Klassen wie Leistungen gibt. So sind zwar die Eigenschaften „Beschleunigung" und „Leistung" fast stetig variierbar, nicht jedoch die Eigenschaft „Größe".

Besonders bei Eigenschaften, die lediglich binär ausgeprägt sind, ist die Erfüllung der Lösbarkeits-Forderung problematisch. Mit diesen Voraussetzungen ist die Existenz von Indifferenzkurven für jedes Paar von Teilzielen sichergestellt. Nach diesen Annahmen können die folgenden Anforderungen an die Präferenzen eingeführt werden:

c. einfache Unabhängigkeit,
d. wechselseitige Unabhängigkeit sowie
e. Differenzunabhängigkeit.

[193] Vgl. Beispiel 1.9 auf S. 78.

Diese werden nun ausführlich erläutert.

c) Einfache Unabhängigkeit:

Die Unabhängigkeit der Präferenzen für den Konsum mehrerer Güter wurde wiederum von Debreu in der bereits zitierten fundamentalen Arbeit vorgestellt.[194] Das Theorem, welches die Wesentlichkeit der Teilziele und die wechselseitige Unabhängigkeit der Präferenzen als Bedingungen für die Existenz eines additiven Nutzens einführt, wird auch als das **Additivitäts-Theorem von Debreu** für Nutzenfunktionen bezeichnet.

Die grundlegende Form einfacher Unabhängigkeit liegt vor, wenn für ein Teilziel (bzw. Merkmal oder Attribut) die Präferenz zwischen zwei Ausprägungen angegeben werden kann, **ohne** dass die Ausprägungen anderer Merkmale relevant sind (vgl. Anf. 1.4.3).[195]

Anforderung 1.4.3 (Einfache Unabhängigkeit): *Eine Präferenzrelation* $\succsim$ *auf* $E^l = X \times Y$ *ist einfach unabhängig, wenn für alle* $x,x' \in X$ *und alle* $y \in Y$ *gilt:* $(x,y') \succsim (x',y') \Rightarrow (x,y) \succsim (x',y)$.

Beispiel 1.5 veranschaulicht diese Eigenschaft.

Beispiel 1.5:

Ein klassisches Beispiel für die Nichterfüllung der einfachen Unabhängigkeit lässt sich beim Restaurantbesuch mit der Entscheidung über Getränk und Hauptgericht finden. Wenn der Akteur die Wahl des Getränks von dem begleitenden Gericht abhängig macht, sind die Präferenzen für beide Teilziele ***nicht unabhängig****. Häufig wird ein Fischgericht mit Weißwein kombiniert oder ein Wildgericht wird von Rotwein begleitet. Die Präferenzen für die Getränke sind in diesem Fall nicht unabhängig von den Präferenzen für das Essen. Diese Zuordnung ist jedoch von Person zu Person unterschiedlich. Es handelt sich immerhin um Präferenzen - diese sind subjektiv. Für einen passionierten Biertrinker mögen solche Gedanken deshalb abwegig sein: Er wählt immer Bier, unabhängig von der Speise. Deshalb sind für ihn die Präferenzen über die Teilziele „Getränk" und „Hauptgericht"* ***unabhängig****.*

Die Unabhängigkeit der Präferenzen wurde bereits bei den grundlegenden Erläuterungen angesprochen und als **Separierbarkeit** bezeichnet.[196] In diesem Zusammenhang wurde darauf hingewiesen, dass sämtliche additiven Präferenzfunktionale von separierbaren Präferenzen ausgehen. Je mehr Teilziele in dem Problem vorliegen, umso größer ist die Gefahr, dass die Präferenzen nicht unabhängig sind. Dies wird anhand der nächsten Fortführung von Beispiel 1.4 erkennbar.

[194] Vgl. Debreu (1960: 20–21).

[195] Vgl. Koopmans (1972a: 63); Gäfgen (1974: 159–161); Dyer/Sarin (1979: 812); Fishburn (1979: 43); French (1988: 119); Keeney/Raiffa (1993: 109); Fishburn/Wakker (1995: 1138–1139).

[196] Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.

Fortführung des Beispiels 1.4:

Im Fall des Fahrzeugkaufes werden die vier Teilziele Beschleunigung (B), Größe (G), Leistung (L) und Ausstattung (A) betrachtet. Der Akteur, der diese vier Teilziele definiert hat, muss sich mit Blick auf die Teilziele Beschleunigung und Leistung jedoch fragen, ob seine diesbezüglichen Präferenzen unabhängig sind. Eine hohe Leistung geht i. d. R. auch mit einer hohen Beschleunigung einher bzw. vice versa eine hohe Beschleunigung erfordert eine große Leistung.

Neben der einfachen Unabhängigkeit existieren andere Arten. Zur Unterstützung der diesbezüglichen Erläuterungen wird das Beispiel 1.6 eingeführt.

Beispiel 1.6:

Für ein Entwicklungsprojekt werden drei Teilziele - Kosten (K), Qualität (Q), Zeit (T) - definiert. Wenn der Akteur von zwei alternativen Projekten immer dasjenige mit den geringsten Kosten bevorzugt, wäre die Präferenz für das Merkmal „Kosten" unabhängig. Bevorzugt er jedoch immer das Projekt mit der kürzesten Dauer, wäre die Präferenz in Bezug auf das Teilziel „Zeit" unabhängig. Es ist jedoch offensichtlich oft so, dass die Präferenzen für die Merkmale „Kosten" und „Qualität" bzw. „Kosten" und „Zeit" nicht unabhängig sind.

Die einfache Unabhängigkeit kann auf sämtliche Teilziele ausgeweitet werden, was zur wechselseitigen Unabhängigkeit führt.

d) Wechselseitige Unabhängigkeit:

Debreu führte die Unabhängigkeit jedoch nicht in der oben beschriebenen einfachen, sondern in der starken, wechselseitigen Form ein.[197] Damit wird gefordert, dass die Präferenzen für jede Teilmenge von Attributen unabhängig von den Ausprägungen der Attribute der Komplementärmenge sind (vgl. Anf. 1.4.4).[198]

Anforderung 1.4.4 (Wechselseitige Unabhängigkeit): *Die Relation* $\succsim$ *auf* E^l *ist wechselseitig unabhängig, wenn für jedes* $X \subseteq E^l$ *und jedes* $Y = E^l \backslash X$ *gilt:* $(x,y') \succsim (x',y') \Rightarrow (x,y) \succsim (x',y)$.

Wechselseitige Unabhängigkeit bedeutet, dass die Präferenzen für jede Teilmenge der Merkmale $X \subseteq E^l$ unabhängig von den Präferenzen über die Komplementärmenge der Attribute $Y = E^l \backslash X$ ist. Wechselseitige Unabhängigkeit des Attributspaares $\{X,Y\}$ von dem Merkmal Z bedeutet, dass die Lage der Indifferenzkurve und somit die Grenzrate der Substitution von X und Y nicht

[197] Vgl. Debreu (1960: 21).

[198] Vgl. Koopmans (1972a: 65–77); Chankong/Haimes (1983: 73); Wakker (1988: 424); Zimmermann/Gutsche (1991: 64); Keeney/Raiffa (1993: 111); Fishburn/Edwards (1997: 147).

von der Ausprägung des Merkmals Z abhängt. Demzufolge wird – wie in Abbildung 1.10 dargestellt – auch die Lage und Gestalt der Indifferenzkurven von X und Y nicht durch die Ausprägung von Z beeinflusst.[199]

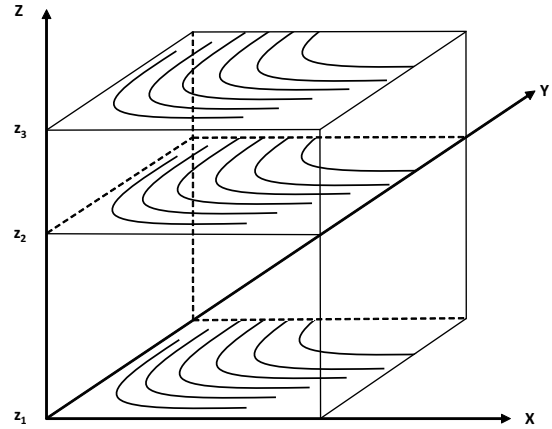


Abb. 1.10: Wechselseitige Unabhängigkeit von Präferenzen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: U. S. Department of Energy (1986: G-6).

Diese Form der Unabhängigkeit wird am bereits eingeführten Beispiel 1.6 erläutert.

Fortführung des Beispiels 1.6:

Die Menge der Attribute ist $Z = \{K, T, Q\}$. Es ist denkbar, dass die Relation der Merkmale „Qualität" und „Zeit" unabhängig vom Merkmal „Kosten" ist. Dann wären die Präferenzen für die Merkmalsmenge $X = \{T, Q\}$ unabhängig von der Komplementärmenge $Y = \{K\}$. Das könnte der Fall sein, wenn z. B. Qualität wichtiger ist als Zeit, unabhängig von der Kosten-Dimension. Auch ist ein Akteur vorstellbar, für den $\{K, T\}$ unabhängig von $\{Q\}$ ist. Dann wäre z. B. Zeit wichtiger als Kosten, unabhängig von der erreichten Qualität. Letzte mögliche Kombination wäre die Unabhängigkeit der Merkmalsmenge $\{K, Q\}$ vom Merkmal $Y = \{T\}$, wenn z. B. Qualität immer wichtiger wäre als Kosten, unabhängig von der Projektdauer.

Das Beispiel 1.6 zeigt, dass diese Eigenschaft nicht in jedem Fall erfüllt ist. Es ist hier wichtig, noch einmal darauf hinzuweisen, dass die Eigenschaft der **Unabhängigkeit von Präferenzen immer subjektiv** ist. Es ist keine Eigenschaft, die sich personenunabhängig zwingend aus den physischen, optischen, haptischen, technischen oder anderen Eigenschaften von betrachteten Objekten, Produkten bzw. Alternativen ergibt. Im Gegenteil – es handelt sich immer um eine subjektive Einordnung der Wichtigkeit dieser Eigenschaften.

[199] Vgl. Keeney/Raiffa (1993: 101).

Die Forderung nach Unabhängigkeit bzw. Separierbarkeit von Präferenzen ist nicht nur Bestandteil der Axiomatik der multiattributiven Nutzentheorie, sondern auch für andere – nicht nur, aber vor allem auch additive – Axiomensysteme von grundlegender Bedeutung. Dies betrifft:[200]

- Entscheidungen bei Risiko[201]
- Entscheidungen unter Ungewissheit[202] sowie
- intertemporale Entscheidungen.[203]

Wechselseitige Unabhängigkeit ist eine **notwendige Voraussetzung** für die Existenz eines **additiven Präferenzfunktionals** (vgl. Merksatz 1.6).[204]

Merksatz 1.6: *Wenn in einem Entscheidungsproblem mit wesentlichen Teilzielen (Anf. 1.4.1) die Präferenzen des Akteurs die Axiome rationaler eindimensionaler Entscheidungen (Def. 1.17), das Lösbarkeits-Axiom (Anf. 1.4.2) und wechselseitige Unabhängigkeit (Anf. 1.4.4) erfüllen, dann existieren Nutzenfunktionen $u_1,...,u_l$ auf $E_1,...,E_l$ mit $u_r : E \to \mathbb{R}$, die die Präferenzrelation $\succsim$ auf E^l mit $l \geq 3$ so repräsentieren, dass gilt:*

$$\sum_{r=1}^{l} u_r(e_{x;r}) \geq \sum_{r=1}^{l} u_r(e_{y;r}) \Leftrightarrow x \succsim y.$$

Jede andere Funktion v mit: $v(e) = \alpha \cdot u(e) + \beta$, wobei $\alpha > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.

Im Merksatz 1.6 sind die Anforderungen festgehalten, die erfüllt sein müssen, damit eine Präferenzrelation auf dem l-dimensionalen Kartesischen Produkt durch ein Präferenzfunktional abgebildet werden kann. Die dadurch definierte Nutzenfunktionen sind kardinal.[205] Merksatz 1.6 ist für alle Verfahren der additiven Nutzenmessung gültig. Die darin zusammengefassten Anforderungen bzw. Aussagen stellen die Richtschnur für eine additive Zusammenfassung mehrerer Teilnutzenfunktionen dar.

---

[200] Vgl. Strotz (1957); Gorman (1959); Strotz (1959); Barro/King (1984); Fishburn/Wakker (1995); Ballestero/Romero (1998: 52–55).

[201] Vgl. Anf. 1.5.5 auf S. 116.

[202] Vgl. Anf. 1.6.9 auf S. 167.

[203] Vgl. Anf. 1.7.5 auf S. 195.

[204] Vgl. Debreu (1960: 21–23); Krantz et al. (1971: 301–302); Chankong/Haimes (1983: 80–81); Roberts (1985: 219–220); French (1988: 119–120); Keeney/Raiffa (1993: 105); Fishburn/Edwards (1997: 148).

[205] Vgl. Def. 1.7 auf S. 22.

e) Differenzunabhängigkeit:

Bei den Erläuterungen der Anforderungen an rationale Präferenzen für eine kardinal messende Nutzenfunktion[206] ist bereits auf die Bedeutung von Nutzendifferenzen[207] eingegangen worden. Diese Anforderungen müssen auch für multikriterielle Entscheidungen gelten. Deshalb kann der folgende Gedanke formuliert werden: Wenn ein additives, kardinal messendes Präferenzfunktional existieren soll, so muss die Differenz zwischen der Präferenz für zwei Ergebnisse in Bezug auf ein Merkmal unabhängig davon sein, welche Ausprägungen andere Merkmale aufweisen. Zur Erläuterung wird die Abbildung 1.11 verwendet, in der zwei Merkmale X und Y abgebildet sind.

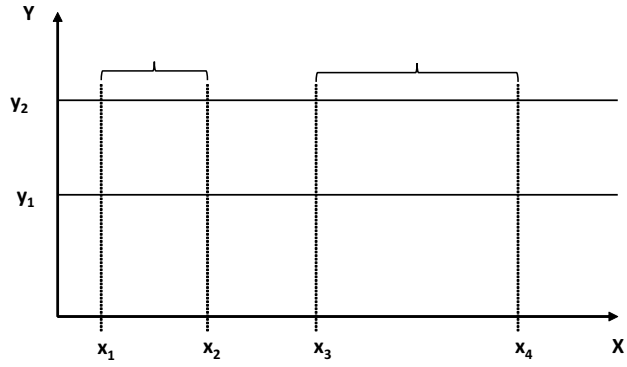


Abb. 1.11: Schwache Differenzunabhängigkeit. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Chankong/Haimes (1983: 83).

Der Abstand zwischen dem Ergebnis x_4 und x_3 ist größer als zwischen x_2 und x_1. Dieser Unterschied ist unabhängig davon, ob Merkmal Y als y_1 oder y_2 ausgeprägt ist. Damit kann die schwache Differenzunabhängigkeit in Eigenschaft 1.4.1 festgehalten werden.[208]

Eigenschaft 1.4.1: *Die Präferenzrelation* $\succsim_D$ *auf* $E^l = X \times Y$ *ist schwach differenzunabhängig, wenn für jedes beliebige* $x,x',x'',x''' \in X$ *mit* $(x''',y) \leftarrow (x'',y) \succsim_D (x',y) \leftarrow (x,y)$ *für ein* $y \in Y$ *auch gilt:* $(x''',y') \leftarrow (x'',y') \succsim_D (x',y') \leftarrow (x,y')$ *für jedes* $y' \in Y$.

Schwache Differenzunabhängigkeit der Präferenzen bezüglich der zwei Merkmale X und Y bedeutet, dass die **Ordnung der Präferenzdifferenzen** für X nur von den Ausprägungen dieses Merkmals abhängt und nicht von den Ausprägungen des Merkmals Y. Im Beispiel 1.6 würde schwache Differenzunabhängigkeit des Merkmals „Zeit“ vorliegen, wenn die Reduktion

[206] Vgl. Def. 1.8 auf S. 22.

[207] Vgl. Merksatz 1.4 auf S. 40.

[208] Vgl. Dyer/Sarin (1979: 814); Chankong/Haimes (1983: 83).

der Projektdauer um 20 Tage ($50d \succsim 70d$) einer Reduktion um 10 Tage ($50d \succsim 60d$) vorgezogen wird, unabhängig davon welche Ausprägungen die Merkmale „Kosten“ bzw. „Qualität“ aufweisen.

Die Eigenschaft der schwachen Differenzunabhängigkeit kann verstärkt werden, so dass nicht nur die Ordnung sondern der **Wert der Präferenzdifferenzen** bezüglich eines Merkmals unabhängig von anderen Merkmalen ist (vgl. Anf. 1.4.5).[209]

Anforderung 1.4.5 (Differenzunabhängigkeit): *Die Relation $\succsim_D$ auf $E^l = X \times Y$ ist differenzunabhängig, wenn für alle $x, x' \in X$ mit $(x,y) \succsim (x',y)$ für ein $y \in Y$ gilt, auch gelten muss: $(x,y) \leftarrow (x',y) \sim_D (x,y') \leftarrow (x',y')$ für jedes $y' \in Y$.*

Wenn der Akteur die Ausprägung x der Ausprägung x' vorzieht, so bleibt die Differenz zwischen diesen Werten erhalten, unabhängig davon, welche Ausprägungen andere Merkmale aufweisen. Dies wird am zuvor eingeführten Beispiel 1.6 erklärt.

Fortführung des Beispiels 1.6:

Differenzunabhängigkeit des Merkmals „Zeit“ im Beispiel 1.6 wäre gegeben, wenn die oben beschriebene Präferenzrelation der Projektdauer ($50\,d \succsim 70\,d$) zur Folge hätte, dass der Wert einer Reduktion um 20 Tage für den Akteur identisch ist, unabhängig von den Ausprägungen der Merkmale „Kosten“ bzw. „Qualität“. Einfach ausgedrückt: Für eine Reduktion der Projektdauer um 20 Tage wäre der Akteur beispielsweise bereit, sowohl eine Kostenerhöhung um 10.000€ als auch um 30.000€ in Kauf zu nehmen, aber auch eine Kostensenkung. Der Wert der 20-Tage-Reduktion wäre für ihn derselbe.

Bei der Bestimmung der Werte der Differenzunabhängigkeit sind die bereits erwähnten Grundlagen der Abstandsmessung

- Konsistenz,[210]
- Äquivalenz[211] sowie
- Stabilität[212]

zu berücksichtigen bzw. zu erfüllen. Mit den bisher vorgestellten Eigenschaften von Präferenzen ist die Existenz einer kardinal messenden,[213] additiven Nutzenfunktion sichergestellt (vgl. Merksatz 1.7).[214]

---

[209] Vgl. Dyer/Sarin (1979: 812); Keller/Simon (2019: 245).
[210] Vgl. Anf. 1.3.8 auf S. 38.
[211] Vgl. Anf. 1.3.9 auf S. 38.
[212] Vgl. Anf. 1.3.10 auf S. 39.
[213] Vgl. Def. 1.8 auf S. 22.
[214] Vgl. Dyer/Sarin (1979: 813); Dyer/Sarin (1981: 131).

Merksatz 1.7: *Wenn in einem Entscheidungsproblem mit wesentlichen Teilzielen (Anf. 1.4.1) die Präferenzen eines Akteurs die Axiome rationaler eindimensionaler Entscheidungen (Def. 1.17), das Lösbarkeits-Axiom (Anf. 1.4.2), wechselseitige Unabhängigkeit (Anf. 1.4.4) und Differenzunabhängigkeit (Anf. 1.4.5) erfüllen, dann existieren Nutzenfunktionen $u_1,...,u_l$ auf $E_1,...,E_l$ mit $u_r : E \to \mathbb{R}$, die die Präferenzrelation $\succsim$ auf E^l mit $l \geq 3$ in folgender Weise repräsentieren:*

$$\sum_{r=1}^{l} u_r(e_{x;r}) \geq \sum_{r=1}^{l} u_r(e_{y;r}) \Leftrightarrow x \succsim y$$

$$\sum_{r=1}^{l} u_r(e_{x;r}) - \sum_{r=1}^{l} u_r(e_{y;r}) \geq \sum_{r=1}^{l} u_r(e_{z;r}) - \sum_{r=1}^{l} u_r(e_{w;r}) \Leftrightarrow (y \to x) \succsim_D (w \to z).$$

Jede andere Funktion v_r mit: $v_r(e) = \alpha \cdot u_r(e) + \beta$, wobei $\alpha > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.

Aus Merksatz 1.7 wird deutlich, dass die Anforderungen an die Präferenzen für die Existenz eines kardinal messenden Funktionals sehr umfangreich sind. Für reale Entscheidungsprobleme dürfte deshalb eher ein kardinales Funktional entsprechend Merksatz 1.6 auf S. 63 vorlegen bzw. konstruiert werden können.

Mit diesen Axiomen werden die messtheoretischen Anforderungen deutlich, die für eine additive Verknüpfung von Einzelnutzenfunktionen erforderlich sind. In der praktischen Umsetzung ist zusätzlich die korrekte Berücksichtigung der unterschiedlichen Teilziel-Dimensionen erforderlich. Dies wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

1.4.3.3 Zielgewichte und Indifferenzkurven

1.4.3.3.1 Rolle der Gewichte

Das additive Funktional aus Definition 1.16 wird häufig wie in der Definition 1.18 formuliert.[215]

Definition 1.18: *Der Gesamtnutzen einer Alternative $U(a)$ ergibt sich wie folgt:* $U(a) = \sum_{r=1}^{l} \lambda_r \cdot u_r(e_r)$.

Die Verwendung von Definition 1.18 erfordert bzw. impliziert:[216]

[215] Vgl. Keeney/Raiffa (1993: 117); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 58).

[216] Vgl. French (1988: 128–130); Keeney/Raiffa (1993: 85–86).

- die Erfüllung der Anforderungen an additive Präferenzstrukturen[217] sowie
- die Definition von λ_r, so dass $0 < \lambda_r \leq 1$ und $\sum_{r=1}^{l} \lambda_r = 1$.

Der Variablen λ_r in Definition 1.18 kommt eine besondere Bedeutung zu. Es handelt sich dabei um eine **Skalierungskonstante**.[218] Deren Funktion kann wie folgt erklärt werden: Jedes der unterschiedlichen Teilziele wird auf einer Ursprungsskala gemessen, wie z. B. Entfernung [km], Arbeitnehmer [Anzahl], Grundstücksgröße [m^2], Kaufpreis [€]. Aufgrund der verschiedenen Breite der Skalen ist jede Einheit auf jeder Skala unterschiedlich lang. Die Einzelnutzenfunktionen sind auf das Intervall $[0;1]$ normiert. Es muss sichergestellt werden, dass der Einzelnutzen jedes Teilziels auf identisch lange Einheiten bezogen ist. Deshalb sind die Ursprungs-Skalen in sog. Standard-Skalen umzurechnen.[219] Damit ist sichergestellt, dass nicht „Äpfel und Birnen addiert werden". Die Höhe der Variablen hängt von den Ausprägungsintervallen jedes Teilzieles ab. Je größer ein Intervall ist, desto höher ist auch der Wert der Skalierungskonstanten.[220] Dazu wird Beispiel 1.7 betrachtet.

Beispiel 1.7:

Im Zusammenhang mit dem Erwerb eines Grundstücks werden Kriterien, Alternativen und Ausprägungen wie in Tab. 1.12 betrachtet.

Tab. 1.12: Ausgangswerte des Skalierungs-Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative / Teilziel	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\overline{\mathbf{e}}$	$\underline{\mathbf{e}}$
Entfernung [km]	10	50	0	100
Wohnfläche [$\mathbf{m^2}$]	100	150	200	100
Preis [Tsd. €]	140	180	100	200

In der Tab. 1.12 sind nicht alle verfügbaren Alternativen abgebildet. Dies wird dadurch deutlich, dass die Alternative 2 die geringste Ausprägung der Wohnfläche verzeichnet, die anderen Extremwerte jedoch bei keiner der beiden Alternativen auftreten. Bei Annahme eines linearen Wertverlaufs ergeben sich die folgenden Einzelnutzenfunktionen:

- *Entfernung:* $u_E(e_E) = -\frac{1}{100} \cdot e_E + 1$,
- *Wohnfläche:* $u_W(e_W) = \frac{1}{100} \cdot e_W - 1$,
- *Preis:* $u_P(e_P) = -\frac{1}{100} \cdot e_P + 2$.

---

[217] Vgl. Merksatz 1.6 auf S. 63 bzw. Merksatz 1.7 auf S. 66.

[218] Vgl. Chankong/Haimes (1983: 72); Keeney/Raiffa (1993: 117); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 131).

[219] Vgl. dazu auch Abb. 1.12 auf S. 70.

[220] Vgl. Bouyssou/Pirlo (2016: 133).

Wird nun davon ausgegangen, dass sämtliche Teilziele dieselbe Gewichtung erhalten,[221] *ergibt sich die folgende Bewertung:*

$$\begin{aligned} U(a_1) &= \lambda_E \cdot u_{E;a1} + \lambda_W \cdot u_{W;a1} + \lambda_P \cdot u_{P;a1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{1}{100} \cdot 10 + 1 \right] + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{100} \cdot 100 - 1 \right] + \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{1}{100} \cdot 140 + 2 \right] \\ &= 0{,}5 \\ U(a_2) &= \lambda_E \cdot u_{E;a2} + \lambda_W \cdot u_{W;a2} + \lambda_P \cdot u_{P;a2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{1}{100} \cdot 50 + 1 \right] + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{100} \cdot 150 - 1 \right] + \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{1}{100} \cdot 180 + 2 \right] \\ &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Ein Blick auf die Skalen im Bspl. 1.7 zeigt: u(1 m²)=u(1 km)= u(1 Tsd. €). Um dies zu kompensieren, muss die Gewichtung angepasst werden. Dazu wird in einem ersten Schritt der Faktor der Skalenänderung des Teilziels j ermittelt:[222]

$$\Delta S_j = u_{alt}(\overline{e}_{neu}) - u_{alt}(\underline{e}_{neu})$$

Mit ΔS_j wird die Differenz ermittelt, die sich bei Verwendung der ursprünglichen Nutzenfunktion (also der Nutzenfunktion mit den alten Skalengrenzen) auf die neuen Skalengrenzen für Teilziel j ergeben. Mit diesem Faktor werden im nächsten Schritt die neuen Skalierungen wie folgt ermittelt:[223]

$$\lambda_{j;neu} = \frac{\lambda_{j;alt} \cdot \Delta S_j}{\sum_{i \neq j} \lambda_{i;alt} + \lambda_{j;alt} \cdot \Delta S_j}$$

$$\lambda_{i;neu} = \frac{\lambda_{i;alt}}{\sum_{i \neq j} \lambda_{i;alt} + \lambda_{j;alt} \cdot \Delta S_j}$$

Diese Ermittlung und die Konsequenzen werden durch Fortführung von Beispiel 1.7 demonstriert.

Fortführung des Beispiels 1.7:

Nun wird angenommen, dass bei der weiteren Alternativensuche ein Objekt gefunden wird, das über eine Fläche von 300 m² verfügt.

- *Ermittlung von ΔS_j für die Wohnfläche:*

  $$\Delta S_W = \left(\frac{1}{100} \cdot 300 - 1 \right) - \left(\frac{1}{100} \cdot 100 - 1 \right) = 2$$

- *Ermittlung der neuen Gewichtungsfaktoren:*

[221] Die konsistente Ermittlung wird im Abschn. 1.4.3.4 auf S. 77 dargestellt.

[222] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 157).

[223] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 157–158).

- *Entfernung:* $\lambda_{E;neu} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$
- *Wohnfläche:* $\lambda_{W;neu} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$
- *Preis:* $\lambda_{P;neu} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

Die Existenz des neuen Objektes verdoppelt die Skalenlänge, auf welcher der Nutzen einer Einheit Wohnfläche gemessen wird. Damit ändert sich gleichzeitig der Wert einer Nutzeneinheit pro Skalen-Einheit Wohnfläche. Das Verhältnis von λ_W zu den anderen zwei Skalierungskonstanten beträgt nun $2:1$. Der Nutzen von zwei Einheiten auf der Wohnflächen-Skala entspricht dem Nutzen einer Einheit auf den anderen Skalen. Damit ergeben sich die Teil- und Gesamtnutzenwerte der zwei Alternativen mit der veränderten Nutzenfunktion: $U(a_1) = 0{,}375$; $U(a_2) = 0{,}300$. Die Rangfolge zwischen den Alternativen bleibt jedoch unverändert.

Das Beispiel 1.7 zeigt auch, dass die Skalierungskonstante λ_i – genau betrachtet – nicht dimensionslos ist, sondern immer das Verhältnis einer Nutzeneinheit in Relation zu einer Einheit der Skala zur Messung des Teilzieles i als Einheit erhalten müsste. Die Skalierungskonstante fungiert quasi als Äquivalenzziffer zur Umrechnung sämtlicher Skalen in eine Einheitsskala.

Oftmals werden Werte für die Gewichte von Teilzielen bestimmt, ohne die Ausprägungsintervalle der Skalen zu berücksichtigen[224] und es wird dem Faktor λ_r die Bedeutung eines Gewichtes des Teilzieles r zugewiesen. Damit wird jedoch nicht der Natur des additiven Modells entsprochen.[225]

Die Bedeutung und Ermittlung der Skalierungskonstanten wird mit Blick auf Abb. 1.12 motiviert. Die Attribute werden auf unterschiedlichen Ursprungsskalen gemessen, welche naturgemäß verschiedene Intervallgrenzen und Längen aufweisen. Nun muss der Nutzen, den eine Einheit der Ursprungs-Skala stiftet, normiert werden, damit die daraus entstehenden Teilnutzenwerte addiert werden können. Die additive Struktur erfordert demzufolge die Verwendung von Skalen mit identischer Länge für sämtliche Attribute. Jede Einheit auf jeder Skala muss gleich lang sein, damit die Addition der Nutzenwerte sämtlicher Attributsausprägungen zu einem vergleichbaren Urteil für alle Alternativen führt. Anders ausgedrückt: Da der Nutzen aus allen Teilzielen additiv ermittelt wird, muss die Relation von Nutzeneinheit zu Skaleneinheit für alle Teilnutzen und Teilziele identisch sein.

---

[224] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.3 auf S. 73.

[225] *„Again, note that we are speaking here of [...] as scaling constants and not as weights. As already mentioned weights that would reflect the "importance" of attributes are irrelevant to assess the additive value function model. [...] This point is unfortunately too often forgotten when using a weighted average of some numerical attributes.“* Bouyssou/Pirlo (2016: 133). Vgl. Klein/Scholl (2011: 114) zu einer ähnlichen Argumentation.

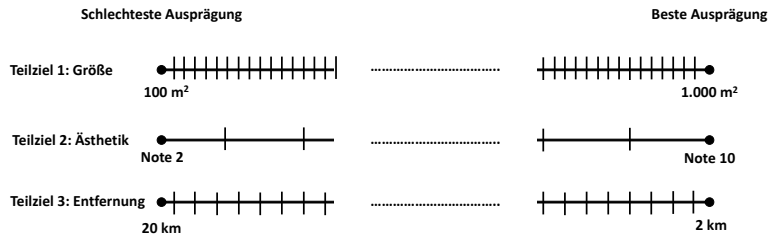


Abb. 1.12: Skalen unterschiedlicher Teilziele. Quelle: Eigene Darstellung.

Die vorausgesetzte Erfüllung der Anforderungen an additive Präferenzstrukturen von Merksatz 1.6 auf S. 63 bzw. Merksatz 1.7 auf S. 66 impliziert die Existenz von Indifferenzkurven zwischen jedem Paar von Teilzielen. Im folgenden Abschnitt wird die lineare Ausprägungsform vorgestellt.

1.4.3.3.2 Lineare Indifferenzkurven

Das kompensatorische Modell aus Merksatz 1.5 auf S. 57 wird häufig als lineares Funktional wie in Definition 1.19 spezifiziert.[226]

Definition 1.19: *Eine Nutzenfunktion* $U : E \to \mathbb{R}$ *auf* $E^l = E_1 \times E_2 \times ... \times E_l$ *ist linear, wenn gilt:* $U(a) = \lambda_1 \cdot e_1 + ... + \lambda_i \cdot e_i + \lambda_j \cdot e_j + ... + \lambda_l \cdot e_l = \sum_{r=1}^{l} \lambda_r \cdot e_r$.

Das bedeutet, dass die Indifferenzkurven zwischen jedem Paar von Teilzielen linear sind.[227] Wenn diese Nutzenfunktion verwendet wird, kann λ durchaus als Gewicht bzw. Gewichtungsfaktor bezeichnet werden. Die Annahme linearer Indifferenzkurven bei multikriteriellen Entscheidungsproblemen ist in der Ökonomie weit verbreitet. So basieren z. B. die Nutzwertanalyse[228] und das Kapitalwertkriterium[229] ebenfalls auf dieser Annahme.

Mit der Linearität der Indifferenzkurven ist gleichzeitig die Existenz konstanter Austauschraten zwischen den Teilzielen festgelegt.[230]. Dies wird in Abb. 1.13 dargestellt. Dies impliziert wechselseitige Unabhängigkeit für sämtliche Paare von Teilzielen (vgl. Merksatz 1.8).[231]

[226] Vgl. Gäfgen (1974: 162); Zangemeister (1976: 84); French (1988: 128).

[227] Indifferenzkurven und die Grenzrate der Substitution wurden bereits vorgestellt. Vgl. Abb. 1.5 auf S. 30.

[228] Vgl. Abschn. 1.4.3.5 auf S. 82.

[229] Vgl. Abschn. 1.7.2.4 auf S. 208 in diesem Band sowie im 1. Band, Abschn. 3.4.2 auf S. 236.

[230] Vgl. Keeney/Raiffa (1993: 84–85).

[231] Vgl. French (1988: 131).

Merksatz 1.8: *Die Verwendung konstanter Grenzraten der Substitution impliziert wechselseitige Unabhängigkeit der Präferenzen für sämtliche Teilziele.*

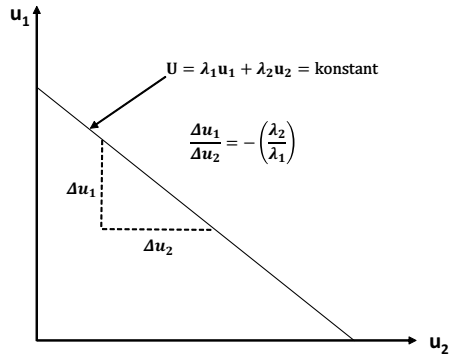


Abb. 1.13: Lineare Indifferenzkurve und konstante Substitutionsrate. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Zangemeister (1976: 86).

Zur Erklärung werden die Nutzen zweier Teilziele u_1, u_2, die mit den Faktoren λ_1, λ_2 gewichtet sind und die damit verbundene Gesamtnutzenfunktion betrachtet:

$$U(u_1,u_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

Die Änderung des Gesamtnutzens bei gleichzeitiger, infinitesimaler Variation der Teilnutzen ergibt sich aus:

$$dU(u_1,u_2) = \frac{\partial U(u_1,u_2)}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial U(u_1,u_2)}{\partial u_2} \cdot du_2.$$

Wird von einem konstanten Gesamtnutzen ausgegangen, folgt:

$$dU(u_1,u_2) = 0$$

und somit:

$$0 = \frac{\partial U(u_1,u_2)}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial U(u_1,u_2)}{\partial u_2} \cdot du_2.$$

Im vorliegenden Fall gilt:

$$\frac{\partial U(u_1,u_2)}{\partial u_1} = \lambda_1, \ \frac{\partial U(u_1,u_2)}{\partial u_2} = \lambda_2$$

Es folgt:

$$0 = \lambda_1 \cdot du_1 + \lambda_2 \cdot du_2$$

Dies kann formuliert werden zu:

$$-\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Die Änderung eines Teilnutzens muss durch die gegenläufige Änderung des anderen Teilnutzens kompensiert werden.[232] In dem einfachen Fall von zwei Teilzielen ergibt sich die Austauschrate α_{12} (von Teilziel 1 zu Teilziel 2) aus dem umgekehrten Verhältnis der Gewichte λ_1 und λ_2. Allgemein gilt für diese Austauschrate:[233]

$$\alpha_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}.$$

Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

- Konsistenz
- Reziprozität sowie
- Endlichkeit.

Für das Verhältnis der relativen Wichtigkeiten der Ziele h,i,j muss im Falle konsistenter Relationen gelten:

$$\alpha_{hi} \cdot \alpha_{ij} = \alpha_{jh} \; \forall \; 1 \leq h,i,j \leq l.$$

Auf Basis dieser Beziehung der relativen Wichtigkeiten muss für die Zielgewichte gelten:[234]

$$\frac{\lambda_h}{\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_j} = \frac{\lambda_h}{\lambda_j} \; \forall \; 1 \leq h,i,j \leq l$$

Die zweite Grundanforderung an konsistente Paarvergleiche beinhaltet, dass die Austauschraten der Gewichte zweier Ziele zueinander reziprok sind. Es gilt:

$$\alpha_{hi} = \frac{1}{\alpha_{ih}}.$$

Als dritte Bedingung ist korrekterweise noch zu fordern $\alpha_{hi} \neq \infty$ bzw. $\alpha_{hi} \neq -\infty \; \forall \; 1 \leq h,i \leq l$. Damit wird ausgedrückt, dass eine Alternative nie unendlich besser sein kann als die Vergleichsalternative.

[232] Vgl. Krelle (1968: 111).
[233] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 58–59).
[234] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 58–59).

1.4.3.3.3 Ermittlung der Zielgewichte

Zentrale Fragestellung ist deshalb die Ermittlung bzw. Festlegung der Variablen λ_r bzw. der „Zielgewichte". Dazu können die folgenden Verfahren verwendet werden:

- Trade-off-Verfahren,
- direkter, vollständiger Paarvergleich,
- holistische Zuweisung oder
- Analytischer Hierarchieprozess (AHP).

Die ersten drei Verfahren werden im Folgenden vorgestellt. Der Analytische Hierarchieprozess wird als eigenständiges Verfahren behandelt.[235]

Trade-off-Verfahren:

Der Akteur wird in eine Situation gebracht, in der er sich zwischen zwei Alternativen entscheiden muss, also ein trade-off vorliegt. Dem Entscheidungsträger werden zwei Alternativen präsentiert, die in den zwei Teilzielen i und j abweichende, jedoch in sämtlichen anderen Teilzielen dieselbe Ausprägung aufweisen und er muss angeben, bei welcher Kombination er indifferent ist. Dies wird an den Alternativen a_1 und a_2 erläutert:[236]

$$\begin{aligned} a_1 &= (e_{(1,1)},\ldots,e_{(1,i-1)},\rho_1,e_{(1,i+1)},\ldots,e_{(1,j-1)},\tau_1,e_{(1,j+1)},\ldots,e_{(1,l)}) \\ a_2 &= (e_{(2,1)},\ldots,e_{(2,i-1)},\rho_2,e_{(2,i+1)},\ldots,e_{(2,j-1)},\tau_2,e_{(2,j+1)},\ldots,e_{(2,l)}) \\ a_1 &\sim a_2 \end{aligned}$$

Aufgrund der Identität der Ausprägung sämtlicher Teilziele außer i und j folgt bei dieser Indifferenz:

$$\lambda_i \cdot u_i(\rho_1) + \lambda_j \cdot u_j(\tau_1) = \lambda_i \cdot u_i(\rho_2) + \lambda_j \cdot u_j(\tau_2)$$

Das führt zu:

$$\begin{aligned} \lambda_i \cdot [u_i(\rho_1) - u_i(\rho_2)] &= \lambda_j \cdot [u_i(\tau_2) - u_i(\tau_1)] \\ \frac{\lambda_i}{\lambda_j} &= \frac{u_j(\tau_2) - u_j(\tau_1)}{u_i(\rho_1) - u_i(\rho_2)} \end{aligned}$$

Die Darstellungen können wie folgt interpretiert werden: Indifferenz zwischen den Alternativen a_1 und a_2 bedeutet, dass die Präferenzdifferenz zwischen den Ausprägungen ρ_1 und ρ_2 bei dem Attribut i exakt ausgeglichen wird durch die Präferenzdifferenz zwischen den Ausprägungen τ_2 und τ_1 bei dem Attribut j. Die Skalierungskonstanten λ_i und λ_j sorgen dafür, dass beide Attribute

[235] Vgl. Abschn. 1.4.3.6 auf S. 84.

[236] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 140).

auf einer einheitlichen Skala abgetragen und verglichen werden. Die Präferenzintervalle beider Attribute haben also exakt dieselbe Länge und deshalb entspricht jede Einheit auf beiden Skalen einer identischen Nutzeneinheit.

An entsprechender Stelle erfolgt eine Erläuterung des Verfahrens.[237] Das Trade-off-Verfahren ist das einzige methodisch einwandfreie Verfahren. Jedoch ist es nicht einfach durchzuführen. Deshalb sind einfachere Methoden entstanden, die im Folgenden vorgestellt werden.

Direkter, vollständiger Paarvergleich:

Aufgrund höherer Aussagekraft besser geeignet ist der **direkte Paarvergleich**, welcher ebenfalls auf Basis einer Ordinal-, Intervall- oder Verhältnisskala durchgeführt werden kann. Bei Verwendung einer **Ordinalskala** muss der Akteur für jedes Ziel angeben, ob er dieses Ziel für wichtiger oder für unwichtiger im Vergleich zu dem anderen Ziel einordnet. Diese Einordnung wird für jedes Zielpaar vorgenommen. Das Ergebnis kann als Dominanzmatrix dargestellt werden. Wird in dem Einführungsbeispiel angenommen, der Akteur schätze das Teilziel k_2 wichtiger ein als die Ziele k_1 und k_3 und gleichzeitig schätze er das Ziel k_3 wichtiger ein als das Ziel k_1, resultiert die Dominanzmatrix in Tabelle 1.13.

Tab. 1.13: Ordinalskalierte Paarvergleichsmatrix des Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Zangemeister (1976: 161).

Teilziel / Teilziel	k_1	k_2	k_3	**Summe**
k_1	-			**0**
k_2	1	-	1	**2**
k_3	1		-	**1**

Die Ergebnisse der Dominanzmatrix wiederum können auf zwei Wegen verwendet werden. Entweder es wird eine einfache Präferenzrelation erstellt, die in diesem Falle lauten würde: $k_2 \succ k_3 \succ k_1$. Oder die Summe der dominierten Paarvergleiche für jedes Teilziel wird auf die Gesamtsumme der dominierten Ziele bezogen. Dies würde ein Gewicht für das Ziel k_2 von $\frac{2}{3}$ und für das Ziel k_3 von $\frac{1}{3}$ ergeben.

Der in Tabelle 1.13 dargestellte Paarvergleich kann auch variiert werden, indem für den Vergleich jeder Alternative mit sich selbst ein Punkt vergeben wird. Dies führt zwar nicht zu einer anderen ordinalen Präferenz, jedoch zu einer anderen Gewichtung (vgl. Tabelle 1.14).

[237] Vgl. Abschn. 1.4.3.4 auf S. 77.

Tab. 1.14: Alternative ordinalskalierte Paarvergleichsmatrix des Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Adam (1997: 416–417).

Teilziel / Teilziel	k_1	k_2	k_3	Summe
k_1	1			**1**
k_2	1	1	1	**3**
k_3	1		1	**2**

Bei dieser Vorgehensweise erhält Ziel k_1 ein Gewicht von $\frac{1}{6}$, k_2 erhält ein Gewicht von $\frac{1}{2}$ und k_3 einen Anteil von $\frac{1}{3}$.

Als Verfahren der vollständigen Paarvergleiche auf Basis einer **Intervallskala** ist der analytische Hierarchieprozess zu nennen, der auf der Verwendung einer 9-Punkte-Skala basiert. Diese Vorgehensweise wird im Zusammenhang mit dem zugrunde liegenden Verfahren – dem AHP – detailliert vorgestellt.[238]

Die Methode der paarweisen Vergleiche kann jedoch auch auf Basis einer **Verhältnisskala** durchgeführt werden. Dieses Verfahren wird auch als **Direct-Ratio-Verfahren** bezeichnet.[239]

Dabei wird angegeben, um wie viel wichtiger ein Ziel im Verhältnis zu dem anderen Ziel ist. Dies wird durch den Faktor α_{ij} ausgedrückt, der angibt, wie viel Mal das Ziel i wichtiger ist als das Ziel j. Dabei gilt:

$$\alpha_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}.$$

Wird von **konstanten Austauschraten** zwischen den Teilzielen ausgegangen (vgl. Abb. 1.13), kann die Matrix der Zielgewichte auf Konsistenz geprüft werden. Dass erfolgt durch die oben erwähnten Bedingungen:[240]

- Konsistenz,
- Reziprozität und
- Endlichkeit.

Zum Verständnis wird das Beispiel 1.8 entwickelt.

Beispiel 1.8:

Für die in Tab. 1.9 auf S. 51 aufgeführten drei Teilziele kann der Akteur im direkten Paarvergleich angeben, dass:

- *das Ziel k_2 drei mal so wichtig ist wie das Ziel k_1,*
- *das Ziel k_2 doppelt so wichtig ist wie das Ziel k_3,*
- *er für die Beziehung der Ziele k_1 und k_3 keine Relation angeben kann.*

---

[238] Vgl. Abschn. 1.4.3.6 auf S. 84.

[239] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 145–146).

[240] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.2 auf S. 70.

Trotzdem ist der Akteur bestrebt, einen konsistenten Paarvergleich durchzuführen.

Aus diesen Informationen ergibt sich: $\alpha_{21} = 3$ *und* $\alpha_{23} = 2$*. Nun stellt sich noch die Frage nach der Relation von* k_1 *und* k_3*. Dies wird mit der Beziehungsanforderung an konsistente Paarvergleiche wie folgt ermittelt:* $\alpha_{12} \cdot \alpha_{23} = \alpha_{13}$ *führt zu* $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$*.*

Aus den Anforderungen an die konsistente Zielgewichtung ist bekannt, dass $\alpha_{12} = \frac{1}{\alpha_{21}}$*. Demzufolge muss* $\alpha_{12} = \frac{1}{3}$ *sowie* $\alpha_{32} = \frac{1}{2}$ *gelten. Außerdem ergibt sich die Relation* $\alpha_{31} = \frac{3}{2}$*. Mit diesen Werten kann die Paarvergleichsmatrix aufgestellt werden, die in Tabelle 1.15 zu sehen ist.*

Tab. 1.15: Verhältnisskalierte Paarvergleichsmatrix des Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung.

Teilziel / Teilziel	k_1	k_2	k_3
k_1	1	1/3	2/3
k_2	3	1	2
k_3	3/2	1/2	1

Nun ist noch die Frage nach den normierten Gewichtungsfaktoren zu beantworten. Diese werden aus folgender Beziehung ermittelt:[241]

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{ij}}{\sum_{r=1}^{l} \alpha_{rj}} \quad \forall \; 1 \leq i \leq l$$

Für das Beispiel folgt:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}}; \; \lambda_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}}; \; \lambda_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}}$$

Es resultieren: $\lambda_1 = \frac{2}{11}$*,* $\lambda_2 = \frac{6}{11}$ *sowie* $\lambda_3 = \frac{3}{11}$*. Alternativ könnten auch die folgenden Relationen verwendet werden:*

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}}; \; \lambda_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}}; \; \lambda_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}}$$

Die damit ermittelten Gewichtungsfaktoren sind identisch mit den zuvor errechneten Faktoren. Diese Gewichtungsfaktoren werden auf die Ausgangsstellung aus Tabelle 1.9 angewendet und führen zu den Resultaten in Tabelle 1.16.

[241] Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991: 56).

Tab. 1.16: Anwendungsbeispiel der Zielgewichtung. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Teilziele			Funktional: $\sum_{r=1}^{l} \lambda_r \cdot e_{ir}$	
	k_1	k_2	k_3		
a_1	$10 \cdot \frac{2}{11}$	$20 \cdot \frac{6}{11}$	$16 \cdot \frac{3}{11}$	$\mathbf{\frac{188}{11}}$	
a_2	$14 \cdot \frac{2}{11}$	$19 \cdot \frac{6}{11}$	$18 \cdot \frac{3}{11}$	$\mathbf{\frac{196}{11}}$	$\Leftarrow$ **max**
a_3	$15 \cdot \frac{2}{11}$	$19 \cdot \frac{6}{11}$	$15 \cdot \frac{3}{11}$	$\mathbf{\frac{189}{11}}$	
a_5	$16 \cdot \frac{2}{11}$	$18 \cdot \frac{6}{11}$	$12 \cdot \frac{3}{11}$	$\mathbf{\frac{176}{11}}$	

Alternative a_2 ist bei dieser Konstellation die optimale Alternative.

Die Vorgehensweise verdeutlicht, dass es bei einer steigenden Anzahl an Teilzielen zu erheblichen Bewertungsschwierigkeiten kommen kann bzw. dass die resultierende Vergleichsmatrix die Konsistenzanforderungen nicht mehr erfüllt.

Holistische Zuweisung:

Im Rahmen der **holistischen Zuweisung** werden sämtliche Zielstellungen in einem Verfahrensschritt betrachtet und die jeweiligen Gewichte zugeteilt. Dabei findet eine ganzheitliche Betrachtung der Wichtigkeit eines Teilzieles in Bezug auf die anderen Teilziele statt. Diese Methode kann auf Basis einer Ordinal-, Intervall- oder Verhältnisskala durchgeführt werden,[242] ist jedoch relativ ungenau, da sämtliche Ziele auf einmal betrachtet werden.

1.4.3.4 Multiattributive Nutzentheorie

Diese Form der additiven Zusammenfassung wurde unter dem Begriff *Multi-Attribute Utility Theory* (MAUT) 1976 vorgestellt.[243] Basis sind die im vorangegangenen Abschnitt eingeführten theoretischen Grundlagen zu additiven Funktionalen. Das additive multiattributive Funktional wird nach Definition 1.20 ermittelt.[244]

---

[242] Zur Beschreibung der Skalentypen vgl. Abschn. 1.2.3 auf S. 19.

[243] Vgl. Keeney/Raiffa (1976).

[244] Vgl. Schneeweiß (1991: 130); Keeney/Raiffa (1993: 117).

Definition 1.20: *Das Präferenzfunktional einer Alternative bei Verwendung der multiattributiven Nutzentheorie $\Phi_{MAUT}(a)$ lautet:*

$$\Phi_{MAUT}(a) = \sum_{r=1}^{l} u_r(e_r) \cdot \lambda_r.$$

Die optimale Alternative a_{opt} ist demzufolge definiert durch E.-regel 1.3.

Entscheidungsregel 1.3: *Bei Anwendung der multiattributiven Nutzentheorie ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi_{MAUT}(a_{opt}) = \max_i \left[\sum_{r=1}^{l} \lambda_r \cdot u_{i;r}(e_{i;r}) \right].$$

Die MAUT basiert auf den folgenden Schritten:[245]

1. Auswahl/Festlegung der Teilziele,
2. Prüfung der Kriterien auf Unabhängigkeit,
3. Bestimmung der Einzelnutzenfunktionen,
4. Ermittlung der Skalierungskonstanten,
5. Berechnung des Gesamtnutzens der Alternativen,
6. Beurteilung der relativen Vorteilhaftigkeit.

Mit dem dritten Schritt wird die **Höhenpräferenz** des Akteurs abgebildet. Der vierte Schritt dient zur Abbildung der **Artenpräferenz**. Zur Erläuterung wird das Beispiel 1.9 herangezogen.

Beispiel 1.9:

Ein Akteur sucht ein Grundstück mit Gebäude. Der Akteur kann nach einiger Überlegung die folgenden, wechselseitig unabhängigen Entscheidungskriterien festhalten: Größe (k_1), Ästhetik als Summe architektonischer Merkmale (k_2) sowie Entfernung vom Zentrum (k_3). Es stehen vier Alternativen a_1, a_2, a_3 sowie a_4 zur Auswahl, deren Ausprägungen in Tab. 1.17 abgebildet sind.

Tab. 1.17: Ausgangswerte des multikriteriellen Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung.

Teilziel / Alternative	Größe [m^2]	Ästhetik [Aufsteigende Note]	Entfernung [km]
a_1	100	0	8
a_2	1000	5	2
a_3	500	10	20
a_4	600	10	15

[245] Vgl. Götze (2014: 219).

Die ersten beiden Schritte im Verfahrensablauf sind damit erfüllt. Im nächsten Schritt werden die Einzelnutzenfunktionen wie folgt bestimmt:

- *Größe: Die geringste Grundstücksgröße beträgt 100 m^2 und erhält den Nutzenwert 0, wohingegen das größte Grundstück eine Fläche von 1.000 m^2 umfasst und deshalb den Wert 1 erhält. Bei linearer Relation folgt:* $u_G(e_G) = \frac{1}{900} \cdot e_G - \frac{1}{9}$.
- *Ästhetik: Die Ästhetik umfasst die bauliche Eignung und den Zustand der Gebäude. Diese wird auf einer 10-Stufen-Skala aufsteigend bewertet. Null Punkte entsprechen demselben Nutzenwert. Bei linearer Ausprägung folgt:* $u_A(e_A) = \frac{1}{10} \cdot e_A$.
- *Entfernung: Die kürzeste Entfernung beträgt 2 km und erhält den Nutzenwert 1, die größte Distanz beträgt 20 km und erhält den Nutzenwert 0. Bei linearer Relation resultiert:* $u_E(e_E) = -\frac{1}{18} \cdot e_E + \frac{10}{9}$.

Im Folgenden wird zur Bestimmung des Faktors λ das **Trade-off-Verfahren** vorgestellt, welches auf der bereits erwähnten Eigenschaft konstanter Substitutionsraten aufbaut.[246] Wichtig für das Trade-off-Verfahren sind die Erfüllung der:

- grundlegende Anforderungen an Präferenzen[247] insbes. Transitivität und Stetigkeit,
- Wesentlichkeit der Teilziele,[248]
- Lösbarkeitsbedingung[249] sowie
- wechselseitigen Unabhängigkeit.[250]

Im Folgenden wird das Vorgehen anhand des bereits eingeführten Beispiels erläutert.

Fortführung des Beispiels 1.9 von S. 78:

Mit der Analyse wird an den oberen bzw. unteren Grenzen des Ausprägungsintervalls begonnen. Es wird im ersten Schritt die Austauschrate zwischen ***Entfernung und Größe*** *analysiert. Der Akteur muss angeben, bei welcher Kombination aus diesen beiden Teilzielen er indifferent ist. Es kann schließlich Indifferenz bezüglich folgender Kombination festgestellt werden:* $(400\ m^2, 5\ km, \ddot{A}sthetik) \sim (800\ m^2, 15\ km, \ddot{A}sthetik)$. *Diese Werte werden in die obigen Einzelnutzenfunktionen eingesetzt, womit folgt:*

$$\begin{aligned} \lambda_G \cdot u_G(400) + \lambda_E \cdot u_E(5) + A &= \lambda_G \cdot u_G(800) + \lambda_E \cdot u_E(15) + A \\ \lambda_E \cdot [u_E(5) - u_E(15)] &= \lambda_G \cdot [u_G(800) - u_G(400)] \\ \frac{\lambda_E}{\lambda_G} &= \frac{u_G(800) - u_G(400)}{u_E(5) - u_E(15)} \end{aligned}$$

---

[246] Vgl. Abschn. 1.4.3.2 auf S. 55 sowie Bouyssou et al. (2006: 140–141); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 140–141).

[247] Vgl. Def. 1.17 auf S. 56.

[248] Vgl. Anf. 1.4.1 auf S. 57.

[249] Vgl. Anf. 1.4.2 auf S. 58.

[250] Vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61.

$$= \frac{\frac{7}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{18}}$$
$$= \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}$$
$$\lambda_E = 0{,}80 \cdot \lambda_G$$

Im nächsten Schritt wird die Austauschrate zwischen ***Entfernung und Ästhetik*** *vom Akteur abgefragt. Es wird Indifferenz bezüglich folgender Kombination festgestellt:*

$(Grösse, 15\,km, Note\,8) \sim (Grösse, 3\,km, Note\,2)$. *Das bekannte Procedere ergibt:*

$$\begin{aligned} G + \lambda_E \cdot u_E(15) + \lambda_A \cdot u_A(8) &= G + \lambda_E \cdot u_E(3) + \lambda_A \cdot u_A(2) \\ \lambda_A \cdot [u_A(8) - u_A(2)] &= \lambda_E \cdot [u_E(3) - u_E(15)] \\ \frac{\lambda_E}{\lambda_A} &= \frac{u_A(8) - u_A(2)}{u_E(3) - u_E(15)} \\ &= \frac{\frac{8}{10} - \frac{2}{10}}{\frac{17}{18} - \frac{5}{18}} \\ &= \frac{\frac{6}{10}}{\frac{12}{18}} \\ \lambda_E &= 0{,}90 \cdot \lambda_A \end{aligned}$$

Da gelten muss: $\lambda_E + \lambda_A + \lambda_G = 1$, *können folgende Werte ermittelt werden:* $\lambda_A = \frac{40}{121} \approx 0{,}3306$, $\lambda_E = \frac{36}{121} \approx 0{,}2975$, $\lambda_G = \frac{45}{121} \approx 0{,}3719$. *Mit diesen Skalierungskonstanten wird der Gesamtnutzenwert für* a_1 *mit Def. 1.18 auf S. 66 wie folgt ermittelt:*

$$\begin{aligned} \Phi(a_1) &= \sum_{r=1}^{l} \lambda_r \cdot u_{(1,r)}(e_{(1,r)}). \\ &= \lambda_1 \cdot \frac{1}{900} \cdot e_1 - \frac{1}{9} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{10} \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot -\frac{1}{18} \cdot e_3 + \frac{10}{9} \\ &= 0{,}3306 \cdot \frac{1}{900} \cdot 100 - \frac{1}{9} + 0{,}3719 \cdot \frac{1}{10} \cdot 0 + 0{,}2975 \cdot -\frac{1}{18} \cdot 8 + \frac{10}{9} \\ &\approx 0{,}1983 \end{aligned}$$

Dieselbe Vorgehensweise erbringt die Resultate der übrigen Alternativen: $\Phi(a_2) = 0{,}8333$, $\Phi(a_3) = 0{,}4815$, $\Phi(a_4) = 0{,}6111$. *Die Rangfolge lautet deshalb:* $a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1$.

An diesen Ausführungen wird die Bedeutung der Wesentlichkeit und Lösbarkeit deutlich. Diese stellen sicher, dass für jede Ausprägung eine Indifferenzkombination gefunden werden kann.

Folgende Stärken und Schwächen der MAUT können festgestellt werden:

- **Stärken:**
  - Die MAUT ist konsequent theoretisch fundiert. Mit den vorgestellten Anforderungen an die Präferenzen bietet das Verfahren eine sehr gute Handlungsorientierung.

  - Die spezifische Ermittlung von Einzelnutzenfunktionen und Skalierungskonstanten prädestiniert das Verfahren für ein sehr großes Einsatzspektrum.
  - Das Verfahren ist innerhalb der community akzeptiert und weit verbreitet.[251]

- **Schwächen:**
  - Erfüllung der Annahmen, insbes.:
    - Es wird implizit von einer vollständigen, konsistenten und transitiven Präferenzordnung auf dem **gesamten kartesischen Produkt** aus sämtlichen Teilzielen ausgegangen. Es wurde schon demonstriert,[252] dass dies in der Praxis selten der Fall ist.
    - Auf die – in der Praxis – problematischen Implikationen der **Lösbarkeits-Annahme** wurde ebenfalls aufmerksam gemacht.[253]
    - Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass die hier kritisierte Erfüllung der Annahmen – gemeinsam mit anderen Anforderungen[254] – aus messtheoretischer Sicht für die Existenz sämtlicher additiver Nutzenfunktionen gelten. Deshalb ist deren Erfüllung kein spezifisches Problem der MAUT.
  - Praktische Umsetzung:
    - Beim Trade-off-Verfahren wird davon ausgegangen, dass der Akteur in der Lage ist, die verschiedensten Indifferenz-Kombinationen konsistent anzugeben. Das setzt hohe Ansprüche an die Urteilsfähigkeit bzw. an das Vorstellungsvermögen, da es sich ja teilweise lediglich um imaginäre Kombinationen handelt.
    - Die Bestimmung der Einzelnutzenfunktionen wurde hier nicht thematisiert. Dafür existieren verschiedenste Verfahren, die wiederum die Befragung des Akteurs bedingen.[255] Auch dabei wird ein nicht unerhebliches Urteilsvermögen bzw. ein nicht unerheblicher Arbeitsaufwand impliziert.

[251] Vgl. Wallenius et. al. (2008).
[252] Vgl. Bsp. 1.4 auf S. 56.
[253] Vgl. Fortführung von Bsp. 1.4 auf S. 59.
[254] Vgl. Merksatz 1.6 auf S. 63.
[255] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 115–122).

1.4.3.5 Nutzwertanalyse

Die Nutzwertanalyse (NWA) wurde von Zangemeister 1970 entwickelt und ist auch als Scoring-Modell bekannt.[256] Das Präferenzfunktional Φ_{NWA} wird oft als Nutzwert bezeichnet und entspricht der Summe der Teilnutzenwerte u_r der Erfüllung von l Teilzielen, die mit Gewichten g_r versehen sind (vgl. Def. 1.21).[257]

Definition 1.21: *Das Präferenzfunktional einer Alternative bei Verwendung der Nutzwertanalyse $\Phi_{NWA}(a)$ ergibt sich aus:*

$$\Phi_{NWA}(a) = \sum_{r=1}^{l} g_r \cdot u_r(e_r).$$

Die optimale Alternative a_{opt} bei Verwendung der Nutzwertanalyse ist definiert durch E.-regel 1.4.

Entscheidungsregel 1.4: *Bei Anwendung der Nutzwertanalyse ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi_{NWA}(a_{opt}) = \max_i \left[\sum_{r=1}^{l} g_r \cdot u_r(e_{ir}) \right].$$

Die NWA basiert auf folgenden Annahmen:[258]

a) Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Es wird Unabhängigkeit der Präferenzordnung zwischen zwei Alternativen gegenüber dem Hinzufügen weiterer Alternativen gefordert. Dieses Kriterium wird sehr häufig als Anforderung an einen rationalen Aggregations- oder Entscheidungsprozess bzw. eine Präferenzordnung gestellt.[259]

b) Nutzenunabhängigkeit:[260] Die Erklärungen lassen auf eine inhaltliche Übereinstimmung mit der einfachen Unabhängigkeit schließen. Zusätzlich wird auf die Linearität der Indifferenzkurven hingewiesen.[261] Damit ist klar, dass aufgrund von Merksatz 1.8 auf S. 71 implizit auch von einer

[256] Der Begriff des *Scoring-Modells* als Synonym für die NWA ist primär im deutschsprachigen Raum verbreitet. Im englischsprachigen Bereich existiert zwar eine Reihe von Scoring-Modellen, diese weisen jedoch nicht zwingend Ähnlichkeiten zur NWA auf. Das inhaltlich ähnlichste Pendant im englischsprachigen Raum zur NWA ist das *Weighted Sum Model*.

[257] Vgl. Zangemeister (1976: 84); Schneeweiß (1991: 122).

[258] Für die Annahmen a) bis c) vgl. Zangemeister (1976: 75–85) und für d) vgl. Zangemeister (1976: 272–277).

[259] Vgl. z. B. Axiom 1.5.5 auf S. 116 sowie Axiom 1.6.9 auf S. 167.

[260] Vgl. Zangemeister (1976: 78–84).

[261] Vgl. Zangemeister (1976: 85–86).

wechselseitigen Unabhängigkeit (vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61) ausgegangen wird.

c) Existenz einer linearen, monoton-steigenden Gesamtnutzenfunktion: Mit dieser Annahme wird deutlich, dass es sich um ein multiattributives, additives Modell handelt. Offen bleibt, von welchem Kardinalitäts-Verständnis bei dieser Annahme und dem Hinweis auf eine kardinale Präferenzmessung ausgegangen wird. Die Ausführungen lassen ein Kardinalitäts-Verständnis nach Def. 1.7 auf S. 22 vermuten.

d) Standardisierung der verwendeten Skalen: In der Grundkonzeption der NWA wird auf die Problematik der abweichenden Skalenlängen für unterschiedliche Teilkriterien[262] hingewiesen.[263]

Die NWA besteht aus den folgenden Schritten:[264]

1. Auswahl/Festlegung der Teilziele,
2. Prüfung der Kriterien auf Unabhängigkeit,
3. Ermittlung der Gewichtungsfaktoren der Teilziele g_r,
4. Bestimmung der Nutzwerte der Ergebnisse der Teilziele $u_r(e_r)$,
5. Berechnung des Gesamtnutzens der Alternativen,
6. Beurteilung der relativen Vorteilhaftigkeit.

Dies wird nun durch Fortführung des bisherigen Beispiels 1.9 demonstriert.

Fortführung des Beispiels 1.9 von S. 78:

*Die ersten beiden Schritte sind als erfüllt einzustufen. Im **dritten Schritt** erfolgt die Festlegung der Teilzielgewichte. An dieser Stelle wird nochmals auf die prinzipielle Abhängigkeit der Gewichte von den Skalen hingewiesen.*[265]*. Die verschiedenen Verfahren zur Ermittlung der Gewichte wurden schon vorgestellt.*[266] *Für das vorliegende Beispiel gilt:* $g_1 = 0{,}40$, $g_2 = 0{,}20$ und $g_3 = 0{,}40$. *Im **vierten Schritt** wird die Erfüllung der Teilkriterien beurteilt. Zur Erfassung der Erfüllung eines Teilkriteriums wird eine Skala von 0 bis 10 verwendet. Der Wert 0 drückt die schlechteste Erfüllung und der Wert 10 die beste Erfüllung des Teilzieles zum Ausdruck. Die Ausprägungen der Teilziele werden von Tab. 1.17 auf S. 78 übernommen und für die 10-Stufen-Skala „übersetzt". Das Ergebnis dieser Bewertung sowie die Ergebnisse des **fünften Schritts** sind in der Tabelle 1.18 zu sehen.*

---

[262] Wie im Abschn. 1.4.3.3.2 auf S. 70 vorgestellt.

[263] Vgl. Zangemeister (1976: 167–169 und 216–244).

[264] Vgl. Zangemeister (1976: 73); Götze (2014: 193).

[265] Zur Illustration der Problematik vgl. Bspl. 1.7 auf S. 67.

[266] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.3 auf S. 73.

Tab. 1.18: Nutzwertanalyse zur Standortauswahl. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Teilziele: r_1 : Größe ($g_1 = 0{,}40$)		r_2 : Ästhetik ($g_2 = 0{,}20$)		r_3 : Entfernung ($g_3 = 0{,}40$)		Funktional: $\sum_{r=1}^{3} g_r \cdot u_r(e_{ir})$
	m^2	$u_1(e_{i1})$	Note	$u_2(e_{i2})$	km	$u_3(e_{i3})$	
a_1	100	0	2	2	8	6	**2,80**
a_2	1000	10	5	5	2	10	**9,00**
a_3	500	5	10	10	20	0	**4,00**
a_4	600	6	10	10	15	2,5	**5,40**

Auf Basis dieser Darstellung kann im ***sechsten Schritt*** *die relative Vorteilhaftigkeit durch die Präferenzfolge $a_2 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_1$ festgestellt werden.*

Folgende Vor- und Nachteile der NWA können zusammengefasst werden:

- **Stärken:**
  - Positiv hervorzuheben sind die einfache Handhabung und die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten.
  - Im deutschsprachigen Raum ist die NWA weit verbreitet und akzeptiert.
- **Schwächen:**
  - Mit der Annahme von linearen Indifferenzkurven zwischen sämtlichen Teilzielen wird implizit von einer vollständigen, konsistenten und transitiven Präferenzordnung auf dem **gesamten kartesischen Produkt** aus sämtlichen Teilzielen ausgegangen. Es wurde schon darauf hingewiesen, dass dies in der Praxis selten der Fall ist.[267]
  - Mit der Annahme von linearen Indifferenzkurven wird gleichzeitig die Erfüllung der Lösbarkeit[268] und der wechselseitigen Unabhängigkeit[269] vorausgesetzt.

1.4.3.6 Analytischer Hierarchieprozess

Der Analytische Hierarchieprozess (AHP) wurde von Saaty theoretisch begründet und frühzeitig auch praktisch eingesetzt.[270] Ursprünglich wurde die Methode zur konsistenten Bestimmung der **Zielgewichte** entwickelt, da aus psychologischen Studien bekannt war, dass Entscheidungsträger bei der Zuordnung von Gewichtungen häufig inkonsistent sind. Weitere Verfahren zur

[267] Vgl. Bsp. 1.4 auf S. 56.
[268] Vgl. Anf. 1.4.2 auf S. 58.
[269] Vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61.
[270] Vgl. Saaty (1977a); Saaty (1977b); Saaty (1980). Thomas Saaty (1926–2017).

Festlegung der Zielgewichte wurden an anderer Stelle bereits vorgestellt, weshalb darauf verwiesen wird.[271]

Der AHP basiert auf lediglich vier Axiomen und erzeugt eine **ordinale Reihung** der Alternativen auf Basis der ermittelten Gewichte. Die Axiome betreffen nicht die Präferenzen des Akteurs, sondern die Zuordnung der Gewichte und die Struktur der Hierarchie. Die **Grundaussage des AHP** lautet: Wenn die Matrix der Paarvergleiche konsistent und hierarchisch im Sinne der vier Axiome ist, so ist diejenige Alternative mit der höchsten Summe aller Gewichte die optimale Alternative.[272]

Der AHP möchte eine ordinal konsistente Reihung der Alternativen dadurch sicherstellen, dass für den Bewertungsvorgang selbst Vorschriften gemacht werden. Eine nutzen-theoretische Begründung ist nicht beabsichtigt. Grundlage jedoch ist ein additives Präferenzfunktional, weshalb die vorgestellten Anforderungen an die Präferenzrelationen zu berücksichtigen sind.[273]

Der gesamte Bewertungsprozess besteht aus der Zuweisung relativer Wichtigkeiten für Teilziele getrennt nach den Hierarchiestufen und einer anschließenden simultanen Ermittlung von Gewichtungsfaktoren. Die wesentlichen Alleinstellungsmerkmale des AHP sind:

a. **hierarchische Ableitung** von Teilzielen aus übergeordneten Zielen,
b. direkte Paarvergleiche auf Basis einer 9-Punkte-Skala,
c. Ermittlung der Zielgewichte mittels **Eigenwertverfahren** sowie
d. Ignoranz der Ursprungsskalen der Teilziele.

Der Akteur muss deshalb lediglich die relative Bedeutung der Teilziele untereinander bestimmen, um anschließend eine ordinal konsistente Reihung der Alternativen zu erhalten. Um welche Art von Teilzielen es sich handelt und auf welcher Skala diese gemessen werden, ist für das Verfahren unerheblich.

Die konkrete Vorgehensweise ist wie folgt:[274]

1. Bestimmung und Hierarchisierung der Zielkriterien,
2. Ermittlung der Zielbeiträge einer Hierarchiestufe zu den Zielen der übergeordneten Ebene mittels direkter Paarvergleiche und Eigenwertverfahren (inklusive Konsistenzprüfung),
3. Ermittlung der Zielbeiträge für alle weiteren Hierarchiestufen – einschließlich der Ebene der Alternativen – mittels direkter Paarvergleiche und Eigenwertverfahren (inklusive Konsistenzprüfung),
4. Ermittlung der Gesamtnutzenwerte der Alternativen,

[271] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.3 auf S. 73.
[272] Vgl. Saaty (1977a: 240); Saaty (1987: 166–168); Ossadnik (1998: 99–107).
[273] Vgl. Merksatz 1.6 auf S. 63 sowie French (1988: 359).
[274] Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991: 70); Obermaier/Saliger (2020: 64).

5. Beurteilung der relativen Vorteilhaftigkeit.

Zur Erfüllung eines Fundamentalzieles werden beim AHP mehrere Instrumentalziele in streng hierarchischer Beziehung abgeleitet. Dies ermöglicht die Ermittlung der Zielbeiträge für alle Hierarchiestufen (vgl. Abbildung 1.14).

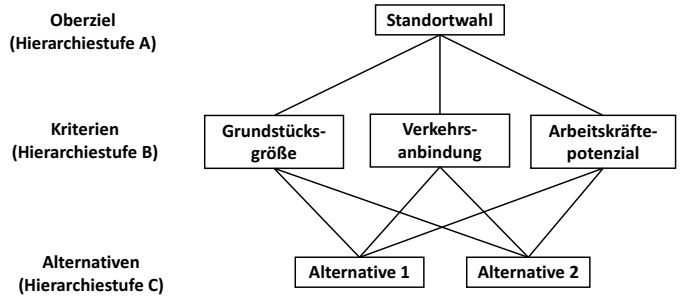


Abb. 1.14: Hierarchische Grundstruktur des AHP. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Saaty (1977a: 258–259); Saaty (1986: 842); Saaty (1990: 14).

Diese Vorgehensweise, die zur Namensgebung des Verfahrens beitrug, wird mittels direkter Paarvergleiche und auf Basis einer **Neun-Punkte-Skala** durchgeführt. Dabei wird der Entscheidungsträger gefragt, wie wichtig ein Unterziel k_1 im Vergleich zu einem anderen Unterziel k_2 im Hinblick auf die Erfüllung des übergeordneten Zieles ist. Bei der Aufstellung der Zielhierarchie ist darauf zu achten, dass die Ziele einer Ebene miteinander konkurrieren können, jedoch in Bezug auf das übergeordnete Ziel in einer komplementären Beziehung stehen müssen. Zur Beurteilung der relativen Bedeutung wird die ordinale Skalierung entsprechend der Tabelle 1.19 verwendet.

Für die Bewertung der Alternativen der einzelnen Hierarchiestufen greift der AHP auf ein spezielles Verfahren, das Eigenwertverfahren zurück. Ausgangspunkt des Verfahrens ist die Matrix der paarweisen Vergleiche der relativen Bedeutung der Teilziele entsprechend der Skala aus Tabelle 1.19 sowie die hierarchischen Beziehungen.

Tab. 1.19: Skala der relativen Wichtigkeit. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Saaty (1980: 54); Saaty (1986: 843); Ossadnik (2009: 369).

Intensität der relativen Bedeutung	**Definition**	**Erklärung**
1	Gleiche Bedeutung	Zwei Unterziele weisen dieselbe Wichtigkeit für die Erreichung des Oberzieles auf.
3	Gering höhere Bedeutung eines Unterzieles im Vergleich zum anderen	Erfahrung und Einschätzung indizieren eine leicht höhere Bedeutung eines Unterzieles.
5	Wesentlich oder stark höhere Bedeutung eines Unterzieles im Vergleich zum anderen	Erfahrung und Einschätzung indizieren eine wesentlich höhere Bedeutung eines Unterzieles.
7	Erwiesene Bedeutung	Ein Unterziel ist wesentlich bedeutender als das andere, so dass dessen Dominanz in der Praxis schon gezeigt wurde.
9	Extreme Bedeutung	Ein Unterziel ist extrem bedeutender als das andere, so dass der größtmögliche Bedeutungsunterschied erreicht wird.
2,4,6,8	Zwischenwerte	Werte, die zur Abstufung dienen.
Reziprokwerte der oberen Zeilen	Wenn einem Unterziel k_1 im Vergleich mit dem Unterziel k_2 einer der oberen Werte zugeteilt wurde, bedeutet dies eine reziproke Wichtigkeit des Unterzieles k_2 in Bezug auf k_1.	

Im ersten Schritt wird der Beitrag der Elemente der zweitwichtigsten Hierarchiestufe B zur Zielerreichung der wichtigsten Hierarchiestufe A ermittelt. Werden zwei Teilziele der zweiten Hierarchiestufe b_1 und b_2 betrachtet, so wird das Verhältnis der relativen Bedeutungsgewichte bezeichnet mit $\alpha_{12} = \frac{g_{b_1}}{g_{b_2}}$. Diese Matrix weist bei B Instrumentalzielen folgende Grundstruktur auf:[275]

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1B} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{B1} & \alpha_{B2} & \alpha_{B3} & \cdots & \alpha_{BB} \end{pmatrix}$$

Werden die Konsistenz- und die Reziprozitätsbedingung für konsistente Paarvergleiche berücksichtigt bzw. erfüllt,[276] resultiert die konsistente Paarvergleichsmatrix in dieser Form:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1B} \\ \frac{1}{\alpha_{12}} & 1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_{1B}} & \frac{1}{\alpha_{2B}} & \frac{1}{\alpha_{3B}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[275] Vgl. Schneeweiß (1991: 160).

[276] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.3 auf S. 73.

Festzuhalten ist an dieser Stelle, dass der AHP von empirischen, möglicherweise inkonsistenten Paarvergleichen ausgeht und diese in eine möglichst konsistente Darstellung übersetzt. Dies soll derart geschehen, dass die konsistente Paarvergleichsmatrix möglichst wenig von der empirischen Matrix abweicht.[277] Ausgehend von einer inkonsistenten Vergleichsmatrix A wird mittels des Eigenwertverfahrens der Vektor $\overrightarrow{a}$ bestimmt, der zu einer annähernd konsistenten Paarvergleichsmatrix führt.[278] Ist A eine **quadratische Matrix** der Ordnung l, werden ein Eigenwert λ und ein zugehöriger Eigenvektor $\overrightarrow{a}$ gesucht, für welche gilt: $A \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{a}$. Die Spur der Matrix A ist definiert durch:[279]

$$SpurA = \sum_{r=1}^{l} \alpha_{rr}.$$

Aufgrund der Identität der Spur einer Matrix mit der Summe der Eigenwerte kann formuliert werden:

$$\sum_{r=1}^{l} \alpha_{rr} = \sum_{r=1}^{l} \lambda_r.$$

Dies führt im Fall der konsistenten Vergleichsmatrix zu:

$$\sum_{r=1}^{l} \frac{\alpha_r}{\alpha_r} = l = \sum_{r=1}^{l} \lambda_r.$$

Da in der konsistenten Vergleichsmatrix alle Spalten Vielfache voneinander sind folgt $rang(\overline{A}) = 1$. Somit weisen die Eigenwerte bis auf einen den Wert null auf. Aus dem vorangegangenen Zusammenhang ist ersichtlich, dass es sich bei diesem Eigenwert um l handeln muss. Damit ist l der maximale Eigenwert, mit $\lambda_{max} = l$. Auf Basis dieser Beziehungen wird derjenige Eigenvektor der inkonsistenten Paarvergleichsmatrix A gesucht, welcher zum **maximalen Eigenwert** gehört. Ausgehend von der Darstellung $A \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{a}$ und einigen Umformungen[280] folgt das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda_{max} \cdot E) \cdot \overrightarrow{a}_{max} = 0.$$

Dabei wird mit E die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Lösung dieses Gleichungssystems führt zum gesuchten maximalen Eigenwert λ_{max} und zum maximalen Eigenvektor $\overrightarrow{a}_{max}$.

Zur Beurteilung der Konsistenz der resultierenden Matrix ist der Konsistenzindex KI zu ermitteln. Dieser ist definiert durch:[281]

---

[277] Vgl. Ossadnik (2009: 371); Klein/Scholl (2011: 392–393).

[278] Vgl. Saaty (1980: 49–51).

[279] Vgl. Schneeweiß (1991: 166).

[280] Vgl. Saaty (1990: 12–13); Ossadnik (1998: 99–116); Ossadnik (2009: 372).

[281] Vgl. Saaty (1990: 13); Saaty/Vargas (2012: 9).

$$KI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}.$$

Bei der Beurteilung der Konsistenz einer Matrix ist zu berücksichtigen, dass mit zunehmender Größe der Matrix – was gleichbedeutend ist mit einer steigenden Anzahl an Alternativen bzw. Attributen – das Ausmaß der Inkonsistenzen tendenziell zunimmt. Aus diesem Grunde wird versucht, diesen Effekt durch den Vergleich des ermittelten Konsistenzindex KI mit einem „Durchschnittswert" DW zu relativieren. Die Werte dieses Durchschnitts sind in Tabelle 1.20 zu sehen, wobei DW_{Saaty} die durchschnittlichen Werte nach Saaty und $DW_{Don/Dodd}$ die durchschnittlichen Werte nach Donegan und Dodd bezeichnen.

Tab. 1.20: Durchschnittliche Konsistenzwerte. Quelle: Saaty (1980: 21); Donegan/Dodd (1991: 136).

Kenngröße \ Matrixdimension	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DW_{Saaty}	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49
$DW_{Don/Dodd}$	0,00	0,00	0,4887	0,8045	1,0591	1,1797	1,2519	1,3171	1,3733	1,4055

Kenngröße \ Matrixdimension	11	12	13	14	15	20	40	60	80	100
DW_{Saaty}	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59	-	-	-	-	-
$DW_{Don/Dodd}$	1,4213	1,4497	1,4643	1,4822	1,4969	1,5375	1,5976	1,6178	1,6277	1,6339

Auf Basis dieser Referenzwerte wird eine Konsistenzrelation KR berechnet, die das Verhältnis zwischen dem Konsistenzindex KI und dem Durchschnittswert gleich großer Matrizen angibt und wie folgt ermittelt wird:[282]

$$KR = \frac{KI}{DW}.$$

Konsistenzrelationen von $KR > 0{,}10$ gelten als kritisch.[283] In diesem Fall sollten die Paarvergleiche nochmals überprüft werden, um die Konsistenz zu verbessern.

Die Bewertung der Alternativen der nächst geringeren Hierarchiestufe C erfolgt nach derselben Systematik und Skalierung wie bei der Bewertung der übergeordneten Teilziele. Mittels direkter Paarvergleiche muss der Akteur

[282] Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991: 59–60).

[283] Vgl. Saaty/Vargas (2012: 9).

feststellen, in welchem Maße die Alternativen der Hierarchie C zur Erfüllung der übergeordneten Teilziele B beitragen. Dabei wird wiederum der Beitrag einer Alternative c_1 in Relation zur Alternative c_2 gesetzt. Zur Abbildung dieser Relation wird der Term β verwendet, welcher definiert ist durch $\beta_{12} = \frac{g_{c_1}}{g_{c_2}}$. Damit wird die relative Wichtigkeit des Beitrags einer Alternative c_1 mit g_1 bezeichnet und ins Verhältnis gesetzt zur Wichtigkeit der Alternative c_2, welche mit g_2 bezeichnet wird. Der Eigenvektor der derart strukturierten Paarvergleichsmatrizen liefert die Beiträge der Alternativen zur Teilzielerfüllung, also die Wertfunktion der Alternativen.

Nach der Ermittlung der Beiträge aller Alternativen der verschiedenen Hierarchiestufen wird der Gesamtnutzwert aller Alternativen ermittelt. Das Präferenzfunktional bei Verwendung des AHP ergibt sich mit Def. 1.22.[284]

Definition 1.22: *Das Präferenzfunktional einer Alternative bei Verwendung des AHP $\Phi_{AHP}(a)$ ergibt sich aus:*

$$\Phi_{AHP}(a) = \sum_{b=1}^{B} \omega_b \cdot \rho_b.$$

Dabei bezeichnet:

- ω_b den Beitrag, den die Elemente der Hierarchiestufe B zur Erfüllung der Teilziele der übergeordneten Hierarchiestufe A leisten und
- ρ_b den Beitrag der Alternative a auf der Stufe C zur Erfüllung der Teilziele der direkt übergeordneten Hierarchiestufe B.

Der AHP-Nutzwert der Alternative a, welche sich auf dem untersten Hierarchieniveau C befindet, resultiert aus dem Beitrag, den a für die direkt übergeordnete Hierarchiestufe B erbringt, und aus der Summe der Beiträge, welche die Alternativen der Hierarchiestufe B zur nächst höheren Hierarchiestufe A erbringen.[285] Die optimale Alternative a_{opt} ist definiert durch E.-regel 1.5.

Entscheidungsregel 1.5: *Bei Anwendung des AHP ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi_{AHP}(a_{opt}) = \max_i \left[\sum_{b=1}^{B} \omega_b \cdot \rho_b \right].$$

Zum Verständnis wird das Eingangs-Beispiel 1.9 aufgegriffen.

[284] Vgl. Schneeweiß (1991: 157).

[285] Vgl. Abb. 1.14 auf S. 86.

Fortführung des Beispiels 1.9 von S. 78:

Der Akteur verwendet zur Ableitung der Zielgewichten den direkten Paarvergleich und die 9-Punkte-Skala. Es resultiert die Paarvergleichsmatrix in Tabelle 1.21.

Tab. 1.21: Paarvergleichsmatrix der Kriterien der Hierarchiestufe B. Quelle: Eigene Darstellung.

Teilziel / Teilziel	b_1 (Größe)	b_2 (Ästhetik)	b_3 (Entfernung)
b_1 (Größe)	1	1/3	7
b_2 (Ästhetik)	3	1	9
b_3 (Entfernung)	1/7	1/9	1

Zur Ermittlung des Eigenvektors wird auf ein Näherungsverfahren zurückgegriffen. Die Zeilensummen werden durch Dividieren mit der Zeilengesamtsumme normalisiert, woraus sich der approximierte Eigenvektor ergibt. Das ist in der folgenden Übersicht dargestellt.

1. Iteration			
Ausgangsmatrix	Quadrierte Matrix	Zeilensumme	Eigenvektor
$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1/7 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1{,}444 & 17 \\ 7{,}286 & 3 & 39 \\ 0{,}619 & 0{,}269 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21{,}444 \\ 49{,}286 \\ 3{,}889 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}2874 \\ 0{,}6605 \\ 0{,}0521 \end{pmatrix}$
	Summe	74,619	1,0000
2. Iteration			
Ausgangsmatrix	Quadrierte Matrix	Zeilensumme	Eigenvektor
$\begin{pmatrix} 3 & 1{,}444 & 17 \\ 7{,}286 & 3 & 39 \\ 0{,}619 & 0{,}269 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30{,}048 & 13{,}254 & 158{,}333 \\ 67{,}857 & 30{,}048 & 357{,}857 \\ 5{,}680 & 2{,}513 & 30{,}048 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 201{,}635 \\ 455{,}762 \\ 38{,}241 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}2898 \\ 0{,}6552 \\ 0{,}0549 \end{pmatrix}$
	Summe	695,638	1,0000
3. Iteration			
Ausgangsmatrix	Quadrierte Matrix	Zeilensumme	Eigenvektor
$\begin{pmatrix} 30{,}048 & 13{,}254 & 158{,}333 \\ 67{,}857 & 30{,}048 & 357{,}857 \\ 5{,}680 & 2{,}513 & 30{,}048 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.701{,}61 & 1.194{,}43 & 14.258{,}11 \\ 6.110{,}62 & 2.701{,}61 & 32.249{,}56 \\ 511{,}898 & 226{,}320 & 2.701{,}61 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 18.154{,}147 \\ 41.061{,}787 \\ 3.439{,}829 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0{,}2897 \\ 0{,}6554 \\ 0{,}0549 \end{pmatrix}$
	Summe	62.655,763	1,0000

Das Verfahren wird nach der vierten Iteration abgebrochen, da die Differenz der Eigenwerte im Vergleich zur dritten Iteration lediglich minimal ist. Zur Konsistenzprüfung ist der maximale Eigenwert λ_{max} zu ermitteln. Bei Verwendung des Eigenvektors der dritten Iteration aus obiger Tabelle als $\overrightarrow{a}_{max}$ resultiert:

$$A \cdot \overrightarrow{a}_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1/7 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}289744 \\ 0{,}655355 \\ 0{,}054900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}89250 \\ 2{,}01869 \\ 0{,}16911 \end{pmatrix}$$

Der maximale Eigenwert λ_{max} beträgt demzufolge 3,0803. Eine Überprüfung der Resultate mit dem zugrundeliegenden Gleichungssystem zeigt:

$$(A - \lambda_{max} \cdot E) \cdot \overrightarrow{a}_{max} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 1/7 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}0803 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}0803 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}0803 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0{,}289744 \\ 0{,}655355 \\ 0{,}054900 \end{pmatrix} = 0$$

Die Ergebnisse λ_{max} und $\overrightarrow{a}_{max}$ stellen demzufolge die Lösung des Ausgangsproblems dar. Es ergibt sich ein Konsistenzindex von $KI = \frac{3{,}0803 - 3}{2} = 0{,}040$. Dieser führt zu einer Konsistenzrelation von $KR = 0{,}069$. Der Wert KR weist auf eine ausreichende Konsistenz der Ergebnisse hin. Damit gelten für die Beiträge der Instrumentalziele der Hierarchieebene B zum Oberziel der Hierarchiestufe A (was gleichbedeutend ist mit den Zielgewichten für die Merkmale des Grundstückes) folgende Werte: $\omega_1 = 0{,}2897$, $\omega_2 = 0{,}6554$ und $\omega_3 = 0{,}0549$. Nach der Bestimmung der Gewichte der drei Teilziele sind die verfügbaren Alternativen, die auf der Hierarchiestufe C angesiedelt sind, auf ihre Beiträge zu den übergeordneten Teilzielen hin zu untersuchen. Der Annahme gemäß stehen dem Akteur vier Alternativen zur Auswahl. Diese Alternativen werden wiederum mit der 9-Punkte-Skala hinsichtlich der Erfüllung der drei übergeordneten Instrumentalziele bewertet. Die Paarvergleichsmatrizen der Bewertungen durch den Akteur sowie die daraus resultierenden Eigenwerte und Eigenvektoren sind im Folgenden dargestellt:

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels b_1

Paarvergleichsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 & 5 \\ 1/9 & 1 & 0{,}25 & 1/3 \\ 1/3 & 4 & 1 & 1 \\ 0{,}20 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse:

$$\overrightarrow{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}6019 \\ 0{,}0545 \\ 0{,}1885 \\ 0{,}1552 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p}_1$$

$\lambda_{max} = 4{,}0432$
$KI = 0{,}01439$
$KR = 0{,}01616$

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels b_2

Paarvergleichsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1/3 & 0{,}20 \\ 9 & 1 & 8 & 5 \\ 3 & 1/8 & 1 & 0{,}25 \\ 5 & 0{,}20 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse:

$$\overrightarrow{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}0445 \\ 0{,}6593 \\ 0{,}0834 \\ 0{,}2129 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p}_2$$

$\lambda_{max} = 4{,}2316$
$KI = 0{,}0772$
$KR = 0{,}0867$

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels b_3

Paarvergleichsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}20 & 0{,}25 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 9 \\ 4 & 1/3 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/9 & 0{,}20 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse:

$$\overrightarrow{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}1054 \\ 0{,}5717 \\ 0{,}2739 \\ 0{,}0490 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p}_3$$

$\lambda_{max} = 4{,}1304$
$KI = 0{,}0435$
$KR = 0{,}0488$

Auf Basis dieser Ergebnisse werden die AHP-Nutzwerte wie folgt ermittelt:

- $\Phi_{AHP}(a_1) = 0{,}2093$
- $\Phi_{AHP}(a_2) = 0{,}4792$
- $\Phi_{AHP}(a_3) = 0{,}1243$
- $\Phi_{AHP}(a_4) = 0{,}1872$

Die relative Vorteilhaftigkeit ist demzufolge: $a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_3$.

Zum Schluss kann der AHP wie folgt eingeschätzt werden:

- **Stärken:**
  - Die Hierarchie zwischen den Zielen und Alternativen wird offengelegt.
  - Mit der 9-Punkte-Skala wird der Akteur gezwungen, sich Gedanken über die relativen Wichtigkeiten zu machen.[286]
  - Mittels Eigenwertverfahren werden die Gewichte für die Menge der vorliegenden Alternativen „maßgeschneidert“. Das wird jedoch mit einigen Schwächen erkauft, auf die noch hingewiesen wird.
  - Darüber hinaus sind mit dem Konsistenzmaß KI und der Konsistenzrelation KR Indikatoren verfügbar, die auf Inkonsistenzen bei der Bewertung hinweisen.
  - Vorteilhaft erscheint der Verzicht auf Rationalitätspostulate bzw. auf Anforderungen an die Präferenzen. Die vier Axiome betreffen den Bewertungsvorgang selbst, weshalb die theoretischen Grundanforderungen als eher gering bzw. leicht erfüllbar einzustufen sind.
  - Die Einsatzmöglichkeiten sind äußerst umfangreich.[287]
  - Mit dem *International Journal of the Analytic Hierarchy Process* liegt seit 2009 eine eigenständige Zeitschrift vor, welche sich intensiv mit dem Verfahren beschäftigt. Darin sind viele Hinweise zur praktischen Umsetzung enthalten, aber auch kritische Anmerkungen bzw. Erfahrungsberichte. Das Verfahren war Gegenstand einer umfangreichen akademischen Diskussion und ist innerhalb der community - in dem Wissen um die Schwächen - weitestgehend akzeptiert.[288]
  - Zur Umsetzung des AHP existiert eine Reihe von Zusatzpaketen für Standardsoftware oder eigenständige Software (z. B. ExpertChoice®), die die Anwendung stark vereinfachen.
- **Schwächen:**
  - Theoretische Schwächen:
    - Der AHP ist ein additives Präferenzfunktional und setzt deshalb die Eigenschaften der Präferenzen gemäß Merksatz 1.6 voraus,[289] wozu auch die starke Anforderung wechselseitiger Unabhängigkeit zählt.[290] In dem Merksatz wurde darauf hingewiesen, dass die Teilnutzenfunktionen kardinaler Natur sind. Mit dem vorgestellten Eigenwertverfahren werden jedoch noch stärkere Ansprüche an die Nutzenfunktionen des Akteurs gestellt. Diese setzt die Nutzenmessung nicht nur auf einer Intervallskala, sondern sogar auf

[286] Vgl. Peters/Zelewski (2004: 319).
[287] Vgl. Riedl (2006: 115–119); Vaidya/Kumar (2006).
[288] Vgl. Wallenius et. al. (2008).
[289] Vgl. S. 63.
[290] Vgl. Kamenetzky (1982: 705).

einer **Verhältnisskala** voraus.[291] Damit müssen die Anforderungen an die Präferenzen umfassender bzw. restriktiver sein, als bei den bisher vorgestellten Verfahren.[292]

- Das Verfahren ist nicht unabhängig gegenüber irrelevanten Alternativen (Rangreversion). Es konnte gezeigt werden, dass sowohl ein Hinzufügen von irrelevanten Alternativen als auch von indifferenten Kriterien die ursprüngliche Reihenfolge verändert.[293] Zusätzlich ist es möglich, dass der AHP eine Reihenfolge erzeugt, die gar nicht existiert.[294] Diese Aspekte sind mit Blick auf die originäre Zielstellung einer konsistenten ordinalen Reihenfolge von besonderer Bedeutung.
- Worin der wesentliche Vorteil der Ermittlung der Gewichtungsfaktoren im Vergleich zur Ermittlung der Skalierungsfaktoren der MAUT liegt, bleibt offen. Bei der MAUT wird der Akteur im Rahmen des Trade-off-Verfahrens ebenfalls gezwungen, sich mit seinen Präferenzen auseinander zu setzen.
- Durch die Verwendung von relativen Wichtigkeiten der Teilkriterien wird der Zusammenhang zwischen Skalenlänge des Teilziels einerseits und der Skalierungskonstanten andererseits ignoriert.[295] Das wurde illustriert.[296]
- Mit Blick auf die 9-Punkte-Skala ist anzuführen, dass der Unterschied zwischen den Bewertungseinheiten nicht so klar ist, wie es durch die Skala suggeriert wird.
- Darüber hinaus kann die 9-Punkte-Skala zu inkonsistenten Bewertungen durch die obere Limitierung führen. Die Konsistenzbedingung als eine Grundanforderung an konsistente Paarvergleiche hatte gezeigt, dass zwischen den Teilzielen die Relation $\alpha_{hi} \cdot \alpha_{ij} = \alpha_{hj}$ gelten muss. Wird nun im Rahmen der Paarvergleiche $\alpha_{hi} = 5$ und $\alpha_{ij} = 5$ gesetzt, müsste resultieren: $\alpha_{hj} = 25$. Dies ist jedoch auf der 9-Punkte-Skala nicht möglich.

- Praktische Unzulänglichkeiten: Diese bestehen im Wesentlichen im hohen Rechenaufwand und der Datenermittlung. Für alle Elemente jeder Ebene sind Vergleiche hinsichtlich aller Elemente der übergeordneten Ebene durchzuführen.

[291] Vgl. Tab. 1.5 auf S. 25.

[292] Vgl. French (1988: 359).

[293] Vgl. Zimmermann/Gutsche (1991: 91); Ossadnik (1998: 120–129); Pérez/Jimeno/Mokotoff (2006).

[294] Vgl. Schenkerman (1997).

[295] Vgl. Nitzsch (1992: 35–37).

[296] Vgl. Bsp. 1.7 auf S. 67.

1.4.3.7 Goal-Programming

Dieses Verfahren wurde 1955 vorgestellt[297] und basiert nicht auf theoretischen Vorarbeiten zum additiven Nutzen. Trotzdem erfolgt die Verrechnung der Zielerreichung in unterschiedlichen Teilzielen. Das Verfahren ist kompensatorischen Charakters, jedoch sind die Annahmen über die Präferenzen nur implizit enthalten.[298] Offensichtlich werden die "Nutzenabweichungen" für jedes Teilziel addiert und anschließend summiert. Demzufolge müssen die Anforderungen an additive Präferenzstrukturen erfüllt sein.

Das Modell beruht auf der Vorgabe von subjektiv festzulegenden Soll-Werten für jedes Teilziel. Dem Akteur wird empfohlen, diejenige Alternative zu wählen, die in der Summe die gegebenen Ziele am besten erreicht, also deren Summe der absoluten Abweichungen minimal ist. Das bedeutet, dass im Unterschied zu den bisherigen Ansätzen nicht ausschließlich die Extremierung der Zielgröße, sondern auch die Satisfizierung als Ziel berücksichtigt werden kann. Dazu wird für jedes Ziel aus $k_r (r = 1,...,l)$ ein Wert e_r^* vorgegeben. Der Entscheidungsträger sucht nun diejenige Alternative, welche der Summe dieser „Wunschziele" am Nächsten kommt.

Das Präferenzfunktional lautet: $\Phi(a) = \sum_{r=1}^{l} |e_{ir} - e_r^*|$. Diese Regel ist eines der wenigen Beispiele, in denen das Präferenzfunktional minimiert wird, weshalb die optimale Alternative a_{opt} durch E.-regel 1.6 beschrieben ist.[299]

Entscheidungsregel 1.6: *Bei Anwendung des Goal Programming ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \min_i \left[\sum_{r=1}^{l} |e_{ir} - e_r^*| \right].$$

Dieses Verfahren wird nun durch Fortführung des Beispiels kurz erläutert.

[297] Vgl. Charnes/Cooper/Ferguson (1955).
[298] Vgl. Dyer (2016: 306–309).
[299] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 56).

Fortführung des Beispiels 1.3 von S. 50:

Es werden die Eingangsdaten des Beispiels verwendet und zusätzlich folgende Wunschzielwerte angenommen: $e_1^* = 12$, $e_2^* = 13$ sowie $e_3^* = 17$. Im einleitenden Abschnitt 1.4.1 auf S. 45 wurde darauf hingewiesen, dass eine Prüfung der Alternativenmenge auf ineffiziente Alternativen für dieses Verfahren nicht sinnvoll ist. Deshalb wird die als ineffizient identifizierte Alternative a_4 wieder in die Analyse eingebunden. Damit ergeben sich die Werte in der Tabelle 1.22.

Tab. 1.22: Anwendungsbeispiel des Goal-Programming. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.9 auf S. 51.

Alternative	Abweichungen			Funktional: $\sum_{r=1}^{l} \lvert e_{ir} - e_r^* \rvert$	
	$\lvert e_{i1} - e_1^* \rvert$	$\lvert e_{i2} - e_2^* \rvert$	$\lvert e_{i3} - e_3^* \rvert$		
a_1	2	7	1	**10**	
a_2	2	6	1	**9**	
a_3	3	6	2	**11**	
a_4	3	0	2	**5**	⇐ **min**
a_5	4	5	5	**14**	

Da bei Alternative a_4 die Summe aller Abweichungen vom Wunschziel am geringsten ist, wird diese gemäß des Goal-Programming-Ansatzes als optimale Alternative identifiziert. Es ist offensichtlich, dass eine andere Festlegung der „Wunschzielwerte" zu einer anderen Reihung führen würde.

Der Vorteil des Verfahrens besteht in der Kompensation sowohl von Zielüberschreitungen als auch von Zielunterschreitungen. Im Beispiel wurde jedoch auch der große Einfluss der Wunschzielwerte deutlich. Das Verfahren lässt sich durch die Bestimmung von Gewichtungsfaktoren für die Teilziele weiter detaillieren.[300]

1.4.4 Zusammenfassende Kritik

Die vorgestellten Verfahren stammen aus der Gruppe des Multi-Attribute-Decision-Making (MADM) und gehen deshalb von einer vorgegebenen Menge an Lösungsalternativen aus. Für multikriterielle Probleme sind jedoch auch Methoden des Multi-Objective-Decision-Making (MODM) relevant.[301] Diese wurden nicht erläutert, weshalb stattdessen auf die weiterführende Literatur

[300] Vgl. Klein/Scholl (2011: 364).

[301] Vgl. Abschn. 1.4.1 auf S. 45.

verwiesen wird.[302] In Ergänzung zur Kritik der vergangenen Abschnitte wird auf folgende Probleme aufmerksam gemacht:

- **Kompensatorischer Charakter:** Das Präferenzfunktional ist additiver und somit kompensatorischer Natur. Es wird angenommen, dass ein geringer Nutzen in einem Teilziel durch einen höheren Nutzen bei einem anderen Teilziel kompensiert werden kann. Damit wird die Existenz bzw. das Auftreten jedes beliebigen Nutzenwertes bei jedem Teilziel zugelassen. Die Stetigkeits-Forderung verhindert unendliche Ausprägungen, weitere Einschränkungen gibt es jedoch nicht.
- **Vollständigkeit und Transitivität:**Auf grundlegende praktische Probleme im Hinblick auf diese beiden Anforderungen wurde bereits hingewiesen.[303] Mit der Annahme von linearen Indifferenzkurven zwischen sämtlichen Teilzielen wird bei multikriteriellen Verfahren implizit von einer vollständigen und transitiven Präferenzordnung auf dem **gesamten kartesischen Produkt** ausgegangen. Es wurde schon darauf hingewiesen, dass dies in der Praxis selten der Fall ist.[304]
- **Wechselseitige Unabhängigkeit:** Diese Annahme[305] wurde bei den grundlegenden Merkmalen von Präferenzen schon angesprochen.[306] Sie setzt voraus, dass die Präferenzen für die Ergebnisse aller Paare von Teilzielen von den Ausprägungen der Präferenzen bei anderen Teilzielen unberührt bleiben. Diese Annahme dürfte nur dann realitätsnah sein, wenn die Attribute keine Bezüge zueinander aufweisen. Für die hier betrachteten Mehrfachzielsetzungen impliziert dies möglichst “weit voneinander entfernte“ Teilziele.
- **Begrenzte Lösbarkeit:** Diese Voraussetzung[307] stellt sicher, dass sämtliche Ausprägungen für jedes Paar von Teilzielen in einer Indifferenzkurve abgebildet werden können. Das Beispiel[308] hatte jedoch die Schwierigkeiten der Erfüllung dieser Annahme – speziell bei qualitativen Kriterien – gezeigt.

Trotz dieser Kritik sind die vorgestellten Methoden Standardinstrumente der multikriteriellen Entscheidungsfindung und deshalb weit verbreitet.

[302] Vgl. Klein/Scholl (2011: 459–475); Obermaier/Saliger (2020: 33–45).
[303] Vgl. Abschn. 1.3.3 auf S. 40.
[304] Vgl. Bsp. 1.4 auf S. 56.
[305] Vgl. Axiom 1.4.4 auf S. 61.
[306] Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.
[307] Vgl. Axiom 1.4.2 auf S. 58.
[308] Vgl. Fortführung des Beispiels 1.4 auf S. 59.

1.5 Unsicherheitspräferenz I - Einstufige Entscheidungen bei Risiko

1.5.1 Einführung

Wenn die Zukunft unsicher ist, was der Regelfall sein dürfte, muss dies bei der Entscheidungsfindung berücksichtigt werden. Sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten der unsicheren Ereignisse bekannt, liegt eine Entscheidung unter Risiko vor. Dabei wird das formale Verständnis des Risikos verwendet.[309] Für die weiteren Betrachtungen werden folgende Annahmen und Notationen festgelegt:

- Die nichtleere Alternativenmenge $A = \{a_1, a_2,...,a_m\}$ wird gebildet durch die endliche Anzahl sich gegenseitig ausschließender Alternativen a_i mit $i = 1,...,m$.
- Auch die **Unterlassung** einer Maßnahme stellt eine zulässige Handlungsalternative a_x dar, so dass gilt $a_x \in A$.
- Die nichtleere Zustandsmenge $Z = \{z_1, z_2,...,z_n\}$ wird gebildet durch die endliche Anzahl zukünftig möglicher, sich gegenseitig ausschließender Zustände z_p mit $p = 1,...,n$.
- Jeder Alternative kann in jedem Zustand ein Ergebnis wie folgt zugeordnet werden: $e_{ip} = f(a_i, z_p)$. Ein Ergebnis resultiert aus der Wahl einer Alternative und dem Eintritt eines bestimmten Umweltzustands.
- Da jede Alternative zu mehreren Ergebnissen führen kann, wird zur Bestimmung der Präferenzrelation im weiteren Verlauf nicht mehr - wie in den vorangegangenen Abschnitten - die Ergebnismenge E, sondern die Alternativenmenge A betrachtet. Die Präferenzrelation liegt demzufolge auf der Alternativenmenge A.
- Die Ergebnisse sämtlicher Alternativen in sämtlichen Zuständen sind bekannt und treten zu einem einzigen, identischen Zeitpunkt mit Sicherheit ein. Es besteht quasi Sicherheit über die Unsicherheit.
- Die zukünftigen Zustände werden nicht vom Akteur selbst und auch nicht von einem bewusst handelnden Gegenspieler beeinflusst. Der tatsächlich eintretende Umweltzustand ist unabhängig von der gewählten Alternative.
- Diese Entscheidungssituation wird auch als **„Spiel gegen die Natur“** bezeichnet. Der Akteur wird als Spieler interpretiert, dem mehrere Spielzüge (also Alternativen) zur Auswahl stehen. Im Anschluss daran wird durch den Gegenspieler (die Natur) zufällig und nicht bewusst ein Zustand $z_p \in Z$ herbeigeführt.[310]

[309] Vgl. 1. Band, Abschn. 1.2.2.3 auf S. 25 zur Unterscheidung zwischen materiellem und formalem Risikoverständnis.

[310] Vgl. Milnor (1954); Krelle (1968: 119).

- Für alle $z_p \in Z$ sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt. Ob es sich dabei um subjektive oder objektive Wahrscheinlichkeiten handelt, ist für die weitere Betrachtung nicht relevant.[311]
- Es resultiert die **Ergebnismatrix** (vgl. Tabelle 1.23).

Tab. 1.23: Grundstruktur der Ergebnismatrix bei Risiko. Quelle: Eigene Darstellung.

Zustand / Alternative	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\cdots$	$\mathbf{z_n}$
$\mathbf{a_1}$	e_{11}	e_{12}	e_{13}	$\cdots$	e_{1n}
$\mathbf{a_2}$	e_{21}	e_{22}	e_{23}	$\cdots$	e_{2n}
$\mathbf{a_3}$	e_{31}	e_{32}	e_{33}	$\cdots$	e_{3n}
$\mathbf{a_x}$	e_{x1}	e_{x2}	e_{x3}	$\cdots$	e_{xn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\mathbf{a_m}$	e_{m1}	e_{m2}	e_{m3}	$\cdots$	e_{mn}

- Die Ergebnisse bestehen ausschließlich aus ökonomisch-positiven Werten, wie z. B. Gewinn, Umsatz oder Zahlungsüberschuss. Das bedeutet nicht, dass der Zahlenwert positiv sein muss, sondern, dass die verwendete Rechengröße ökonomisch erstrebenswert ist. Dies ist z. B. bei Auszahlungen oder Kosten nicht der Fall.
- In Bezug auf die Höhenpräferenz des Akteurs wird lediglich angenommen, dass die diesbezügliche Nutzenfunktion monoton ist, d. h. „Mehr ist besser“.[312] Weitere Eigenschaften sind nicht bekannt.

Für eine rationale Entscheidungsfindung sind folgende wichtige Fragen zu beantworten:[313]

- Welchen Nutzen haben die Ergebnisse der unterschiedlichen Zustände für den Akteur?
- Können die einzelnen Nutzenwerte zu einem Gesamtnutzenwert zusammengefasst werden?
- Welche Anforderungen müssen die Präferenzen des Akteurs für eine solche Zusammenfassung erfüllen?

Da es sich bei den Ergebnissen um ökonomisch-positive Absolutwerte handelt und Monotonie der Höhenpräferenz vorausgesetzt wird, kann die Alternativenmenge auf **Dominanz** hin untersucht werden. Eine strenge Form besteht in der **absoluten Dominanz** (vgl. Def. 1.23).

[311] Zur Erläuterung dieser Formen der Wahrscheinlichkeit vgl. 1. Band, Abschn. 1.2.2.3 auf S. 25.
[312] Vgl. Anf. 1.3.5 auf S. 35.
[313] Vgl. Abb. 1.1 auf S. 4.

Definition 1.23: *Gegeben ist die Zustandsmenge* $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ *mit* $z_p \in Z$ *und die Alternativenmenge* A. *Eine Aktion* $a_q \in A$ *heißt genau dann absolut dominant in Bezug auf* Z *und die Aktion* $a_k \in A$, *wenn gilt:* $\min\limits_{p} e_{qp} \geq \max\limits_{p} e_{kp}$.

Dies bedeutet, das schlechteste Ergebnis der Alternative a_q ist mindestens ebenso gut, wie das beste Ergebnis von Alternative a_k. Alternativen, welche derart dominiert werden, können aus den weiteren Analysen ausgeschlossen werden. Absolute Dominanz ist ein sehr strenges Kriterium und wird nur selten vorliegen. Ein schwächeres Selektionskriterium bietet die **Zustandsdominanz** nach Definition 1.24.[314]

Definition 1.24: *Gegeben ist die Zustandsmenge* $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ *mit* $z_p \in Z$ *und die Alternativenmenge* A. *Eine Aktion* $a_k \in A$ *heißt genau dann effizient bezüglich* A *und* Z, *wenn es keine Aktion* $a_q \in A$ *gibt, für welche gilt:*

a) $e_{qp} \geq e_{kp} \; \forall \; p = 1, ..., n$
sowie
b) $e_{qp} > e_{kp}$ *für mindestens ein* p.

Wenn es eine Aktion $a_q \in A$ gibt, welche diese beiden Kriterien erfüllt, so dominiert a_q die Alternative a_k bzw. es kann formuliert werden: a_k ist ineffizient. Zur besseren Verständlichkeit der weiteren Ausführungen wird das Beispiel 1.10 verwendet.

Beispiel 1.10:

Ein Entscheidungsträger muss aus sechs verfügbaren, sich ausschließenden Alternativen eine optimale Aktion identifizieren. Dabei sind ihm vier mögliche Zustände, die dabei auftretenden Ergebnisse sowie deren Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt (vgl. Tab. 1.24).

Tab. 1.24: Ergebnismatrix des Beispiels 1.10. Quelle: Eigene Darstellung.

	Zustände			
Aktion	$\mathbf{z_1}$ **mit** $\mathbf{w_1 = 0{,}1}$	$\mathbf{z_2}$ **mit** $\mathbf{w_2 = 0{,}2}$	$\mathbf{z_3}$ **mit** $\mathbf{w_3 = 0{,}5}$	$\mathbf{z_4}$ **mit** $\mathbf{w_4 = 0{,}2}$
$\mathbf{a_1}$	0	2	6	2
$\mathbf{a_2}$	4	9	8	6
$\mathbf{a_3}$	15	1	15	3
$\mathbf{a_4}$	15	3	15	4
$\mathbf{a_5}$	6	8	12	8
$\mathbf{a_6}$	6	5	10	16

In dem Beispiel (vgl. Tab. 1.24) wird die Alternative a_1 *durch* a_5 *absolut dominiert, da das Maximum der Alternative* a_1 *den Wert 6 aufweist, was dem Minimum der Alternative* a_5 *entspricht. Weiterhin ist festzustellen, dass in dem Beispiel die Alternative* a_3

[314] Vgl. Kruschwitz/Husmann (2012: 86–87).

durch a_4 zustandsdominiert wird, da $e_{3p} < e_{4p}$ für $p = 2,4$ sowie $e_{3p} = e_{4p}$ für $p = 1,3$. Für eine weitere Analyse können die dominierten Alternativen ausgeschlossen werden.

In den einführenden Darstellungen wurde auf drei Möglichkeiten zur Generierung von Präferenzfunktionalen hingewiesen.[315] Für Entscheidungen bei Risiko sind Präferenzfunktionale auf folgenden Wegen entstanden:

- **Klassische Entscheidungsregeln:** Diese Präferenzfunktionale zählen zur Klasse der sog. Ad-hoc-Funktionale, eine axiomatische Fundierung erfolgt nicht.[316] Die Funktionale basieren auf dem Erwartungswert und integrieren zusätzlich weitere Parameter der Ergebnisverteilung in die Analyse.
- **Bernoulli-Prinzip/Erwartungsnutzentheorie:** Dieses Prinzip bzw. diese Theorie formuliert Anforderungen an rationale Entscheidungen, aus welchen anschließend das Präferenzfunktional logisch abgeleitet wird.

Bevor diese Fragen beantwortet werden, sind noch einige Anmerkungen zu den Wahrscheinlichkeiten hilfreich. Diese erfolgen im nächsten Abschnitt.

1.5.2 Bedingte und unbedingte Wahrscheinlichkeiten

Um mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten arbeiten zu können, sind folgende Grundannahmen wichtig: Die ersten drei Anforderungen werden auch als Kolmogorov-Axiome bezeichnet.

Definition 1.25: *Jedem Umweltzustand z_p kann eine Eintrittswahrscheinlichkeit w_p zugeordnet werden, wobei gilt: $0 \leq w_p \leq 1$.*

Definition 1.26: *Die Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines sicheren Ereignisses beträgt 1.*

Definition 1.27: *Die Wahrscheinlichkeit des Eintritts zweier disjunkter Ereignisse $w(z_j \cup z_k)$ folgt aus: $w(z_j \cup z_k) = w_j + w_k$ mit $z_j \cap z_k = \emptyset \; \forall \; z_j, z_k \in Z$.*

Definition 1.28: *Die Wahrscheinlichkeiten des Eintritts aller Ereignisse summieren sich zu 1. Es gilt:* $\sum_{p=1}^{n} w_p = 1$.

Diese Darstellungen beziehen sich auf disjunkte Ereignisse, also Ereignisse, die nicht gleichzeitig gemeinsam auftreten können. Oftmals hingegen bestim-

[315] Vgl. Tab. 1.4 auf S. 18.

[316] Vgl. Brandtner (2012: 17).

men mehrere Ereignisse bzw. Einflussfaktoren die Ausgestaltung der zukünftigen Zustände und treten deshalb zusammen auf. In diesem Fall ist zu unterscheiden zwischen stochastisch **unabhängigen** und stochastisch **abhängigen** Ereignissen. Um besser differenzieren zu können, dass die Ereignisse Ausprägungen verschiedener Attribute darstellen, werden die Ereignisse mit $x \in X$ und $y \in Y$ bezeichnet. Dabei beschreibt $x \in X$ das Eintreten eines Ereignisses x aus der Menge der möglichen Ereignisse X und y entsprechend für Y. Die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Eintretens der Ereignisse x und y wird bezeichnet mit $w(x \cap y)$. Wenn der Eintritt eines Ereignisses keinen Einfluss auf die Eintrittswahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses hat, liegt stochastische Unabhängigkeit vor (vgl. Def. 1.29).

Definition 1.29: *Die Ereignisse x und y sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:* $w(x \cap y) = w(x) \cdot w(y)$.

Die Ereignisse x und y beeinflussen sich nicht gegenseitig, weshalb es sich bei $w(x)$ und $w(y)$ um **unbedingte Wahrscheinlichkeiten** handelt.

Im Gegensatz dazu existieren bei vielen Entscheidungsproblemen durchaus kausale Verbindungen zwischen den Einflussfaktoren, weshalb diese als stochastisch abhängig bezeichnet werden. In diesem Fall sind **bedingte Wahrscheinlichkeiten** zu verwenden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis y eintritt, wenn zuvor Ereignis x eingetreten ist, wird notiert mit: $w(y|x)$ (vgl. Def. 1.30).[317]

Definition 1.30: *Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Eintritts zweier stochastisch abhängiger Ereignisse x und y ergibt sich für $w(x) > 0$ aus:*

$$w(y|x) = \frac{w(y \cap x)}{w(x)}.$$

Def. 1.30 kann so umgeformt werden, dass die Wahrscheinlichkeit für dieses gemeinsame Auftreten $w(y \cap x)$ aus den Einzelwahrscheinlichkeiten ermittelt werden kann (vgl. Def. 1.31).

Definition 1.31: *Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit des Eintritts zweier stochastisch abhängiger Ereignisse x und y ergibt sich aus:*

$$w(y \cap x) = w(y|x) \cdot w(x).$$

Zur Erläuterung wird das Beispiel 1.11 entwickelt.

[317] Vgl. Krelle (1968: 202–203); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 26).

Beispiel 1.11:

Ein Bergbau-Unternehmen besitzt die Abbaukonzession für ein Gebiet und möchte dieses erschließen. Bevor Investitionen in mehrstelliger Millionenhöhe realisiert werden, führt das Unternehmen Probe- und Erkundungsbohrungen durch. Die Wahrscheinlichkeit, drei Lagerstätten zu finden, deren Ausbeutung wirtschaftlich ist, liegt bei 40% (Zustand 1 = x_1). Die drei Lagerstätten versprechen Kapitalwerte in Höhe von entweder 100 Mio.€ (y_1), 200 Mio.€ (y_2) oder 300 Mio.€ (y_3). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% werden zwei ausbeutungsfähige Lagerstätten gefunden (Zustand 2 = x_2), die Kapitalwerte in Höhe von 100 Mio.€ (y_1)oder 300 Mio.€ (y_3) erwarten lassen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt notiert:

- $w(y_1|x_1) = 0{,}4$
- $w(y_2|x_1) = 0{,}5$
- $w(y_3|x_1) = 0{,}1$
- $w(y_1|x_2) = 0{,}7$
- $w(y_2|x_2) = 0{,}0$
- $w(y_3|x_2) = 0{,}3$

Mit diesen Informationen können die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten nach Def. 1.31 ermittelt werden. Beispielsweise ergibt sich die gemeinsame Wahrscheinlichkeit für einen Kapitalwert von 200 Mio.€ nach Eintritt von Zustand 1 aus:

$$\begin{aligned} w(y_2 \cap x_1) &= w(y_2|x_1) \cdot w(x_1) \\ &= 0{,}5 \cdot 0{,}4 \\ &= 0{,}2 \end{aligned}$$

Tab. 1.25 zeigt die Struktur der Wahrscheinlichkeiten.

Tab. 1.25: Ermittlung gemeinsamer Wahrscheinlichkeiten. Quelle: Eigene Darstellung.

		Kapitalwert			
		y_1: 100 Mio.€	**y_2: 200 Mio.€**	**y_3: 300 Mio.€**	**Summe**
Ergebnis der Proben	**Zustand 1: $w(x_1) = 0{,}40$**	0,16	0,20	0,04	
	Zustand 2: $w(x_1) = 0{,}60$	0,18	0	0,42	
Summe		**0,34**	**0,20**	**0,46**	**1,00**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden oft – aber nicht nur – im Zusammenhang mit mehrstufigen Entscheidungen verwendet.[318] Für einstufige Entscheidungen unter Risiko sind bedingte Wahrscheinlichkeiten u. a. dann relevant, wenn es um die Art der Problemdarstellung geht. Von einem rationalen Akteur ist zu fordern, dass er sich bei der Problemlösung nicht von der Darstellungsform des Problems beeinflussen lässt. Er soll sich ausschließlich an den verfügbaren Informationen orientieren. Diese Forderung gilt auch für Entscheidungen unter Ungewissheit[319] und wird zu einem späteren Zeitpunkt in

[318] Vgl. Abschn. 1.9.3 auf S. 230.

[319] Vgl. Axiom 1.6.8 auf S. 167.

einem eigenständigen Axiom detailliert erläutert.[320] Das Beispiel 1.11 wird an anderer Stelle wieder aufgenommen und fortgeführt.[321]

Jedoch wird noch gezeigt, dass die Forderung nach Unabhängigkeit von der Darstellungsform nicht immer leicht zu erfüllen ist.[322] Wenn das Entscheidungsproblem unzureichend spezifiziert ist, ergeben sich Interpretationsspielräume in Bezug auf die stochastische (Un-)Abhängigkeit von Ereignissen, die zu völlig verschiedenen Ergebnissen führen.

Nun können die beiden Lösungsklassen vorgestellt werden.

1.5.3 Klassische Präferenzfunktionale

Als klassische Funktionale werden im folgenden Abschnitt:

- die Bayes-Regel,
- das μ-σ-Prinzip,
- das μ-ρ-Prinzip sowie
- das Hodges-Lehmann-Prinzip

vorgestellt. Es sei an dieser Stelle nochmals auf die Differenzierung von Entscheidungsprinzip und Entscheidungsregel hingewiesen.[323]

Die folgenden Präferenzfunktionale sind sog. **ad-hoc-Funktionale**[324] und orientieren sich an einseitigen Ausrichtungen von Präferenzen bzw. an einem sehr engen Ausschnitt möglicher Facetten. Das heißt jedoch nicht, dass sie inhaltlich nicht begründet sind. Es ist bei der Vielzahl an Akteuren in der Realität nicht auszuschließen, dass derartige Orientierungen existieren.

Zur Auswahl der optimalen Alternative aus der verbleibenden Alternativenmenge im Beispiel 1.10 werden nun die verschiedenen Funktionale vorgestellt.

Bayes-Regel (μ-Regel):[325]

Das Präferenzfunktional in diesem Fall lautet:[326] $\Phi(a_i) = \mu_i$. Der Entscheidungsträger orientiert sich ausschließlich an dem Erwartungswert μ_i einer Alternative, der wie folgt ermittelt wird:

[320] Vgl. Axiom 1.5.7 auf S. 122.
[321] Vgl. Bspl. 1.12 auf S. 123.
[322] Vgl. Abschn. 2.3.2.3 auf S. 320.
[323] Vgl. Abschn. 1.6 auf S. 160.
[324] Vgl. Tab. 1.4 auf S. 18.
[325] Thomas Bayes (1702–1761).
[326] Vgl. Schneeweiß (1966: 48).

$$\mu_i = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \cdot w_p.$$

Offensichtlich handelt es sich dabei um die Summe der Produkte aus der Eintrittswahrscheinlichkeit und dem Wert des Handlungsergebnisses der Alternative. Die optimale Alternative a_{opt} ist definiert durch die Entscheidungsregel 1.7.[327]

Entscheidungsregel 1.7: *Bei Anwendung der* BAYES*-Regel ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \mu_i.$$

Tabelle 1.26 zeigt die Anwendung der BAYES-Regel.

Fortführung des Beispiels 1.10 von S. 100:

Tab. 1.26: Anwendung der BAYES-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.24.

Aktion	Zustände				Funktional: $\mu_i = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \cdot w_p$	
	z_1 mit $w_1 = 0{,}1$	z_2 mit $w_2 = 0{,}2$	z_3 mit $w_3 = 0{,}5$	z_4 mit $w_4 = 0{,}2$		
a_2	4	9	8	6	**7,40**	
a_4	15	3	15	4	**10,40**	⇐ **max**
a_5	6	8	12	8	**9,80**	
a_6	6	5	10	16	**9,80**	

Optimal ist demnach die Alternative a_4.

Die BAYES-Regel ist leicht verständlich und einfach umzusetzen. Zu kritisieren ist, dass die Regel lediglich bei Risikoneutralität des Akteurs eine zutreffende Entscheidung ermöglicht.[328]

Erwartungswert-Standardabweichungs-Prinzip (μ-σ-Prinzip):

Dieses Prinzip integriert die Standardabweichung als quasi-Risikoindikator in die Betrachtung. Die Ermittlung der Standardabweichung σ_i geschieht entsprechend:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{p=1}^{n} w_p \cdot (\mu_i - e_{ip})^2}.$$

[327] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 91–92).

[328] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 92).

Das Präferenzfunktional lautet:[329] $\Phi(a_i) = f(\mu_i,\sigma_i)$. Um zu einer Entscheidung zu gelangen, wird $f(\mu_i,\sigma_i)$ durch den Risikopräferenzfaktor γ spezifiziert. Dieser drückt die Berücksichtigung der Standardabweichung bei der Ermittlung der optimalen Alternative aus, die entsprechend Entscheidungsregel 1.8 ermittelt wird.[330]

Entscheidungsregel 1.8: *Bei Anwendung des μ-σ-Prinzips ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i [\mu_i - \gamma \cdot \sigma_i].$$

Der Risikopräferenzfaktor γ bringt die subjektive Risiko-Einstellung des Akteurs zum Ausdruck. Bei der Festlegung des Faktors γ ist zu berücksichtigen:

- bei Risikoneutralität gilt: $\gamma = 0$,
- bei Risikoaversion gilt: $\gamma > 0$ und
- bei Risikofreude gilt: $\gamma < 0$.

Im Folgenden wird die Anwendung des μ-σ-Prinzips sowie die Interpretation der Ergebnisse erklärt.

Fortführung des Beispiels 1.10 von S. 100:

Tabelle 1.27 zeigt die Anwendung des μ-σ-Prinzips für unterschiedliche γ-Parameter.

Tab. 1.27: Anwendung des μ-σ-Prinzips. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.24.

Aktion	Zustände				Teilergebnisse:		Funktional mit:	
	z_1 mit $w_1 = 0{,}1$	z_2 mit $w_2 = 0{,}2$	z_3 mit $w_3 = 0{,}5$	z_4 mit $w_4 = 0{,}2$	μ_i	σ_i	$\gamma = 0{,}5$	$\gamma = -0{,}5$
a_2	4	9	8	6	7,40	1,50	6,652	8,148
a_4	15	3	15	4	10,40	5,64	7,579	13,221
a_5	6	8	12	8	9,80	2,27	8,665	10,936
a_6	6	5	10	16	9,80	3,71	7,945	11,655

Zur Erläuterung werden aus Tabelle 1.27 die Alternativen a_5 und a_6 betrachtet. Beide Alternativen weisen denselben Erwartungswert auf. Alternative a_6 verfügt jedoch über eine größere Standardabweichung. Ein ***risikofreudiger Akteur*** *bevorzugt von diesen zwei Alternativen aufgrund der größeren Standardabweichung die Alternative a_6. Ein* ***risikoneutraler Akteur*** *hingegen ist indifferent gegenüber den beiden Alternativen. Ein* ***risikoscheuer Akteur*** *entscheidet sich für Alternative a_5, da diese die geringere Standardabweichung besitzt.*

Das bedeutet: ein Akteur, der nach dem μ-σ-Prinzip vorgeht, wird als ***risikoscheu*** *bezeichnet, wenn er von zwei Alternativen mit* ***demselben Erwartungswert*** *jene mit der*

[329] Vgl. Schneeweiß (1966: 52); Schneeweiß (1991: 212).

[330] Vgl. Bitz (1981: 102).

kleineren Standardabweichung *bevorzugt. Dies wird auch durch die Werte in den letzten beiden Spalten deutlich. Bei $\gamma = 0{,}5$ (Risikoaversion) ist der Wert von a_5 größer als der von a_6, weshalb der risikoscheue Akteur a_5 bevorzugen würde. Im Fall von $\gamma = -0{,}5$ (Risikofreude) hingegen ist der Wert von a_6 größer als der von a_5, weshalb der risikofreudige Akteur a_6 bevorzugen würde. Werden sämtliche Alternativen betrachtet, so bevorzugt ein risikoscheuer Investor die Alternative a_5, ein risikofreudiger Investor hingegen würde die Alternative a_4 bevorzugen.*

Der Parameter γ hat also einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis. Durch die Festlegung dieses Wertes kann es dazu kommen, dass eine Alternative, die im Rahmen der Überprüfung auf Zustandsdominanz als ineffizient ausgeschlossen wurde, nun wiederum als optimale Alternative resultiert.

Um dies zu zeigen, wird hier auf die ursprünglich verfügbaren Alternativen zurückgegriffen.[331] Alternative a_3 wurde von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen, da diese durch die Alternative a_4 zustandsdominiert wurde. Wird zur Entscheidungsfindung der Wert $\gamma = -1$ verwendet – geht man also von einem sehr stark risikofreudigen Akteur aus – so ergeben sich folgende Werte:

Alternative / Funktional	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\Phi(\mu_i,\sigma_i)$ bei $\gamma = -1$	8,897	16,200	16,043	12,072	13,509

Alternative a_3 erscheint nun als optimale Alternative. Damit wird gegen das Prinzip der Zustandsdominanz verstoßen.

Das μ-σ-Prinzip ist einfach berechenbar und leicht verständlich. Jedoch ist das Prinzip unvereinbar mit dem Kriterium der Zustandsdominanz und kann u. U. gegen das Prinzip der Invarianz verstoßen.[332]

Erwartungswert-Semistandardabweichungs-Prinzip (μ-ρ-Prinzip):

Beim μ-ρ-Prinzip werden lediglich die unerwünschten Abweichungen vom Erwartungswert berücksichtigt. Demzufolge wird ein risikoscheuer Akteur vorausgesetzt, das Hauptaugenmerk liegt auf der Risikovermeidung. Dazu wird anstelle der Standardabweichung σ die Semistandardabweichung ρ verwendet, die wie folgt ermittelt wird:[333]

$$\rho_i = \sqrt{\sum_{p=1}^{n} w_p \cdot (max\ [0; \mu_i - e_{ip}])^2}.$$

[331] Vgl. Tabelle 1.24 auf S. 100.

[332] Vgl. Bamberg/Trost (1996: 652–654).

[333] Vgl. Klein/Scholl (2011: 415).

Das Präferenzfunktional lautet:[334] $\Phi(a_i) = f(\mu_i, \rho_i)$. Die optimale Alternative folgt damit aus Entscheidungsregel 1.9.

Entscheidungsregel 1.9: *Bei Anwendung des μ-ρ-Prinzips ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i [\mu_i - \gamma \cdot \rho_i].$$

Dabei stellt γ den aus dem μ-σ-Prinzip bekannten Risikoparameter dar. Im Kontext des μ-ρ-Prinzips sind jedoch nur Werte mit $\gamma > 0$ sinnvoll. Im Folgenden wird die Anwendung dieses Prinzips demonstriert.

Fortführung des Beispiels 1.10 von S. 100:

Tabelle 1.28 zeigt die Ergebnisse bei Anwendung des μ-ρ-Prinzips bei $\gamma = 0{,}5$.

Tab. 1.28: Anwendung des μ-ρ-Prinzips. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.24.

Aktion	Zustände				Teilergebnisse:		Funktional:	
	z_1 mit $w_1 = 0{,}1$	z_2 mit $w_2 = 0{,}2$	z_3 mit $w_3 = 0{,}5$	z_4 mit $w_4 = 0{,}2$	μ_i	ρ_i	$\mu_i - \gamma \cdot \rho_i$	
a_2	4	9	8	6	7,40	1,244	**6,778**	
a_4	15	3	15	4	10,40	4,375	**8,212**	
a_5	6	8	12	8	9,80	1,655	**8,972**	⇐ **max**
a_6	6	5	10	16	9,80	2,46	**8,570**	

Es ist ersichtlich, dass die Alternative a_5 optimal ist.

Dieses Prinzip bildet die Risikoaversion besser ab als das μ-σ-Prinzip, unterliegt jedoch in Bezug auf andere Facetten denselben Einschränkungen.[335]

Hodges-Lehmann-Prinzip:[336]

Dieses 1952 entwickelte Entscheidungsprinzip[337] kombiniert die Bayes-Regel und die Minimax-Regel mittels eines – vom Akteur zu bestimmenden – Vertrauensparameters. Deshalb erinnert es auch an das Hurwicz-Prinzip. Der Vertrauensparameter ε mit $0 \leq \varepsilon \leq 1$ beschreibt dabei das Vertrauen in die Informationen bezüglich der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Mit diesem Vertrauensparameter wird das Alternativenminimum – also die schlechteste Ausprägung einer jeden Alternative (Worst-Case-Fall) – sowie der Erwartungswert der Alternative gewichtet (vgl. E.-regel 1.10).[338]

[334] Vgl. Schneeweiß (1991: 212).

[335] Vgl. Klein/Scholl (2011: 415).

[336] Joseph L. Hodges, Jr. (1922–2000) und Erich L. Lehmann (1917–2009).

[337] Vgl. Hodges/Lehmann (1952).

[338] Vgl. Bitz (1981: 105–106); Klein/Scholl (2011: 416).

Entscheidungsregel 1.10: *Bei Anwendung des* Hodges-Lehmann*-Prinzips ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \left[\varepsilon \ \mu_i + (1-\varepsilon) \left(\min_p \ e_{ip} \right) \right].$$

Bei einem Wert von $\varepsilon = 1$ ist das Vertrauen sehr groß und es resultiert eine reine Bayes-Regel. Bei einem Wert von $\varepsilon = 0$ ist das Vertrauen sehr klein und es resultiert eine reine Minimax-Regel. Im Folgenden wird die Anwendung des Hodges-Lehmann-Prinzips demonstriert.

Fortführung des Beispiels 1.10 von S. 100:

Es wird der Wert $\varepsilon = 0{,}50$ verwendet, womit ein sehr risikofreudiger Akteur modelliert wird. Es ergeben sich die Werte in Tabelle 1.29.

Tab. 1.29: Anwendung des Hodges-Lehmann-Prinzips. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.24.

Aktion	Zustände				Teilergebnisse μ_i	Funktional: $\varepsilon\ \mu_i + (1-\varepsilon)\left(\min_p e_{ip}\right)$
	z_1 mit $w_1 = 0{,}1$	z_2 mit $w_2 = 0{,}2$	z_3 mit $w_3 = 0{,}5$	z_4 mit $w_4 = 0{,}2$		
a_2	4	9	8	6	7,40	**5,70**
a_4	15	3	15	4	10,40	**6,70**
a_5	6	8	12	8	9,80	**7,90 ⇐ max**
a_6	6	5	10	16	9,80	**7,40**

Alternative a_5 ist bei Verwendung dieses Prinzips die optimale Alternative.

1.5.4 Erwartungsnutzentheorie

1.5.4.1 Grundlagen und Axiome

1.5.4.1.1 Grundlagen

Eine der ersten umfangreichen Publikationen zur Erwartungsnutzentheorie wurde durch John von Neumann und Oskar Morgenstern mit der Erstauflage des grundlegenden Werkes **„Theory of Games and Economic Behavior“** im Jahr 1944 vorgelegt.[339] In diesem Werk wird das Konzept des Erwartungsnutzens axiomatisch begründet. Die Axiomatisierung der Idee

[339] Hier wird die dritte Auflage des Werkes zitiert. Vgl. Neumann/Morgenstern (1953).

durch von Neumann und Morgenstern erfolgte bereits im Jahr 1942.[340] Ein Ausgangspunkt der Entwicklung der Erwartungsnutzentheorie war das **St.-Petersburg-Paradox**.[341]

Basierend auf den Darstellungen durch von Neumann und Morgenstern sind verschiedene Axiomensysteme entwickelt worden. Da in der ersten Auflage 1944 nicht sämtliche Details der Axiomatisierung veröffentlicht wurden,[342] entstand im Anschluss eine rege wissenschaftliche Diskussion mit ergänzenden bzw. alternativen Ideen.[343] Da in den Quellen auf unterschiedliche Systeme zurückgegriffen wird, unterscheiden sich Inhalt und Anzahl der Axiome. Die folgenden einleitenden Darstellungen basieren auf den Beiträgen von Herstein/Milnor und Jensen.[344] Aus den Annahmen ist Folgendes bekannt:[345]

- Der Akteur sieht sich mehreren unsicheren Ergebnissen gegenüber, die mit einer bekannten, also **objektiven Wahrscheinlichkeit** eintreten.
- Bei den Ergebnissen handelt es sich um erstrebenswerte Größen, also um ökonomisch-positive Absolutwerte (wie z. B. Gewinn, Umsatz, Einzahlungen).
- In Bezug auf die Höhenpräferenz des Akteurs wird angenommen, dass diese monoton ist, d. h. „Mehr ist besser“.[346]

Der Akteur muss eine Funktion finden, die auf dieser Ergebnismenge definiert ist und seine individuelle Einstellung zum Risiko widerspiegelt. Eine isolierte Feststellung der Höhenpräferenz ist nicht möglich, da die Ergebnisse mit Risiko verbunden sind. Diese Nutzenfunktion $u(e)$ – auch als Bernoulli-Nutzen oder **Risikonutzenfunktion** bezeichnet – spiegelt die individuelle Bewertung eines unsicheren Ergebnisses e im Zustand p wider. Diese Funktion gibt damit die **kombinierte Höhen- und Risikopräferenz** des Akteurs an.[347]

---

[340] *„Today at Johnny's: axiomatization of measurable utility together with the numbers. It developed slowly, more and more quickly, and at the end, after two hours (!) it was nearly completely finished.“* von Neumann (1942) zit. nach Leonard (1995: 753). Zu weiteren historischen Details der Entstehung vgl. Abschn. 2.3.2.1 auf S. 304.

[341] Vgl. Abschn. 2.3.2.1 auf S. 304.

[342] *„We [...] will not print the whole proof. There are still some serious questions there, especially the question of risk and pleasure of gambling. But that doesn't belong in the book; perhaps later.“* von Neumann (1942) zit. nach Leonard (1995: 753).

[343] Vgl. Marschak (1950); Malinvaud (1952); Samuelson (1952) sowie die Quellen in Neumann/Morgenstern (1953: vii–viii).

[344] Vgl. Herstein/Milnor (1953); Jensen (1967a); Jensen (1967b).

[345] Vgl. Abschn. 1.5.1 auf S. 98.

[346] Vgl. Anf. 1.3.5 auf S. 35.

[347] Vgl. Bitz (1981: 176–179); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 97–100); Obermaier/Saliger (2020: 86).

Für die folgenden Erläuterungen wird der Begriff der Alternative durch den Begriff der **Lotterie** ersetzt. Für den Beispielfall zweier möglicher Ereignisse sieht sich der Akteur der Lotterie L mit $L = [w \cdot e_1, (1-w) \cdot e_2]$ gegenüber. Ergebnis e_1 tritt mit der Wahrscheinlichkeit w ein, und Ereignis e_2 tritt mit der Wahrscheinlichkeit $1-w$ ein. Es gelten folgende Annahmen und Notationen:

- Die Ergebnisse e_p mit $p = 1,...,n$ jeder Alternative sind bekannt und bilden die Menge $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.
- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die jedem Ergebnis einer Alternative eine Eintrittswahrscheinlichkeit $w_p(e_p)$ zuteilt (wobei für die Wahrscheinlichkeiten die KOLMOGOROV-Axiome[348] gelten) heißt **Lotterie**.
- Eine Lotterie wird wie folgt dargestellt: $L = [w_1 \cdot e_1, w_2 \cdot e_2, ..., w_n \cdot e_n]$.
- Eine Lotterie L stellt demzufolge eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Ergebnismenge E dar.
- Die Menge an bekannten Handlungsalternativen $\mathfrak{L} = \{L_1, L_2, ..., L_m\}$ wird gebildet durch die endliche Anzahl an Alternativen L_i mit $i = 1,...,m$.
- Durch das Zusammenführen bzw. Mischen von einfachen Lotterien entsteht eine zusammengesetzte Lotterie $\widehat{L}$. Werden z. B. die Lotterien L_1 und L_2 durch eine vorgeschaltete Lotterie verbunden, so ergibt sich die zusammengesetzte Lotterie $\widehat{L} = w \cdot L_1 + (1-w) \cdot L_2$. Dies ist eine konvexe Kombination der Lotterien L_1 und L_2.[349] Lotterie L_1 tritt dabei mit der Wahrscheinlichkeit $0 \leq w \leq 1$ ein, weshalb für Lotterie L_2 die Gegenwahrscheinlichkeit $(1-w)$ resultiert.
- Zur besseren Unterscheidung werden im weiteren Verlauf die Eintrittswahrscheinlichkeiten von Lotterien in einer zusammengesetzten Lotterie mit q bezeichnet. Somit gilt: $\widehat{L} = [q_1 \cdot L_1, q_2 \cdot L_2, ..., q_J \cdot L_J]$.

Für die Mischung der Lotterien werden einige grundlegende Annahmen getroffen.[350] Zur Erläuterung wird eine Lotterie L_1 betrachtet, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% den Ergebniswert 0 und mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% einen Wert von 2 erzielt. Lotterie L_2 hingegen erbringt mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% den Wert 4 und mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% das Ergebnis 1. Werden diese Lotterien jeweils zu 50% gemischt, ergibt sich die zusammengesetzte Lotterie $\widehat{L}$. Dieses Beispiel einer Mischung – auch als vertikale Mischungsoperation bezeichnet – ist graphisch in Abb. 1.15 dargestellt.

[348] Vgl. Def. 1.25 bis Def. 1.28 auf S. 101.

[349] Vgl. Jensen (1967a: 170); Fishburn (1979: 106).

[350] Vgl. Fischer (2004: 45–46).

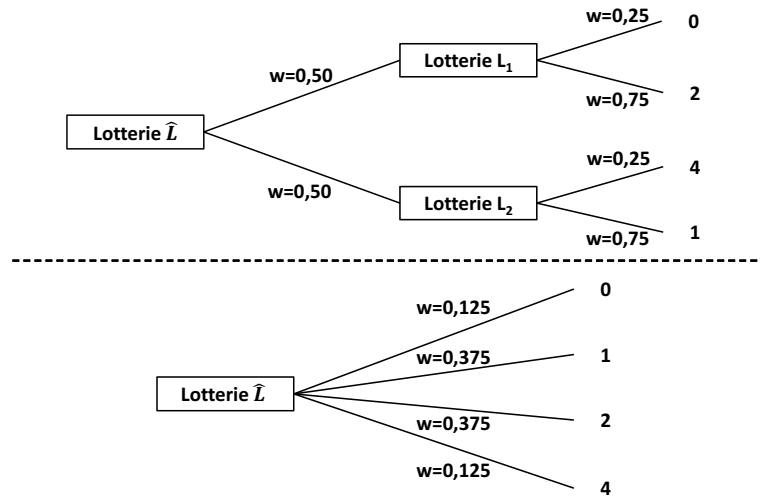


Abb. 1.15: Mischung zweier Lotterien. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Brandtner (2012: 253).

Die damit verbundenen Verteilungsfunktionen ergeben wie folgt:[351]

$$L_1 = F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 0, \\ 0{,}25 & \text{für} & 0 \leq x < 2, \\ 1 & \text{für} & x \geq 2. \end{cases} \qquad L_2 = F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 1, \\ 0{,}75 & \text{für} & 1 \leq x < 4, \\ 1 & \text{für} & x \geq 4. \end{cases}$$

$$\widehat{L} = \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 0, \\ 0{,}125 & \text{für} & 0 \leq x < 1, \\ 0{,}5 & \text{für} & 1 \leq x < 2, \\ 0{,}875 & \text{für} & 2 \leq x < 4, \\ 1 & \text{für} & x \geq 4. \end{cases}$$

Diese Beziehung bzw. diese Operation wird in den folgenden Darstellungen angenommen und es gelten folgende zusätzliche Prämissen:

- Dem Akteur liegt eine Menge an expliziten Handlungsmöglichkeiten – also Lotterien bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen – $\mathfrak{L}$ vor.
- Durch die soeben beschriebene Mischungsoperation können daraus weitere Lotterien erzeugt werden. Die Menge aller dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist M, die auch als Mischungsmenge bezeichnet wird.
- Die Ergebnismenge E und die Lotteriemenge $\mathfrak{L}$ sind Teilmengen von M, d. h. $E \subset M$ sowie $\mathfrak{L} \subset M$.

[351] Vgl. Brandtner (2012: 252–253).

- Die Präferenzordnung des Akteurs $\succsim$[352] liegt auf der Menge M. Das heißt, es werden Präferenzen auf der Menge sämtlicher möglicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet.

Die Eigenschaften dieser Mischungsmenge sind im Axiom 1.2 formuliert.[353]

Axiom 1.2 (Eigenschaften der Mischungsmenge): *Die Menge M verfügt annahmegemäß u. a. über folgende Eigenschaften:*

a) Konvexität: Für irgend zwei $L_1, L_2 \in M$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:
$\lambda \cdot L_1 + (1-\lambda) \cdot L_2 \in M$.

b) Reduktion: Für irgend zwei $L_1, L_2 \in M$ sowie $\lambda, \mu \in [0,1]$ gilt:
$\lambda \cdot [\mu \cdot L_1 + (1-\mu) \cdot L_2] + (1-\lambda) \cdot L_2 = (\lambda \cdot \mu) \cdot L_1 + (1-\lambda \cdot \mu) \cdot L_2$.

c) Symmetrie: Für jede zwei $L_1, L_2 \in M$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:
$\lambda \cdot L_1 + (1-\lambda) \cdot L_2 = (1-\lambda) \cdot L_2 + \lambda \cdot L_1$.

Wenn Lotterien als Wahrscheinlichkeitsverteilungen interpretiert werden, müssen diese Regeln gelten. Die **Konvexität** stellt keine Restriktion mit Blick auf das Entscheidungsverhalten dar, sondern sichert die Möglichkeit konvexer Kombinationen von Lotterien. Die **Reduktion** beschreibt das rationale (bzw. wahrscheinlichkeitstheoretisch richtige) Zusammenfassen von Lotterien.[354] Dieses Axiom wird oftmals als ein eigenständiges Axiom an die Präferenzen des Akteurs formuliert.[355] Die **Symmetrie** fordert, dass lediglich die zugrundeliegenden Verteilungen, nicht jedoch die Reihenfolge der Mischung von Bedeutung sein dürfen.[356] Im Axiom 1.2 werden Lotterien durch ein Pluszeichen miteinander verknüpft. Es wurde in den Erläuterungen jedoch deutlich, dass dies keine Addition, sondern eine Mischung der Lotterien darstellt.[357] Das gilt auch für die folgenden Ausführungen.

[352] Vgl. Def. 1.1 auf S. 15.

[353] Vgl. Herstein/Milnor (1953: 292); Neumann/Morgenstern (1953: 26–27); Jensen (1967a: 170); Jarrow (1988: 70–71). Zu einer Kritik dieser Axiome vgl. Jensen (1967b: 238–239) sowie Abschn. 1.5.4.4 auf S. 141.

[354] Thrall bezeichnet es als eine Art Assoziativgesetz. Vgl. Thrall (1954: 182).

[355] Vgl. Axiom 1.5.7 auf S. 122.

[356] Dieselbe Forderung wird sowohl bei Entscheidungen unter Ungewissheit (vgl. Axiom 1.6.8 auf S. 167), als auch im Rahmen der kooperativen Spieltheorie erhoben (vgl. Axiom 4.4.5 auf S. 484).

[357] In einigen Quellen wird deshalb anstelle des Zeichens + das Zeichen $\oplus$ (vgl. Varian (1992: 172–174)) oder das Zeichen & (vgl. Jarrow (1988: 69–88)) verwendet.

1.5.4.1.2 Axiome rationalen Handelns

Wird von einer Präferenzrelation $\succsim$ auf der Menge M ausgegangen, so stellt sich die Frage nach einem geeigneten Präferenzfunktional. Ausgehend von der grundlegenden Beschreibung[358] wird das ordnungstreue Präferenzfunktional für die Bewertung von Lotterien in Def. 1.32 beschrieben.

Definition 1.32: *Ein ordnungstreues Präferenzfunktional $\Phi : M \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Lotterie $L \in M$ eine reelle Zahl $\Phi(L) \in \mathbb{R}$ so zu, dass:*

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow \Phi(L_1) \geq \Phi(L_2),$$
$$L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \Phi(L_1) > \Phi(L_2),$$
$$L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \Phi(L_1) = \Phi(L_2).$$

Die zugrundeliegende Idee ist folgende: Es dürfte sehr schwer sein, ein solches Präferenzfunktional direkt auf die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Lotterien zu definieren. Ein möglicher Umweg besteht in der Verwendung einer Nutzenfunktion, die auf der Ergebnismenge liegt. Diese muss jedoch Ordnungstreue sichern. Daraus folgt somit die Frage, unter welchen Bedingungen eine solche Nutzenfunktion existiert. Anders formuliert: Welche Anforderungen müssen die Präferenzen des Akteurs in Bezug auf die Lotterien erfüllen, damit eine Nutzenfunktion auf der Ergebnismenge existiert, welche die Präferenzen über die Lotterien ordnungstreu im Sinn von Def. 1.32 abbildet?

Die Lotterien stellen Handlungsalternativen in Bezug auf unsichere Ergebnisse dar. Implizit wird deshalb vorausgesetzt, dass diese Ergebnisse in eine schwache Ordnung gebracht werden können. Mit Blick auf die Menge der Lotterien M selbst wird grundlegend gefordert, dass die Präferenzen vollständig, reflexiv und transitiv sind (vgl. Anf. 1.5.1 bis Anf. 1.5.3).[359]

Anforderung 1.5.1 (Vollständigkeit): *Die Relation $\succsim$ auf M ist vollständig, wenn für jedes Paar $L_1, L_2 \in M$ festgelegt wird: entweder $L_1 \succsim L_2$ oder $L_2 \succsim L_1$ oder beides.*

Anforderung 1.5.2 (Reflexivität): *Die Relation $\succsim$ auf M ist reflexiv, wenn gilt: $L_1 \succsim L_1$ für jedes $L_i \in M$.*

Anforderung 1.5.3 (Transitivität): *Die Relation $\succsim$ auf M ist transitiv, wenn aus $L_1 \succsim L_2$ und $L_2 \succsim L_3$ für alle $L_1, L_2, L_3 \in M$ mit $L_1 \neq L_2$, $L_1 \neq L_3$ und $L_2 \neq L_3$ folgt: $L_1 \succsim L_3$.*

[358] Vgl. Def. 1.3 auf S. 16.

[359] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 26, die Axiome (3:A:a) und (3:A:b)).

Eine weitere Standardeigenschaft ist **Stetigkeit** (vgl. Axiom 1.5.4).[360]

Anforderung 1.5.4 (Stetigkeit): *Die Relation* $\succsim$ *auf* M *ist stetig, wenn für drei Lotterien mit* $L_1 \succ L_2 \succ L_3$ *ein* $\lambda \in]0,1[$ *existiert, so dass gilt:*

$$\lambda \cdot L_1 + (1-\lambda) \cdot L_3 \sim L_2.$$

Axiom 1.5.4 wird in der Literatur[361] oft als Archimedisches Axiom bezeichnet. Die Intention dieser Formulierung ist klar: Selbst beim Übergang der Präferenzen im Unendlichen dürfen sich die Relationen nicht verändern. Damit wird gefordert, dass für jede Lotterie L_2, die in der Präferenzordnung zwischen zwei anderen Lotterien L_1 und L_3 liegt, immer eine Kombination gefunden werden kann, die genauso gut ist wie L_2.[362] Anders formuliert: Keine Lotterie L_1 ist so gut und keine Lotterie L_3 so schlecht, dass es keine Wahrscheinlichkeit gibt, für die der Akteur indifferent zu der mittleren Lotterie L_2 ist. Dieses Prinzip verlangt vom Akteur die Angabe einer kritischen Wahrscheinlichkeit, bei der das höhere von zwei unsicheren Ereignissen eintreten muss, so dass er diese Alternative als gleichwertig mit der sicheren Alternative einstuft. Das ist die Basis für die sog. Bernoulli-Befragung, mit der die individuelle Nutzenfunktion empirisch ermittelt wird.[363] Das Stetigkeits-Axiom erfüllt – i. V. m. den anderen Axiomen – auf diese Weise zwei wichtige Aufgaben:

- Wie auch im Fall einfacher Entscheidungen unter Sicherheit schließt die Stetigkeits-Forderung **lexikografische Präferenzordnungen** aus.[364]
- Darüber hinaus sichert das Stetigkeits-Axiom die **Beschränktheit** der Nutzenfunktion.[365] Darauf weisen auch von Neumann und Morgenstern hin.[366] Es wird die Beschränkung der Nutzenfunktion gefordert, nicht jedoch der Ergebnismenge. Die Stetigkeit der Präferenzrelation auf der Mischungsmenge M führt zu einer Beschränkung der Nutzenfunktion auf der Ergebnismenge E.

[360] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 26, die Axiome (3:B:c) und (3:B:d) sowie 630); Fishburn (1979: 107); Bitz (1981: 181); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 89).

[361] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 630–632); Schneeweiß (1963: 206); Schneeweiß (1966: 74); Karni (2014: 8); Föllmer/Schied (2016: 64).

[362] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 27); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 251).

[363] Vgl. Abschn. 1.5.4.3 auf S. 135.

[364] Vgl. Thrall (1954: 184–185); Schmidt (2004: 812).

[365] Vgl. Blackwell/Girshick (1954: 105–110); Jensen (1967a: 180); Jensen (1967b: 241); Fishburn (1988: 269); Schmidt (2004: 766).

[366] *„It is probably desirable to require this property under all conditions, since its abandonment would be tantamount to introducing infinite utility differences.“* Neumann/Morgenstern (1953: 630).

Beide Eigenschaften bzw. Konsequenzen werden an anderer Stelle detailliert diskutiert.[367] Zusätzlich wird ein weiteres Axiom erforderlich, das Unabhängigkeit fordert (vgl. Axiom 1.5.5).[368]

Anforderung 1.5.5 (Unabhängigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf M ist unabhängig, wenn für irgend drei Lotterien $L_1, L_2, L_3 \in M$ und jedes $\lambda \in]0,1]$ gilt:* $L_1 \succ L_2 \Leftrightarrow \lambda \cdot L_1 + (1-\lambda) \cdot L_3 \succ \lambda \cdot L_2 + (1-\lambda) \cdot L_3$.

Im von-Neumann-Morgenstern-Axiomensystem ist dieses Axiom nicht explizit enthalten, sondern es ergibt sich implizit.[369] Axiom 1.5.5 wird oft auch als **Substitutionsaxiom** bezeichnet.[370] Es bildet das Herzstück der Erwartungsnutzentheorie, da es für die Linearität des Präferenzfunktionals sorgt. In einigen Axiomensystemen werden anstelle des Unabhängigkeits-Axioms zwei sich daraus ergebende Konsequenzen axiomatisiert. Beide Aspekte werden an anderer Stelle erläutert.[371] Die Forderung nach Unabhängigkeit ist kein Spezifikum der Erwartungsnutzentheorie, sondern ist eine Standardforderung bei folgenden Situationen:[372]

- multikriterielle Entscheidungen,[373]
- Entscheidungen unter Ungewissheit[374] sowie
- intertemporale Entscheidungen.[375]

Trotzdem erfuhr das Axiom sehr starke Kritik, auf die an entsprechender Stelle eingegangen wird.[376] Das Unabhängigkeits-Axiom ist eine notwendige Voraussetzung für das **Entscheidungsbaumverfahren** bzw. für das dabei angewendete Roll-back-Verfahren.[377] Dies wird an anderer Stelle erläutert.[378]

[367] Vgl. Abschn. 1.5.4.4 auf S. 141.

[368] Vgl. Marschak (1950: 120); Samuelson (1952: 672); Jensen (1967a: 173); Fishburn (1979: 107); Fischer (2004: 47).

[369] In der hier verwendeten dritten Auflage von 1953 weisen von Neumann und Morgenstern auf diesen Zusammenhang hin. *„In particular our discussion and selection of "natural operations" in those sections covers what seems to us the relevant substrate of the Samuelson-Malinvaud "independence axiom." "* Neumann/Morgenstern (1953: viii). Hervorh. im Original. Vgl. Malinvaud (1952); Samuelson (1952); Neumann/Morgenstern (1953: 26–27); Fishburn/Wakker (1995: 1132–1133).

[370] Vgl. Schneeweiß (1966: 75); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 90–91).

[371] Vgl. Abschn. 1.5.4.2.2 auf S. 121.

[372] Vgl. Ballestero/Romero (1998: 52–55).

[373] Vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61.

[374] Vgl. Anf. 1.6.9 auf S. 167.

[375] Vgl. Anf. 1.7.5 auf S. 195.

[376] Vgl. Abschn. 1.5.4.4 auf S. 141 sowie Abschn. 2.3.2.2 auf S. 315.

[377] Vgl. LaValle/Wapman (1986); Hammond (1988: 511–513); Seidenfeld (1988: 275–284); Machina (1989: 1626–1628); Gul/Lantto (1990: 165–167); Trost (1991: 167–169); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 287); Hammond/Zank (2014: 70–75).

[378] Vgl. Abschn. 1.9.3 auf S. 230.

Mit den bisherigen Darstellungen kann nun der Zusammenhang zwischen der Präferenzrelation auf M, dem Präferenzfunktional Φ und der Nutzenfunktion $u(e)$ hergestellt werden. Das ist Inhalt des Erwartungsnutzen-Theorems und wird hier als Merksatz 1.9 formuliert.[379]

Merksatz 1.9: *Wenn die Präferenzrelation eines Akteurs $\succsim$ auf M vollständig, reflexiv, transitiv, stetig und unabhängig ist, dann existiert eine Nutzenfunktion $u : E \to \mathbb{R}$, die die Präferenzrelation $\succsim$ auf M in folgender Weise repräsentiert:*

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{n} u(e_p^1) \cdot w_p^1 \geq \sum_{p=1}^{n} u(e_p^2) \cdot w_p^2.$$

Jede andere Funktion v mit $v(e) = \alpha \cdot u(e) + \beta$, wobei $\alpha > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.

Merksatz 1.9 besagt, wenn die genannten Anforderungen an die Präferenzen auf der Mischungsmenge M erfüllt sind, existiert eine Nutzenfunktion $u(e)$ auf der Ergebnismenge E, deren Erwartungswerte die Präferenzen des Akteurs über die Lotterien abbildet. Die Nutzenfunktion $u(e)$ – auch als Bernoulli-Nutzen oder **Risikonutzenfunktion** bezeichnet – spiegelt die individuelle Bewertung eines unsicheren Ergebnisses e im Zustand p wider. Bestimmung und Eigenschaften dieser Nutzenfunktion werden später näher erläutert.[380]

Die im Merksatz 1.9 angeführten Axiome sind notwendig und hinreichend für die Existenz der Nutzenfunktion.[381] Die Stetigkeit sorgt für die Nicht-Existenz von unendlich guten bzw. unendlich schlechten Lotterien und somit für die notwendige Beschränkung der Funktion. Das Unabhängigkeits-Axiom sichert die Linearität des Funktionals in den Wahrscheinlichkeiten.[382] Aus dem Unabhängigkeits-Axiom ergeben sich folgende Eigenschaften, von denen einige in anderen Systemen als eigenständige Axiome formuliert werden:

- Monotonie,[383]
- Reduktion,[384]
- Substitution,[385]

[379] Vgl. Schneeweiß (1963: 209); Fishburn (1979: 107); French (1988: 163); Mas-Colell/Whinston/Green (1995: 178).

[380] Vgl. Abschn. 1.5.4.3 auf S. 135.

[381] Vgl. Jensen (1967a: 173–183); Schneeweiß (1966: 74–76); Fishburn (1979: 105–110); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 89–91).

[382] Vgl. Kürsten (1992: 465–466).

[383] Vgl. Axiom 1.5.6 auf S. 121.

[384] Vgl. Axiom 1.5.7 auf S. 122.

[385] Vgl. Axiom 1.5.8 auf S. 125.

- Homothetie[386] und
- Betweenness.[387]

Bei Erfüllung der im Merksatz 1.9 genannten Anforderungen ist es somit möglich, eine **intervall-skalierte Nutzenfunktion** auf der Basis von **ordinalen Präferenzen** zu entwickeln. Eine Funktion, die dieser Definition entspricht, wird als *„kardinale Nutzenfunktion“* bezeichnet. Dies liegt in der Invarianz gegenüber positiv affinen Transformationen begründet.[388]

Für Entscheidungen bei Risiko kann das VON NEUMANN-MORGENSTERN-Präferenzfunktional wie in Definition 1.33 formuliert werden.[389]

Definition 1.33: *Das* VON-NEUMANN-MORGENSTERN*-Präferenzfunktional für Entscheidungen unter Risiko lautet:*

$$\Phi(L) = \sum_{p=1}^{n} u(e_p) \cdot w_p.$$

Für dieses vNM-Präferenzfunktional wird oftmals synonym der Begriff **Nutzenfunktional**, **Erwartungsnutzenfunktional**, **Erwartungsnutzen**, **Erwartungsnutzenfunktion** bzw. **Nutzenerwartungswert** verwendet. Aufgrund der großen Bekanntheit und der weiten Verbreitung ist es üblich, das Präferenzfunktional mit *EU* für *Expected Utility* abzukürzen (vgl. Def. 1.34).

Definition 1.34: *Der Erwartungsnutzen einer Lotterie $EU(L)$ ergibt sich aus:*

$$EU(L) = E\left[u(e)\right] = \sum_{p=1}^{n} u(e_p) \cdot w_p.$$

Dieses ordnungstreue Funktional existiert nicht nur für diskrete, sondern auch für stetige Verteilungen.[390] Dafür muss eine strengere Form der Stetigkeit definiert werden, welche einer bereits dargestellten Form ähnelt und in der Def. 1.35 formuliert ist.[391]

---

[386] Vgl. Axiom 1.5.9 auf S. 133.

[387] Vgl. Axiom 1.5.10 auf S. 133.

[388] Zur Klärung der Differenzen beim Kardinalitätsverständnis wird hier auf die umfangreiche Diskussion in Abschn. 1.2.3 auf S. 19 hingewiesen. VON NEUMANN und MORGENSTERN verwenden den Begriff des kardinalen Nutzens nicht, sondern gebrauchen stattdessen den Begriff der „numerical utility“. Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 17–27). *„So later we decided we would settle on thinking about a numerical utility. It did not take us long to construct the axioms on which the present theory is based that gave us a firm utility concept, that of an expected utility, numerical up to a linear transformation.“* Morgenstern (1976: 809).

[389] Vgl. Schneeweiß (1962: 141); Schneeweiß (1966: 61); Schneeweiß (1991: 185); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 131).

[390] Vgl. Abschn. 1.5.4.5 auf S. 146.

[391] Vgl. Definition 1.13 auf S. 33 sowie Schmidt (2004: 761–766); Karni (2014: 9–10).

Definition 1.35 (Stetigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf M ist stetig, wenn für alle Lotterien $L_1, L_2 \in M$ die Mengen $\{L_1 \in M | L_1 \succsim L_2\}$ sowie $\{L_1 \in M | L_2 \succsim L_1\}$ abgeschlossen sind.*

In Def. 1.35 sind die „Nicht-besser-als-Menge“ (NBA-Menge)[392] und die „Nicht-schlechter-als-Menge“ (NSA-Menge)[393] für die Lotterie L_1 beschrieben. Wenn diese Mengen abgeschlossen sind, ist die Nutzenfunktion selbst auch stetig, im Sinne von differenzierbar.

Zusammenfassend wird festgehalten: Ein Akteur, welcher den dargestellten Axiomen entspricht, kann zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit von riskanten Alternativen den **Erwartungswert** des Risikonutzens verwenden (vgl. Entscheidungsregel 1.11).

Entscheidungsregel 1.11: *Bei Anwendung des* Bernoulli-*Prinzips ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \left[\sum_{p=1}^{n} u_i(e_{ip}) \cdot w_p \right].$$

Die optimale Alternative ist diejenige Alternative mit dem höchsten Erwartungswert des Risikonutzens. In den bisherigen Darstellungen zur Erwartungsnutzentheorie wurden ausschließlich unbedingte Wahrscheinlichkeiten verwendet. An anderer Stelle wird jedoch demonstriert, dass das Erwartungsnutzenprinzip auch bei Vorliegen von bedingten Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden kann.[394]

Im englischsprachigen Bereich wird das in Def. 1.33 auf S. 118 beschriebene Präferenzfunktional als „Nutzenfunktion“ bezeichnet und auf die Mischungsmenge der Lotterien M gelegt.[395] Entsprechend der hier verwendeten Notation handelt es sich jedoch um ein **Nutzenfunktional**, weil es einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (also einer Funktion) eine reelle Zahl (den Nutzen) zuordnet. Mit der so definierten „Nutzenfunktion“ werden die Lotterien miteinander verglichen und die Klasse der Erwartungsnutzenfunktion bestimmt, die auch als von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion bzw. von-Neumann-Morgenstern-Nutzen bezeichnet wird. Nicht nur die Nutzenfunktion $u(e)$ in Merksatz 1.9 auf S. 117 und Def. 1.33 auf S. 118 ist eindeutig bestimmt bis auf positiv affine Transformationen, sondern das vNM-Präferenzfunktional selbst ist es ebenfalls (vgl. Merksatz 1.10).[396]

[392] Synonym: untere Konturmenge.

[393] Synonym: obere Konturmenge.

[394] Vgl. Abschn. 2.3.2.3 auf S. 320.

[395] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 29–30); Mas-Colell/Whinston/Green (1995: 173); Maschler/Solan/Zamir (2020: 14).

[396] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 30); Mas-Colell/Whinston/Green (1995: 173).

Merksatz 1.10: *Es sei $\Phi : M \to \mathbb{R}$ das vNM-Präferenzfunktional. Dann ist $\Phi' : M \to \mathbb{R}$ ebenfalls ein vNM-Präferenzfunktional mit: $\Phi'(L) = \alpha \cdot \Phi(L) + \beta$ mit $\alpha > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für jedes $L \in M$.*

Im nächsten Abschnitt werden einige zusätzliche Erläuterungen entwickelt und wesentliche Eigenschaften vorgestellt.

1.5.4.2 Erläuterungen und Eigenschaften

1.5.4.2.1 Einführung

Neben den bereits vorgestellten Axiomen sind weitere Zusammenstellungen und Herangehensweisen entwickelt worden. Für die weiteren Betrachtungen sind folgende Axiomensysteme relevant:[397]

- die von-Neumann-Morgenstern-Axiomatik,[398]
- das System von Luce und Raiffa[399] sowie
- die Axiome von Marschak.[400]

Die ersten beiden Systeme sind einander ähnlich und verwenden zusätzlich zu den bisherigen Axiomen folgende Annahmen:

- Reduktion,
- Substitution und
- Monotonie.[401]

Der wesentliche Grund für diese zusätzlichen Axiome liegt darin, dass die Begriffe der Ordnung und der Stetigkeit in diesen Axiomensystemen anders definiert sind und dass das bisher verwendete Unabhängigkeitsaxiom durch andere Axiome ersetzt wird. Da diese zusätzlichen drei Axiome aus didaktischer Sicht wichtig sind, werden sie im Folgenden vorgestellt.

Das System von Marschak verwendet – wie auch das Konzept von Herstein/Milnor – im Wesentlichen ebenfalls die drei bisher definierten Axiome (Ordnung, Stetigkeit und Unabhängigkeit). Marschak wählt zur Herleitung des Erwartungsnutzens jedoch einen primär geometrisch fundierten

[397] Zu einer vergleichenden Darstellung vgl. Schneeweiß (1963: 204–212). Vgl. Blackwell/Girshick (1954: 102–111) für einen weiteren, hier nicht berücksichtigten Ansatz.

[398] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 26–27).

[399] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 23–31).

[400] Vgl. Marschak (1950).

[401] Im System von Luce/Raiffa wird die Monotonie expressis verbis angeführt (vgl. Luce/Raiffa (1957: 28)), während von Neumann/Morgenstern die Monotonie durch eine andere Formulierung sicherstellen (vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 26–27, die Axiome (3:B:a) und (3:B:b) sowie 630)).

Weg. Dies ermöglicht Interpretationen, auf die an gegebener Stelle eingegangen wird.[402]

1.5.4.2.2 Monotonie, Reduktion und Substitution

Monotonie bei Entscheidungen unter Sicherheit wurde bereits erläutert.[403] Bei Entscheidungen unter Risiko beschreibt Monotonie den Umstand, dass ein rationaler Akteur versuchen wird, die Wahrscheinlichkeit eines besseren Ergebnisses zu erhöhen und die Wahrscheinlichkeit eines schlechteren Ergebnisses zu reduzieren (vgl. Axiom 1.5.6).[404]

Anforderung 1.5.6 (Monotonie): *Die Relation* $\succsim$ *auf* M *ist monoton, wenn aus* $L_1 \succsim L_2$ *folgt:* $[w_1 \cdot L_1, (1-w_1) \cdot L_2] \succsim [w_2 \cdot L_1, (1-w_2) \cdot L_2]$*, nur dann, wenn:* $w_1 \geq w_2$*, mit* $w \in [0,1]$*.*

Axiom 1.5.6 wird in einigen Quellen als Monotonie-Axiom bezeichnet, während in anderen Quellen der Begriff *Dominanzprinzip*, *Dominanzaxiom* oder *Order-preserving-axiom*[405] verwendet wird. Dieses Axiom bildet die Grundlage für das Konzept der stochastischen Dominanz erster Ordnung.[406]

Die Monotonie nach Axiom 1.5.6 wird durch die bisher verwendeten Axiome (Ordnung, Stetigkeit und Unabhängigkeit) impliziert. Oftmals ist es auch als eigenständiges Axiom zu finden.[407] Wesentlicher Grund für die Erfüllung der Monotonie ist das Unabhängigkeits-Axiom.[408] Ein Vergleich mit der – ebenfalls aus der Unabhängigkeit resultierenden – Betweenness-Eigenschaft[409] zeigt deshalb eine sehr starke Ähnlichkeit mit der Monotonie. In der separaten, expliziten Formulierung der Monotonie nach Axiom 1.5.6 wird die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den Ergebnissen gesondert thematisiert.

Die soeben formulierte Version der Monotonie kann wie folgt variiert bzw. konkretisiert werden: Das vNM-Präferenzfunktional[410] erfüllt die Anforde-

[402] Vgl. Abschn. 1.5.4.2.3 auf S. 126.
[403] Vgl. Axiom 1.3.5 auf S. 35.
[404] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 28); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 145); Maschler/Solan/Zamir (2020: 17).
[405] Vgl. Jarrow (1988: 72).
[406] Vgl. Schneeweiß (1966: 74); Streitferdt (1973: 70–71); Schneeweiß (1991: 207); Kruschwitz/Husmann (2012: 44).
[407] Vgl. Schneeweiß (1966: 74); Bitz (1981: 181–182); Blohm/Lüder/Schaefer (2012: 238); Kruschwitz/Lorenz (2019: 276).
[408] Vgl. Axiom 1.5.5 auf S. 116.
[409] Vgl. Axiom 1.5.10 auf S. 133.
[410] Vgl. Def. 1.33 auf S. 118.

rung der **Monotonie bzgl. stochastischer Dominanz erster Ordnung**. Das wird an anderer Stelle detailliert diskutiert.[411]

Aus dem Unabhängigkeits-Axiom (in Verbindung mit den angenommenen Eigenschaften der Lotteriemenge) werden oftmals zwei weitere Axiome abgeleitet:

- **Reduktion:** Eine Lotterie repräsentiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einer Ergebnismenge. Wird nun eine zusammengesetzte Lotterie $\widehat{L}$ auf eine einfache Lotterie L_R reduziert, so muss die Summe der einfachen Wahrscheinlichkeiten für jedes Ergebnis aus jeder Lotterie $L_j \in \widehat{L}$ der Gesamtwahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis in der Lotterie L_R entsprechen. Die Präferenzen des Akteurs jedoch dürfen sich deshalb nicht verändern, d. h. es muss gelten: $\widehat{L} \sim L_R$.
- **Substitution:** Die Präferenz eines Akteurs darf sich nicht ändern, wenn in einer Lotterie ein Bestandteil gegen eine andere Komponente getauscht wird und für den Akteur zwischen beiden Elementen Indifferenz herrscht.

Die erste Forderung wird als **Reduzierbarkeit** bezeichnet und resultiert aus der angenommenen Eigenschaft der Lotteriemenge.[412] Es wird gefordert, dass der Akteur die Alternativen (also Lotterien) **ausschließlich** anhand der Wahrscheinlichkeiten beurteilt. Er soll demzufolge indifferent gegenüber dem Zustandekommen des Ergebnisses sein und deshalb weder Spielfreude noch Spielaversion kennen („no joy in gambling“ bzw. „no love of danger“).[413] Damit wird sichergestellt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Ergebnismenge korrekt reduziert (oder im umgekehrten Fall aufgespalten) werden. Das wird mit der Anforderung 1.5.7 formuliert.[414]

Anforderung 1.5.7 (Reduzierbarkeit): *Gegeben sei eine einfache Lotterie* $L_j = \left[w_1^j \cdot e_1, w_2^j \cdot e_2, ..., w_n^j \cdot e_n\right]$ *mit den Wahrscheinlichkeiten* w_p *und* $p = 1,...,n$ *sowie mit dem Index für die Lotterie* $j = 1,...,J$*. Weiterhin sei eine zusammengesetzte Lotterie* $\widehat{L} = [q_1 \cdot L_1, q_2 \cdot L_2, ..., q_J \cdot L_J]$ *mit den Wahrscheinlichkeiten der einfachen Lotterien* q_j*. Die Gesamtwahrscheinlichkeit* r_p *für das Eintreten des Ergebnisses* e_p *ergibt sich in der zusammengesetzten Lotterie aus:* $r_p = q_1 \cdot w_p^1 + q_2 \cdot w_p^2 + ... + q_J \cdot w_p^J$*. Wird mit dieser Gesamtwahrscheinlichkeit eine reduzierte Lotterie der Form* $L_R = [r_1 \cdot e_1, r_2 \cdot e_2, ..., r_n \cdot e_n]$ *gebildet, so muss gelten:* $\widehat{L} \sim L_R$*.*

---

411 Vgl. Axiom 1.5.11 auf S. 153.

412 Vgl. Axiom 1.2 b) auf S. 113.

413 Vgl. Jensen (1967b: 238). Trost wertet diese Annahme berechtigterweise als obskur, da ein Akteur, der an Lotterien teilnimmt, eine gewisse Vorliebe für Glücksspiele haben muss. Als Postulat ist die Annahme jedoch unerlässlich. Vgl. Trost (1991: 12).

414 Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 26–27, die Axiome (3:C:a) und (3:C:b)); Luce/Raiffa (1957: 26); Harrison/Martínez-Correa/Swarthout (2015: 44); Maschler/Solan/Zamir (2020: 18).

Die Präferenz muss also unabhängig von der Darstellungsform des Problems sein. Dieses Axiom wird erläutert, indem das Beispiel 1.11[415] aufgegriffen und als Beispiel 1.12 fortgeführt wird.

Beispiel 1.12:

Die Investitionsprojekte in Abhängigkeit von den Erkundungsmaßnahmen werden als Lotterien L_1 und L_2 bezeichnet. Die bekannten Informationen werden noch einmal wiederholt:

$$\begin{aligned} &\textit{Projekt 1} = L_1 = [0{,}4 \cdot 100\,€, 0{,}5 \cdot 200\,€, 0{,}1 \cdot 300\,€] \\ &\textit{Projekt 2} = L_2 = [0{,}3 \cdot 100\,€, 0{,}7 \cdot 300\,€] \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, werden vor Investitionsrealisierung noch geologische Erkundungen durchgeführt. Demzufolge kann das Gesamtprojekt als zusammengesetzte Lotterie betrachtet werden, welche durch die ebenfalls bereits bekannten Erfolgswahrscheinlichkeiten gekennzeichnet ist: $\widehat{L} = [0{,}4\,(L_1), 0{,}6\,(L_2)]$. *Diese Situation ist in Abb. 1.16 dargestellt.*

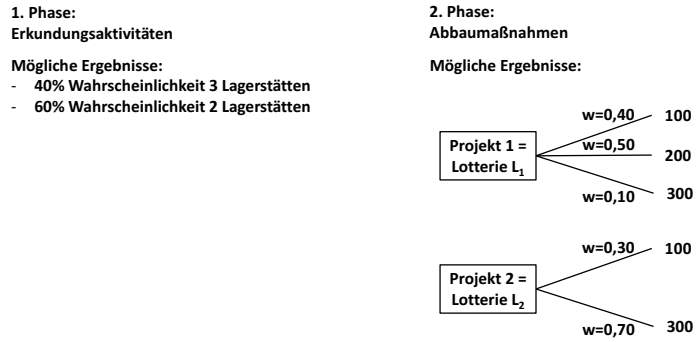


Abb. 1.16: Zweistufige Entscheidungssituation. Quelle: Eigene Darstellung.

Der Erwartungswert des Projektes bzw. der zusammengesetzten Lotterie wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{L}\right) &= 0{,}4 \cdot [0{,}4 \cdot 100\,€ + 0{,}5 \cdot 200\,€ + 0{,}1 \cdot 300\,€] \\ &\quad + 0{,}6 \cdot [0{,}3 \cdot 100\,€ + 0{,}7 \cdot 300\,€] \\ &= 212\,€ \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Lotterie $\widehat{L}$ *kann reduziert werden. Dazu werden bedingte Wahrscheinlichkeiten gebildet und die Gesamtwahrscheinlichkeiten ermittelt. Die Gesamtwahrscheinlichkeit für Ergebnis* e_1 *resultiert aus:*

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1 \cdot w_1^1 + q_2 \cdot w_1^2 \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \\ &= 0{,}34 \end{aligned}$$

---

[415] Vgl. S. 103.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für Ergebnis e_2 resultiert aus:

$$\begin{aligned} r_2 &= q_1 \cdot w_2^1 + q_2 \cdot w_2^2 \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0 \\ &= 0{,}20 \end{aligned}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für Ergebnis e_3 resultiert aus:

$$\begin{aligned} r_3 &= q_1 \cdot w_3^1 + q_2 \cdot w_3^2 \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \\ &= 0{,}46 \end{aligned}$$

Diese Werte sind identisch mit den gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten die für dieses Beispiel an anderer Stelle (vgl. Tab. 1.25 auf S. 103) bereits ermittelt wurden. So ergibt sich der Erwartungswert der auf diese Weise reduzierten Lotterie aus:

$$\begin{aligned} E(L_R) &= [0{,}34 \cdot 100\,€ + 0{,}20 \cdot 200\,€ + 0{,}46 \cdot 300\,€] \\ &= 212\,€ \end{aligned}$$

Diese beiden Darstellungsformen der Situation als zusammengesetzte und als reduzierte Lotterie sind in Abb. 1.17 dargestellt.

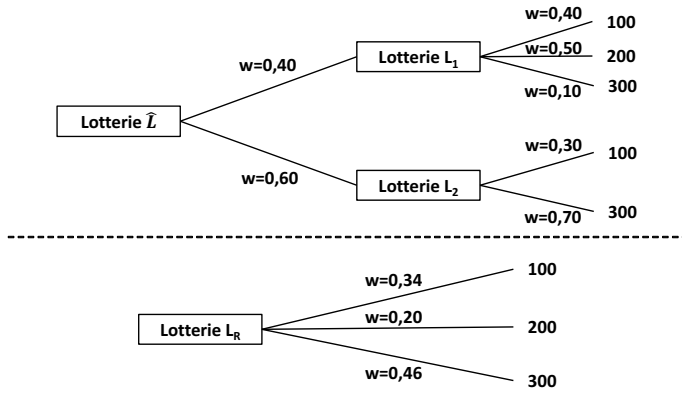


Abb. 1.17: Mehrstufige und reduzierte Lotterie. Quelle: Eigene Darstellung.

Die Reduktions-Eigenschaft bezieht sich demzufolge auf die möglichst rationale Behandlung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen.

Die zweite Implikation der Unabhängigkeit betrifft den Austausch von Bestandteilen einer Lotterie durch Ergebnisse bzw. andere Lotterien und wird als **Substituierbarkeit** bezeichnet. Der zugrundeliegende Gedanke ist folgender: Wenn in einer Lotterie eine Komponente (z. B. ein Ergebnis) durch eine andere Komponente (z. B. ein Ergebnis oder eine weitere Lotterie) ersetzt wird, die nicht schlechter ist, darf sich die Bewertung der Lotterie ebenfalls nicht verschlechtern.

Diese Forderung ist im Unabhängigkeits-Axiom[416] enthalten, weshalb dieses Axiom oft auch synonym als *Substitutions-Axiom* bezeichnet wird. Wenn aus Sicht eines Akteurs für zwei Ergebnisse gilt $e_1 \succ e_2$, dann muss er diese Relation auch in einer Situation beibehalten, in welcher die Ergebnisse e_1 und e_2 mit derselben Wahrscheinlichkeit λ eintreten und ein anderer, irrelevanter Zustand e_3 mit der Komplementärwahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ eintritt. Diese Aussage gilt auch für Lotterien bzw. für den Ersatz von Ergebnissen durch Lotterien.

Dabei ist es unerheblich, ob in einer einfachen Lotterie zwei Ergebnisse ausgetauscht werden, zwischen denen der Akteur indifferent ist, oder ob ein Ergebnis durch eine Lotterie mit demselben Erwartungswert ersetzt wird. So kann eine Lotterie L_1 betrachtet werden, in der ein Ergebnis $\overline{e}$ enthalten ist. Wenn ein Akteur indifferent zwischen dem Ergebnis $\overline{e}$ und einer einfachen Lotterie L_2 ist, so gilt: $L_2 \sim \overline{e}$. Wenn nun $\overline{e}$ in der Lotterie L_1 ersetzt wird durch L_2, entsteht eine zusammengesetzte Lotterie $\widehat{L}$. Die Präferenz für die Lotterie $\widehat{L}$ muss identisch zur Präferenz für die Lotterie L_1 sein bzw. bleiben. Dies wird in dem Axiom 1.5.8 formuliert.[417]

Anforderung 1.5.8 (Substituierbarkeit): *Es wird eine zusammengesetzte Lotterie* $\widehat{L} = [q_1(L_1), ..., q_J(L_J)]$ *und das Ergebnis* $\overline{e}$ *betrachtet. Wenn* $L_j \sim \overline{e}$ *gilt, muss gelten:* $\widehat{L} \sim [q_1(L_1), ..., q_{j-1}(L_{j-1}), q_j(\overline{e}), q_{j+1}(L_{j+1}), ..., q_J(L_J)]$.

Zur Erläuterung dieser Eigenschaft wird das Beispiel 1.12 fortgeführt.

Fortführung des Beispiels 1.12:

Es wird nun angenommen, dem Akteur wird angeboten, nach der ersten Phase die Konzessionen und Ergebnisse für 100 Geldeinheiten zu verkaufen. Im Fall des Eintritts des Zustandes 1 (drei Lagerstätten) stellt dies für ihn eine akzeptable Alternative dar. Demzufolge gilt für ihn $L_1 \sim 100$. *Die Situation wird in Abb. 1.18 ersichtlich.*

---

[416] Vgl. Axiom 1.5.5 auf S. 116.

[417] Vgl. Maschler/Solan/Zamir (2020: 18); Obermaier/Saliger (2020: 77).

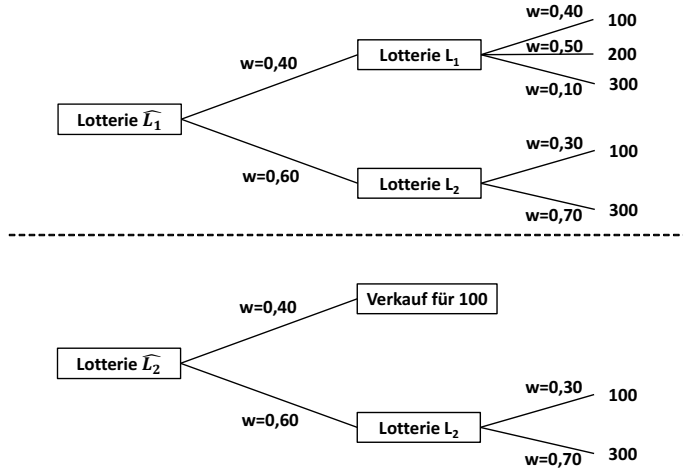


Abb. 1.18: Substitution einer einfachen Lotterie. Quelle: Eigene Darstellung.

Wenn für den Akteur gilt $L_1 \sim 100$, so muss für ihn auch gelten: $\widehat{L_1} \sim \widehat{L_2}$.

Beide Axiome zielen auf die Konstanz der Präferenzrelationen. Das Axiom der Reduzierbarkeit fordert eine konstante Präferenz bei Verwendung einfacher und zusammengesetzter Wahrscheinlichkeiten. Das Substitutions-Axiom fordert Konstanz der Präferenzen bei Einführung einer irrelevanten Alternative.

Beide Eigenschaften sollen sicherstellen, dass die zu treffende Entscheidung unabhängig von der Darstellungsform des Problems, also invariant gegenüber der Problembeschreibung ist. An anderer Stelle wird an einem bekannten Paradox gezeigt, dass diese Forderung nicht immer leicht zu erfüllen ist.[418] Wenn das Entscheidungsproblem unzureichend spezifiziert ist, können sich Interpretationsspielräume in Bezug auf die Art der Wahrscheinlichkeiten (bedingte oder unbedingte Wahrscheinlichkeiten) ergeben, die zu völlig verschiedenen Ergebnissen führen.

1.5.4.2.3 Linearität, Betweenness und Homothetie

Eine wichtige Eigenschaft des vNM-Präferenzfunktionals ist die Linearität in den Wahrscheinlichkeiten, die in der Eigenschaft 1.5.1 formuliert ist.[419]

[418] Vgl. Abschn. 2.3.2.3 auf S. 320.

[419] Vgl. Herstein/Milnor (1953: 292); Fishburn (1982: 12); Fishburn (1989a: 132); Trost (1991: 13); Maschler/Solan/Zamir (2020: 14).

Eigenschaft 1.5.1 (Linearität): *Ein Funktional* $\Phi : A \to \mathbb{R}$ *ist linear, wenn für alle* $e_1, e_2 \in E$ *sowie für jedes* $\lambda \in [0,1]$ *gilt:*

$$\Phi(L) = \Phi\left[\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_2\right] = \lambda \cdot \Phi(e_1) + (1-\lambda) \cdot \Phi(e_2).$$

Ein Funktional bzw. eine Funktion, die diese Eigenschaft besitzt, wird oftmals als VON NEUMANN-MORGENSTERN-Funktion bezeichnet. Das bedeutet, dass der Nutzen einer Entscheidung über eine Kombination von zwei Ergebnissen "zerlegt" werden kann in die Einzelnutzen der zwei Ergebnisse. Die Linearität bezieht sich auf die Wahrscheinlichkeiten. Ursache dafür ist das Unabhängigkeits-Axiom.

Die Linearität lässt sich auch grafisch darstellen. Ursprung dieser Überlegungen ist das Axiomensystem von MARSCHAK.[420] Da die Idee von MACHINA wieder aufgenommen und erweitert wurde,[421] wird die Darstellungsform synonym auch als **MARSCHAK-MACHINA-Dreieck**, *Wahrscheinlichkeitsdreieck*, *Dreiecksdiagramm* bzw. *Lotteriedreieck* bezeichnet. Ziel von MARSCHAK war eine Vereinfachung der VON-NEUMANN-MORGENSTERN-Axiomatik.

Diesem System liegt die Idee zugrunde, die Menge aller möglichen Lotterien, also die Mischungsmenge M, als dreieckige Fläche darzustellen. Prinzipiell handelt es sich dabei um einen **Wahrscheinlichkeitssimplex**. Ein Wahrscheinlichkeitssimplex ist ein mathematischer Raum, in dem jeder Punkt die Wahrscheinlichkeitskombinationen – die den KOLMOGOROV-Axiomen genügen[422] – einer endlichen Menge an n möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Umweltzuständen darstellt. Für $n = 2$ besteht der Simplex aus einer Linie, für $n = 3$ ist der Simplex ein Dreieck und für $n = 4$ wird der Simplex als Tetraeder dargestellt. Der Simplex ist ein n-1-dimensionales Objekt, da sich die Wahrscheinlichkeiten zum Wert 1 summieren müssen. Jede Ecke des Simplex beschreibt eine sog. degenerierte Lotterie, da die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Ereignisses genau 1 beträgt.

Für eine Lotterie mit drei möglichen Ergebnissen ist die Ausgangssituation in der Abbildung 1.19 a) grafisch dargestellt. Die Kombinationen der drei Wahrscheinlichkeiten spannt eine Ebene in einem dreidimensionalen Raum auf.

[420] Vgl. Marschak (1950); Jensen (1967b: 234–235).
[421] Vgl. Machina (1982).
[422] Vgl. S. 101.

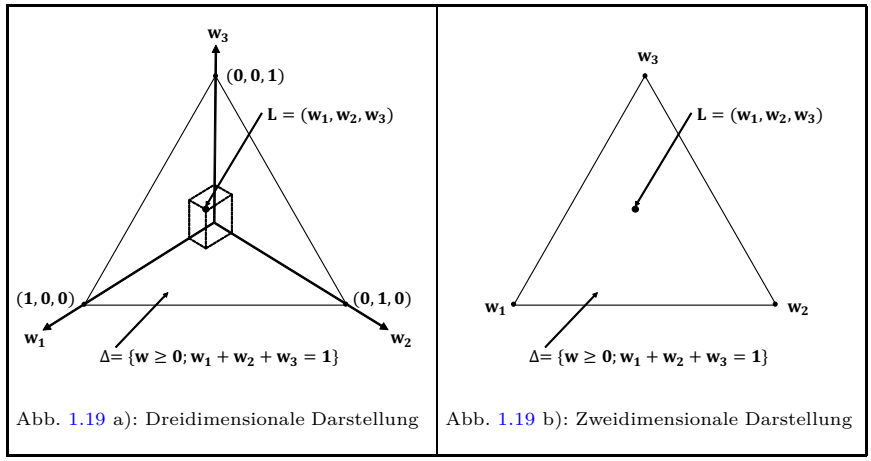


Abb. 1.19 a): Dreidimensionale Darstellung

Abb. 1.19 b): Zweidimensionale Darstellung

Abb. 1.19: Wahrscheinlichkeitssimplex einer Lotterie. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Mas-Colell/Whinston/Green (1995: 169).

Diese Hyperebene wird zweidimensional abgebildet, so dass in der n-1-dimensionalen Darstellung ein gleichseitiges Dreieck wie in Abbildung 1.19 b) entsteht. Der Simplex Δ wird durch die Menge sämtlicher Wahrscheinlichkeitskombinationen gebildet, weshalb gilt: $\Delta = \{w_p \geq 0; \sum_{p=1}^{n} w_p = 1\}$.[423] Die korrekte Lage einer Lotterie wird ermittelt, wie es in der Abbildung 1.20 dargestellt ist.

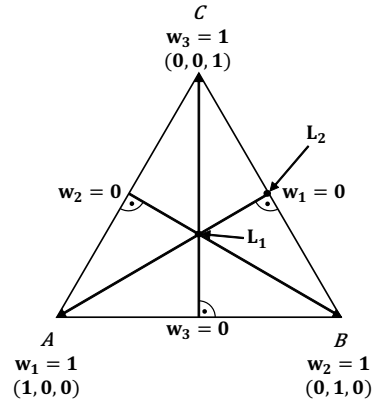


Abb. 1.20: Lage von Lotterien im Wahrscheinlichkeitssimplex. Quelle: Eigene Darstellung.

[423] Vgl. Burghart (2020: 570).

Dazu werden die Mittelsenkrechten jeder Seite konstruiert, welche die Richtung definieren, in der die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse abgetragen werden. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses beträgt im Ursprung der Mittelsenkrechten exakt Null. In der dieser Seite gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks beträgt die Wahrscheinlichkeit genau 1. So beträgt z. B. die Wahrscheinlichkeit w_3 für das Ergebnis e_3 Null im Ursprung der Mittelsenkrechten, der auf der Seite $\overline{AB}$ liegt. Im Punkt C hingegen gilt: $w_3 = 1$. Die Lotterie L_1 in der Abb. 1.20 liegt genau im Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks, so dass die Wahrscheinlichkeiten $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ betragen. Lotterie L_2 liegt in der Mitte der Seite $\overline{BC}$ und ist deshalb dadurch gekennzeichnet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis e_1 gleich Null beträgt. Aus diesem Grund gilt $w_1 = 0$, so dass die Lotterie durch die Wahrscheinlichkeiten $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ gekennzeichnet ist.

Eine ähnliche Verwendung der Simplex-Darstellung wird in der kooperativen Spieltheorie verwendet. In dem Fall werden jedoch keine Wahrscheinlichkeiten, sondern die möglichen Spieleranteile abgebildet.[424]

In den Darstellungen von Marschak wird der Simplex jedoch nicht symmetrisch in einem gleichseitigen Dreieck dargestellt, sondern die Abbildung erfolgt in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck, auch Halbquadrat genannt.[425] Vom Prinzip her stellt das Wahrscheinlichkeitsdreieck auch einen Simplex dar.[426] Da diese Darstellung jedoch nicht symmetrisch ist, wird sie zur besseren Unterscheidung im Folgenden als **Wahrscheinlichkeitsdreieck** bezeichnet. Der Konstruktion liegt die Idee zugrunde, dass drei Ergebnisse mit der Relation $e_3 > e_2 > e_1$ betrachtet werden. Ergebnis e_3 stellt das beste Ergebnis dar und wird auf der Ordinate abgetragen, Ergebnis e_1 stellt das schlechteste Ergebnis dar und wird auf der Abszisse notiert (vgl. Abb. 1.21 a). Da es ein gleichschenkliges Dreieck (bzw. Halbquadrat) ist, haben Ordinate und Abszisse dieselbe Länge.

Die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt des besten und des schlechtesten Ergebnisses werden auf Ordinate und Abszisse notiert. Aufgrund der Beziehung $1 = w_1 + w_2 + w_3$ kann die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses 2 implizit ermittelt werden durch: $w_2 = 1 - w_1 - w_3$. In der grafischen Darstellung wird die Position der Wahrscheinlichkeit w_2 – vom Grundsatz her identisch zur Darstellung im Simplex – in Richtung der Mittelsenkrechten abgetragen bzw. abgelesen. Ausgangspunkt ist der Ursprung der Mittelsenkrechten auf der Hypotenuse $\overline{BC}$. Das ist in der Abb. 1.21 a) der Punkt D auf der Seite $\overline{BC}$, der gleichzeitig der Umkreismittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ist. In diesem Punkt beträgt die Wahrscheinlichkeit w_2 Null. Aufsteigende Werte

[424] Vgl. Abb. 4.5 auf S. 480 und Abb. 4.6 auf S. 481.

[425] Marschak weist darauf hin, dass die Darstellung im gleichseitigen Dreieck symmetrischer, jedoch weniger gebräuchlich ist. Vgl. Marschak (1950: 114).

[426] Vgl. Burghart (2020: 570–571).

für w_2 werden entlang der Strecke $\overline{DA}$ abgetragen bzw. abgelesen. Im Punkt A ist die Wahrscheinlichkeit für Ergebnis 2 exakt 1, d. h. es gilt $w_2 = 1$.

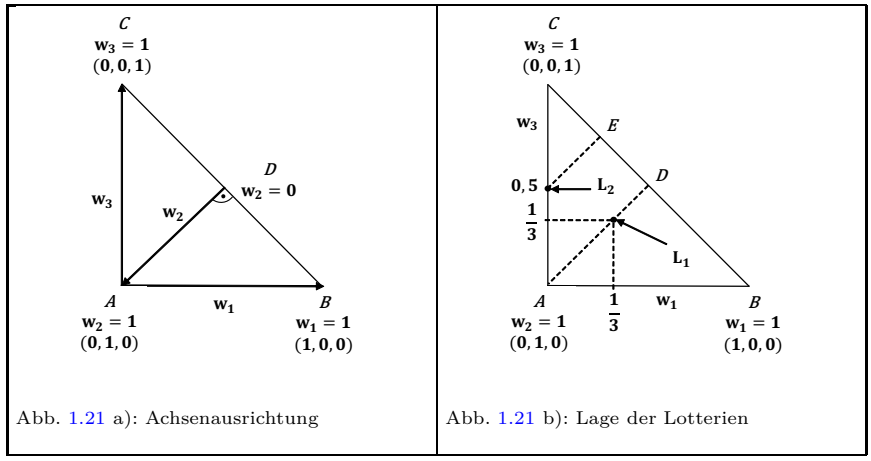


Abb. 1.21 a): Achsenausrichtung

Abb. 1.21 b): Lage der Lotterien

Abb. 1.21: Wahrscheinlichkeitsdreieck einer Lotterie. Quelle: Eigene Darstellung.

Zur weiteren Erläuterung wurden die Lotterien L_1 und L_2 (vgl. Wahrscheinlichkeitssimplex in Abb. 1.20) in das Dreiecksdiagramm eingetragen (vgl. Abb. 1.21 b). Für L_1 galten die Wahrscheinlichkeiten $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Da es sich um kein gleichseitiges Dreieck handelt, kann sich diese Lotterie nicht im Umkreismittelpunkt des Dreiecks befinden. Die Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_3 lassen sich leicht an den Achsen ablesen. Die Wahrscheinlichkeit w_2 entspricht genau $\frac{1}{3}$ der Strecke $\overline{DA}$ und ist deshalb exakt verortet. Für die L_2 galten die Wahrscheinlichkeiten $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Aus der Abbildung 1.21 b) wird deutlich, dass die Werte für w_1 und w_3 wiederum leicht ablesbar sind. Die Wahrscheinlichkeit w_2 entspricht mit der Strecke $\overline{EL_2}$ exakt der Hälfte der Strecke $\overline{DA}$. Damit ist auch diese Lotterie maßstabsgetreu eingetragen. Die ursprüngliche Darstellung von Marschak verwendet eine andere Systematik zur Bestimmung der Lage der Lotterien und der Wahrscheinlichkeiten, führt jedoch zu denselben Ergebnissen. Der Vollständigkeit halber ist diese Systematik in Abbildung 1.22 zu sehen.

Indifferenzkurven im Wahrscheinlichkeitsdreieck sind immer Geraden und verlaufen immer parallel (vgl. Abb. Abb. 1.23 a)). Je größer der Anstieg der Indifferenzkurven, desto höher ist die Risikoaversion.

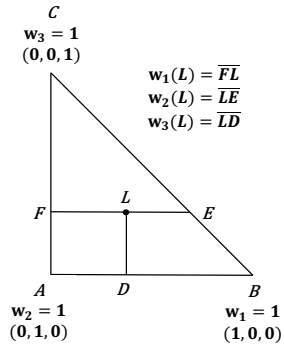


Abb. 1.22: Alternative Lagebestimmung im Wahrscheinlichkeitsdreieck. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Marschak (1950: 115).

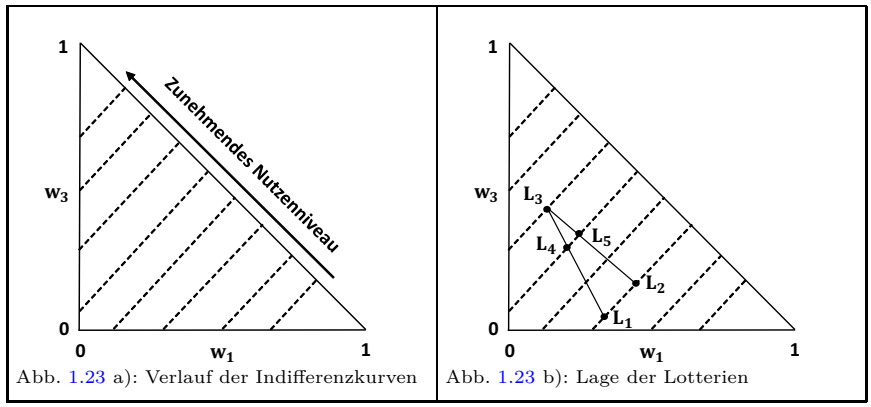


Abb. 1.23 a): Verlauf der Indifferenzkurven

Abb. 1.23 b): Lage der Lotterien

Abb. 1.23: Verlauf von Indifferenzkurven. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Eisenführ/Weber/Langer (2010: 257).

In Abb. 1.23 b) gilt: $L_3 \succ L_4$ sowie $L_4 \sim L_5 \succ L_1 \sim L_2$. Die Lotterie L_4 kann durch die Lotterien L_3 und L_1 wie folgt zusammengesetzt werden:

$\widehat{L_4} = [wL_1, (1-w)\,L_3]$. Für L_5 ergibt sich: $\widehat{L_5} = [wL_2, (1-w)\,L_3]$.

Gemäß dem Unabhängigkeits-Axiom muss folgende Beziehung resultieren:[427]

Wenn gilt $L_1 \gtrsim L_2$, dann muss mit einer irrelevanten dritten Lotterie L_3 gelten: $\widehat{L_4} = [wL_1, (1-w)\,L_3] \gtrsim \widehat{L_5} = [wL_2, (1-w)\,L_3]$.

[427] Vgl. Anf. 1.5.5 auf S. 116.

Das Unabhängigkeits-Axiom impliziert zwei Eigenschaften der Indifferenzkurven: Linearität und Parallelität.[428] Das ist auf folgende Eigenschaften der Präferenzen zurückzuführen:

- Homothetie und
- Betweenness.

Diese werden nun erläutert. Die beiden Linien $\overline{AD}$ und $\overline{L_2E}$ in der Abb. 1.21 b) stellen Indifferenzkurven in dem Dreieck dar. Der Anstieg der Geraden $\overline{AD}$ ergibt sich mit:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ &= \frac{\Delta w_3}{\Delta w_1} \end{aligned}$$

Bei Verwendung der Punkte A (0,1,0) und D ($\frac{1}{2}$,0,$\frac{1}{2}$) folgt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Der Anstieg der Geraden $\overline{L_2E}$ ergibt sich bei Verwendung der Punkte L_2 ($0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$) und E ($\frac{1}{4}$,0,$\frac{3}{4}$) aus:

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Beide Geraden verlaufen demzufolge parallel. Die Parallelität ist auf die **Homothetie** der Präferenzen zurückzuführen. Homothetische Präferenzen sind in der Mikroökonomie zur Modellierung von Konsumenten und deren Entscheidungen Standard. In diesem Zusammenhang werden Präferenzen über Güter bzw. Güterbündel betrachtet.[429] Dabei liegt das schlechteste Güterbündel im Ursprung des Koordinatensystems und markiert gleichzeitig das homothetische Zentrum. Homothetische Präferenzen über Güterbündel werden an anderer Stelle erläutert.[430] Im vorliegenden Kontext liegen die Präferenzen jedoch auf Lotterien, also auf unsicheren Alternativen. Um das homothetische Zentrum zu bestimmen, wird eine schlechteste Lotterie L_Ω definiert. Für jede Lotterie $L \neq L_\Omega$ gilt: $L \succ L_\Omega$. Mit dieser Zuordnung kann eine homothetische Präferenzrelation beschrieben werden (vgl. Axiom 1.5.9).[431]

[428] Vgl. Jensen (1967b: 234–235); Fischer (2004: 52).
[429] Vgl. Hens/Pamini (2008: 44–45).
[430] Vgl. Abschn. 4.2.2 auf S. 468.
[431] Vgl. Burghart (2020: 573).

Anforderung 1.5.9 (Homothetie): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf M ist homothetisch, wenn für alle Lotterien $L_1, L_2 \in M$ mit $L_1 \neq L_\Omega$, $L_2 \neq L_\Omega$ und für jedes $\lambda \in]0,1[$ gilt: $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \lambda \cdot L_1 + (1-\lambda) \cdot L_\Omega \sim \lambda \cdot L_2 + (1-\lambda) \cdot L_\Omega$.*

Dieser Sachverhalt ist in Abb. 1.24 dargestellt. Wegen $e_3 > e_2 > e_1$ nimmt das Nutzenniveau in Richtung der Wahrscheinlichkeit w_3 zu. Die schlechteste Lotterie L_Ω ist per definitionem das Ergebnis e_1 mit 100%-iger Sicherheit. Dieser Punkt bildet das homothetische Zentrum.

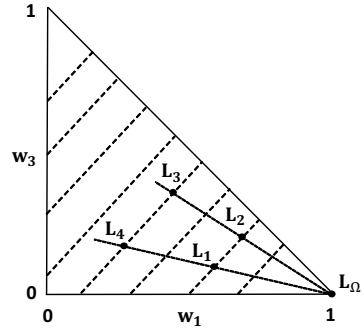


Abb. 1.24: Parallelität von Indifferenzkurven. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Burghart (2020: 577).

Die Verletzung der Homothetie und der damit verbundene Verlust der Parallelität von Indifferenzkurven wird als **Fanning-out** bezeichnet. Dies wird an anderer Stelle erläutert.[432]

Der Fakt, dass die Indifferenzkurven immer Geraden sind, wird mit der **Betweenness** beschrieben. Betweenness ist der englische Begriff für die Lage eines Punktes zwischen zwei Punkten auf einer Geraden in der Ebene.[433] Für den vorliegenden Kontext wird diese Eigenschaft mit dem Axiom 1.5.10 definiert.[434]

Anforderung 1.5.10 (Betweenness): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf M erfüllt die Betweenness-Eigenschaft, wenn für alle Lotterien $L_1, L_2 \in M$ und für jedes $\lambda \in]0,1[$ gilt: $L_1 \sim L_2 \Leftrightarrow \lambda \cdot L_1 + (1-\lambda) \cdot L_2 \sim L_1$.*

von Neumann/Morgenstern bezeichnen diese Eigenschaft als Monotonie.[435] Dies liegt an der sehr starken Ähnlichkeit zum Monotonie-Axiom,[436]

[432] Vgl. Abschn. 2.3.2.2 auf S. 315.

[433] Vgl. Martin (1975: 73–75); Hilbert (1987: 4–5).

[434] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 26–27, die Axiome (3:B:a) und (3:B:b)); Coombs/Huang (1976: 324); Seidenfeld (1988: 273); Camerer/Ho (1994: 169–170); Karni/Safra (2015: 69); Burghart (2020: 572).

[435] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 630).

[436] Vgl. Axiom 1.5.6 auf S. 121.

auf die bereits hingewiesen wurde. Wenn die Betweenness-Eigenschaft erfüllt ist, hat die Randomisierung von Ergebnissen bzw. Lotterien keinen Einfluss auf die Entscheidung.[437] Diese Relation ergibt sich auch auf Basis des Unabhängigkeits-Axioms. Damit wird erneut deutlich, dass die Betweenness – ebenso wie die Monotonie – aus der Unabhängigkeit folgt. Deshalb sind die Indifferenzkurven im Wahrscheinlichkeitsdreieck immer Geraden und zwei Lotterien desselben Nutzenniveaus (wie z. B. L_1 und L_2 in Abb. 1.24) liegen auf ein und derselben Geraden.

Die Eigenschaften der Indifferenzkurven können auch allgemein hergeleitet werden:[438] Es werden drei Ergebnisse mit $e_3 > e_2 > e_1$ betrachtet. Auf diese Drei-Ergebnis-Menge wird eine Lotterie L gelegt, auf die das Präferenzfunktional

$$\Phi(L) = \sum_{p=1}^{n} u(e_p) \cdot w_p$$

aus Def. 1.33 auf S. 118 angewendet wird. Für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse gilt:

$$w_2 = 1 - w_1 - w_3.$$

Damit kann das Präferenzfunktional wie folgt beschrieben werden:

$$\Phi(L) = w_1 \cdot u(e_1) + (1 - w_1 - w_3) \cdot u(e_2) + w_3 \cdot u(e_3).$$

Wird nun davon ausgegangen, dass $\Phi(L) = \overline{U} = const.$, so führt das zu:

$$\overline{U} = w_1 \cdot u(e_1) + (1 - w_1 - w_3) \cdot u(e_2) + w_3 \cdot u(e_3).$$

Diese Gleichung stellt eine **Iso-Erwartungsnutzenlinie** bzw. Indifferenzkurve dar, da sie sämtliche Lotterien beschreibt, welche für den Akteur einen identischen Gesamtnutzen $\overline{U}$ aufweisen. Die letzte Gleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$w_3 = \frac{\overline{U} - u(e_2)}{u(e_3) - u(e_2)} + \frac{u(e_2) - u(e_1)}{u(e_3) - u(e_2)} \cdot w_1$$

Mit

$$\Theta = \frac{\overline{U} - u(e_2)}{u(e_3) - u(e_2)}$$

$$\Omega = \frac{u(e_2) - u(e_1)}{u(e_3) - u(e_2)}$$

folgt:

$$w_3 = \Theta + \Omega \cdot w_1.$$

[437] Vgl. Schmidt (2004: 771–772).

[438] Die folgende Darstellung ist angelehnt an Schauenberg (1990).

Damit wird deutlich, dass w_3 für jedes beliebige $\overline{U}$ eine lineare Funktion von w_1 ist. Der Term Ω in der obigen Darstellung beschreibt die Steigung der Geraden und ist in jedem Fall positiv.

Wie auch im Fall multikriterieller Entscheidungen[439] und bei intertemporalen Entscheidungen[440] bedingt die Linearität der Indifferenzkurven eine Unabhängigkeit der Präferenzen.[441]

1.5.4.3 Arten und Bestimmung der Risikonutzenfunktion

Auf Basis der bisherigen Darstellungen lassen sich idealtypische Entscheidungsträger mathematisch beschreiben. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist die **Risikonutzenfunktion** (RNF) des Akteurs $u(e)$, die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellt wurde. Diese Funktion weist für verschiedene Risiko-Neigungen charakteristische Verläufe auf. Wichtig für die weitere Darstellung ist die Annahme einer streng monoton steigenden Nutzenfunktion, die impliziert, dass es sich bei den Ergebnissen der Handlungsalternativen um positiv bewertete Ergebnisgrößen (z. B. Gewinn, Rückflüsse) handelt. Mit den bisherigen Erläuterungen lassen sich drei unterschiedliche Einstellungen zum Risiko in Def. 1.36 festhalten.[442]

Definition 1.36: *Ein Akteur ist:*

- ***risikoneutral****, wenn gilt:* $E[u(e)] = u(E[e])$,
- ***strikt risikoavers****, wenn gilt:* $E[u(e)] < u(E[e])$,
- ***strikt risikofreudig****, wenn gilt:* $E[u(e)] > u(E[e])$.

Demzufolge ist der Akteur risikoneutral, wenn der subjektiv erwartete Nutzen des Ergebnisses dem Nutzen des Erwartungswertes desselben gleicht. Im Fall von Risikoaversion ist der erwartete Nutzen kleiner als der Nutzen des Erwartungswertes.

Als Referenzpunkt für die ergänzende Erklärung der Risikoneigungen wird das **Sicherheitsäquivalent** (SÄ) verwendet. Damit wird derjenige sichere Geldbetrag beschrieben, der aus Sicht des Akteurs dem unsicheren Ergebnis gleichwertig ist. Es handelt sich dabei um einen hypothetischen Wert, der die Frage beantwortet, welcher sichere Geldbetrag einem Akteur gezahlt werden müsste, damit er sein Recht auf die Teilnahme an einer Lotterie – also seine Chance auf ein unsicheres Ergebnis – verkauft. Das SÄ ist quasi die "Preisuntergrenze" aus Sicht des Lotterieescheininhabers. Damit wird auch deutlich,

[439] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.2 auf S. 70.
[440] Vgl. Abschn. 1.7.2.4 auf S. 208.
[441] Vgl. Grant/Van Zandt (2008: 37–38).
[442] Vgl. Kruschwitz/Husmann (2012: 62–63).

dass es sich bei dem unsicheren Ergebnis um einen ökonomisch oder auch materiell positiven bzw. erstrebenswerten Wert wie z. B. einen Geldbetrag o. ä. handeln muss. Die Differenz zwischen $E[e]$ und $S\ddot{A}$ wird als Risikoprämie RP bezeichnet, es folgt $RP = E[e] - S\ddot{A}$. Für die drei grundlegenden Fälle der Risikoeinstellung gelten folgender Zusammenhänge:[443]

- **Risikoneutralität:** Das $S\ddot{A}$ der subjektiven Nutzenfunktion entspricht dem Erwartungswert der Zufallsverteilung, d. h. $E[e] = S\ddot{A}$. Der Akteur ist beiden Zuständen gegenüber indifferent. Er wäre deshalb weder bereit, eine Prämie für die Teilnahme an der unsicheren Situation zu zahlen, noch für den Erhalt der sicheren Zahlung auf einen Teil zu verzichten. Eine Risikoprämie existiert nicht, da: $RP = E[e] - S\ddot{A} = 0$. Die Nutzenfunktion verläuft linear steigend, da: $\frac{\partial^2 u(e)}{\partial e^2} = 0$.
- **Risikoaversion:** Das $S\ddot{A}$ der subjektiven Nutzenfunktion ist geringer als der Erwartungswert der Zufallsverteilung. Der Akteur bevorzugt die sichere Alternative. Er wäre deshalb bereit, für den Erhalt der sicheren Zahlung einen Abschlag auf den Erwartungswert hinzunehmen. Die Risikoprämie ist demzufolge positiv, also gilt: $RP = E[e] - S\ddot{A} > 0$. Das wird als **Risikoabschlag** bezeichnet, da ein risikoaverser Entscheider als Inhaber eines Lotterieloses beim Verkauf desselben einen Abschlag auf $E[e]$ hinnimmt, da: $E[e] > S\ddot{A}$. Deshalb wird die Risikoprämie in diesen Fällen auch als Versicherungsprämie bezeichnet. Die Nutzenfunktion verläuft degressiv steigend (also konkav), da: $\frac{\partial^2 u(e)}{\partial e^2} < 0$.
- **Risikofreude:** Das $S\ddot{A}$ der subjektiven Nutzenfunktion ist größer als der Erwartungswert der Zufallsverteilung. Der Akteur bevorzugt die unsichere Alternative. Er wäre deshalb bereit, für die Teilnahme an der unsicheren Alternative einen Zuschlag auf das $S\ddot{A}$ zu zahlen. Die Risikoprämie ist negativ, was als **Risikozuschlag** bezeichnet wird. Ein risikofreudiger Akteur wird beim Verkauf seines Lotterieloses einen Preis fordern, der über dem Erwartungswert liegt, da gilt: $E[e] < S\ddot{A}$. Die Nutzenfunktion verläuft progressiv steigend (also konvex), da: $\frac{\partial^2 u(e)}{\partial e^2} > 0$.

Zum besseren Verständnis wird Beispiel 1.13 herangezogen.

Beispiel 1.13:

Ein Akteur kann zwischen den folgenden Alternativen wählen:

- a_1 : *sichere Geldanlage mit dem Ergebnis von* X €,
- a_2 : *risikobehaftete Geldanlage, die mit 50 %ger Wahrscheinlichkeit* 0 € *erzielt, und mit 50 %ger Wahrscheinlichkeit* 500 € *erzielt.*

Ein risikofreudiger Akteur würde selbst bei Werten $250 € < X < 500 €$ *die Alternative* a_2 *präferieren. Aus seiner Sicht stiftet die unsichere Alternative mit dem geringeren*

[443] Vgl. Bitz (1981: 162); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 262–263); Kruschwitz/Lorenz (2019: 274–275).

Erwartungswert einen höheren Nutzen. Der risikoscheue Akteur hingegen würde selbst bei Werten $0€ < X < 250€$ die Alternative a_1 vorziehen und einen Abschlag auf den Erwartungswert hinnehmen, um das Risiko zu vermeiden. Aus seiner Sicht stiftet die unsichere Anlage einen geringeren Nutzen als die sichere Anlage, trotz des höheren Erwartungswertes. Dieser Zusammenhang ist für den Fall der Risikoaversion schematisch in der Abbildung 1.25 dargestellt.

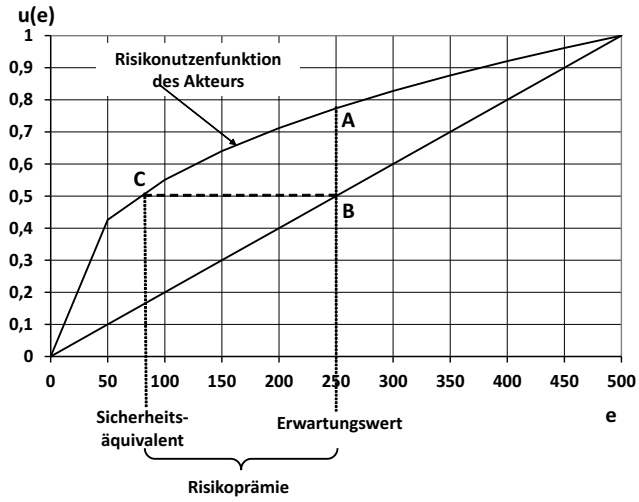


Abb. 1.25: Konkave Risikonutzenfunktion. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Bitz (1981: 164).

Der Punkt B bezeichnet den Erwartungswert der unsicheren Alternative bei einem Ergebniswert von 250€. Der Risikonutzen der sicheren Anlage ist aus Sicht des risikoscheuen Anlegers jedoch durch die Nutzenfunktion an dieser Stelle höher (Punkt A) als der Risikonutzen der unsicheren Anlage. Er wird deshalb die sichere Anlageform wählen.

Die Nutzenfunktion in dem Beispiel weist einen konkaven Verlauf auf, wie es für alle risikoaversen Akteure charakteristisch ist. Der zum unsicheren Erwartungswert äquivalente Nutzen der sicheren Anlage ist durch die RNF mit dem Punkt C definiert. Der mit diesem Punkt korrespondierende Wert auf der Abszisse beschreibt das $S\ddot{A}$. Der Wert des $S\ddot{A}$ ist – wie schon beschrieben – im Fall risikoscheuer Akteure geringer als der Erwartungswert, so dass eine positive Risikoprämie resultiert. Die Nutzenfunktion eines risikofreudigen Akteurs hingegen weist immer einen konvexen Verlauf auf. Diese Risikonutzenfunktion muss für jeden Entscheider individuell durch eine Befragung ermittelt werden. Das wird im folgenden Abschnitt demonstriert.

Nach dieser Darstellung muss noch geklärt werden, wie das Bernoulli-Prinzip zur Entscheidungsfindung eingesetzt und wie die RNF des Akteurs ermittelt werden kann. Dazu sind die folgenden Schritte notwendig:[444]

1. Normierung der RNF
2. Durchführung hypothetischer Wahlakte
3. Bestimmung der kritischen Wahrscheinlichkeit
4. Ermittlung der RNF (ggfs. grafische Darstellung)
5. Bestimmung der Risikonutzenwerte und Erstellung der Entscheidungsmatrix
6. Ermittlung der Erwartungswerte des Risikonutzens

Als **erster Schritt** muss die Normierung der RNF geschehen. Dies war auch bei Entscheidungen unter Sicherheit der Fall und wurde als **Bandbreitennormierung** bezeichnet. Aus der Menge der vorliegenden Ereignisse werden der Maximal- und der Minimalwert ermittelt und deren Nutzwerte wie folgt definiert:

$$u(e_{max}) = 1 \; sowie \; u(e_{min}) = 0$$

Im **zweiten Schritt** wird die Bernoulli-Befragung durchgeführt. In dieser Befragung wird die vorliegende Situation abgebildet durch eine Basisreferenzlotterie (BRL) und umformuliert (vgl. Abbildung 1.26).

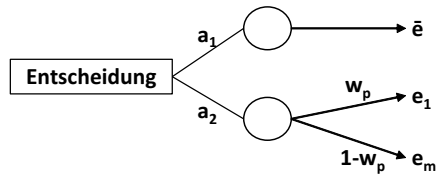


Abb. 1.26: Alternativendarstellung bei der Bernoulli-Befragung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 79).

Der Akteur muss angeben, bei welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung er dieses unsichere Ereignis (L_2) für ebenso nutzenstiftend einschätzt, wie einen sicheren Äquivalenzwert (L_1).[445] Dieser sichere Wert stellt das schon bekannte SÄ dar. Es wird durch die Befragung derjenige sichere Wert gesucht, der aus Akteurssicht äquivalent zu der vorgegebenen unsicheren Verteilung ist.[446]

[444] Vgl. Bitz (1981: 158–159).

[445] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 79–82); Obermaier/Saliger (2020: 85–90).

[446] Alternativ kann auch ein sicherer Wert vorgegeben werden und der Akteur muss die äquivalente Eintrittswahrscheinlichkeit angeben.

Ausgehend von der bisherigen Notation mit e_{ip} als Ergebnis der Alternative L_i im Zustand z_p, werden sämtliche Ergebnisse betrachtet und mit e_j bezeichnet, wobei $j = 1,...,m$. Diese Ergebnisse müssen in eine vollständige konsistente Reihe der Form $e_1 \succsim e_2 \succsim e_3 \succsim ... \succsim e_m$ gebracht werden.

Im **dritten Schritt** muss der Akteur nun für jedes Ergebnis e_j $(j = 2,3,...,m-1)$ eine kritische Wahrscheinlichkeit w_p^* angeben, mit der das Maximalergebnis e_1 eintreten kann, so dass bei Verwendung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung, die ausschließlich e_1 und e_m beinhaltet, die unsichere Alternative gleichwertig zu dem sicheren Ergebnis $\overline{e_j}$ ist. Es muss gelten:

$$\overline{e}_{j_{e_1;w_p^*;e_m}} \sim (e_1; w_p^*; e_m)$$

Dann muss bei Äquivalenz der alternativen Lotterien L_1 und L_2 für den Risikonutzen der beiden Ergebnisse gelten:[447]

$$u(BRL) = w_p^* \cdot u(e_1) + (1 - w_p^*) \cdot u(e_m) = u(\overline{e}_{j_{e_1;w_p^*;e_m}})$$

Die daraus resultierenden Werte werden im **vierten Schritt** herangezogen, um die Risikonutzenfunktion zu bestimmen. Die resultierenden Werte können grafisch abgetragen werden, um die RNF des Akteurs zu bestimmen. Dies ist erforderlich, um für diejenigen Ergebniswerte, die nicht explizit in der Befragung enthalten waren, ebenfalls Nutzwerte ermitteln zu können. Alternativ kann die RNF auf Basis der abgefragten Daten rechnergestützt approximiert werden.

Darauf aufbauend können im **fünften Schritt** die Risikonutzenwerte der verschiedenen Ergebnisse berechnet und die Entscheidungsmatrix erstellt werden. Anschließend wird im **sechsten Schritt** der Erwartungswert der Risikonutzenwerte berechnet. Zur Veranschaulichung der Methodik wird das Beispiel 1.14 entwickelt.

Beispiel 1.14:

Es werden vier Alternativen (Lotterien) betrachtet, deren Geldwerte für die möglichen Zukunftslagen in Tabelle 1.30 zu sehen sind.

[447] Vgl. Bitz (1981: 159–160).

Tab. 1.30: Ausgangsdaten des BERNOULLI-Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion	Zustände				Funktional: $\mu_i = \sum_{p=1}^{n} e_{ip} \cdot w_p$
	z_1 mit $w_1 = 0{,}2$	z_2 mit $w_2 = 0{,}3$	z_3 mit $w_3 = 0{,}4$	z_4 mit $w_4 = 0{,}1$	
a_1	500	225	175	0	**237,50**
a_2	450	310	210	0	**267,00**
a_3	440	190	125	10	**196,00**
a_4	500	290	190	20	**265,00**

Alternativen a_3 und a_1 werden von Alternative a_4 zustandsdominiert[448] *und deshalb aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Würde der Akteur nach dem* BAYES*-Prinzip entscheiden, wäre die Alternative a_2 die optimale Alternative, da deren Erwartungswert mit $\mu_2 = 267{,}00$ am größten ist. Die Ergebnisse der* BERNOULLI*-Befragung sind in Tabelle 1.31 zu sehen.*

Tab. 1.31: Ergebnisse der BERNOULLI-Befragung. Quelle: Eigene Darstellung.

Vorgegebene Ergebnisverteilung		Abgefragtes
$1 - w_p^*$ für $e_{min} = 0$	w_p^* für $e_{max} = 500$	Sicherheitsäquivalent
0	1	500
0,20	0,80	300
0,40	0,60	175
0,50	0,50	125
0,60	0,40	75
0,80	0,20	25
1	0	0

Wird diese Zuordnung verwendet und werden die fehlenden Werte durch Approximation ergänzt, resultiert die Darstellung in Abbildung 1.27. Diese Funktion kann näherungsweise durch $u(e) = 0{,}04475 \cdot \sqrt{e}$ beschrieben werden. Mit dieser Approximation können im nächsten Schritt die Erwartungswerte des Risikonutzens ermittelt werden (vgl. Tabelle 1.32).

Tab. 1.32: Erwartungswerte des Risikonutzens. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion	Nutzen des unsicheren Ergebnisses				Funktional: $\sum_{p=1}^{n} u(e_{ip}) \cdot w_p$	
	$u(e_{i1}) \cdot w_1$	$u(e_{i2}) \cdot w_2$	$u(e_{i3}) \cdot w_3$	$u(e_{i4}) \cdot w_4$		
a_2	0,190	0,236	0,259	0,000	**0,686**	
a_4	0,200	0,229	0,247	0,020	**0,695**	⇐ **max**

Alternative a_4 weist den höchsten Wert auf und ist deshalb die optimale Alternative.

[448] Vgl. Def. 1.24 auf S. 100.

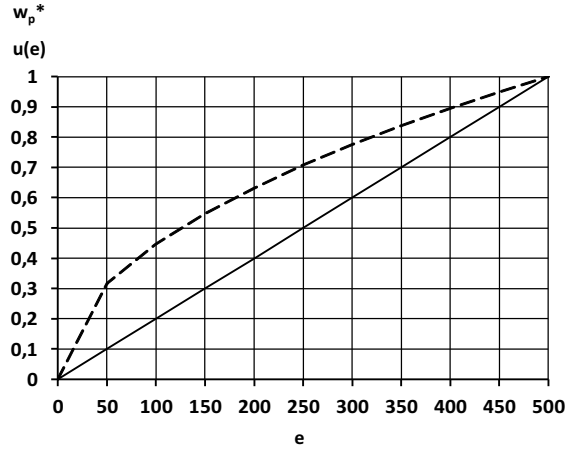


Abb. 1.27: Darstellung der approximierten Risikonutzenfunktion des Akteurs. Quelle: Eigene Darstellung.

An dem Beispiel wird deutlich, dass im Rahmen des Bernoulli-Prinzips nicht der Erwartungswert des Ergebnisses, sondern der Erwartungswert des Risikonutzens verwendet wird.

1.5.4.4 Zusammenfassende Kritik

1.5.4.4.1 Diskussion der Axiome

Kritik erfuhr das Bernoulli-Prinzip bzw. die Erwartungsnutzentheorie mit Blick auf die zugrundeliegende Axiome sowie die Praktikabilität.[449] Diese Punkte werden kurz ausgeführt.

- **Axiomatische Grundlagen:** Es ist fraglich, ob ein Entscheidungsträger in der Realität die Axiome kennt sowie gewillt und in der Lage ist, diese zu befolgen. Die Axiome sind aus mathematischer Sicht erforderlich, um eine kardinale Nutzenfunktion bei Risiko zu konstruieren. Die Axiome treffen keine Aussage über das tatsächliche Entscheidungsverhalten. Auch aus diesem Grunde wird das Bernoulli-Prinzip als Bernoulli-Paradigma bezeichnet.[450]

  Ausgangspunkt der Betrachtung waren die Annahmen über die Mischungsmenge der Lotterien M: Konvexität, Reduzierbarkeit und Sym-

[449] Vgl. Jensen (1967b: 238–242); Kahneman/Tversky (1979); Bitz (1981: 186–192); Trost (1991: 67–69); Obermaier/Saliger (2020: 82–85).

[450] Vgl. Brachinger (1988).

metrie.[451] Mit diesen Annahmen ist es möglich, unterschiedlichste Lotterien durch Mischung anderer Lotterien zu konstruieren. Schon VON NEUMANN und MORGENSTERN waren sich der Bedeutung dieser Forderung bewusst.[452] Darauf aufbauend wurden **Ordnung** (Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität), **Stetigkeit** sowie **Unabhängigkeit** als notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der Risikonutzenfunktion herausgestellt.[453]

Die Anforderungen, die sich aus den **Ordnungs-Axiomen** ergeben, dürften unstrittig sein. Grundlegende praktische Probleme im Hinblick auf die **Vollständigkeit** und die **Transitivität** wurden bereits erwähnt.[454] In Ergänzung zu diesen Ausführungen wird auf folgende spezifische Schwierigkeiten aufmerksam gemacht:

- **Vollständigkeit:** Es wurde darauf hingewiesen, dass die Menge der Lotterien $\mathfrak{L}$ durch real existierende Handlungsalternativen gebildet werden. Die Möglichkeit der Mischung führt jedoch zur Mischungsmenge M, welche auch real nicht existierende Lotterien enthält. Die Präferenzen des Akteurs müssen aber über die gesamte Mischungsmenge M definiert sein.[455] Das ist in vielen Fällen nicht realisierbar, auch deshalb nicht, weil es sich in Teilen um lediglich hypothetische Relationen handelt.[456] Die theoretisch möglichen Mischungsoperationen erschweren gleichzeitig die **Vergleichbarkeit** der Alternativen. Trotz des scheinbar simplen und nachvollziehbaren Inhalts halten einige Autoren das Vollständigkeits-Axiom für das frag- bzw. kritikwürdigste Axiom.[457] Auch VON NEUMANN und Morgenstern waren sich der ein-

[451] Vgl. Axiom 1.2 auf S. 113.

[452] *„It seems probable, that the really critical group of axioms is (3:C) or, more specifically, the axiom (3:C:b). This axiom expresses the combination rule for multiple chance alternatives, and it is plausible, that a specific utility or disutility of gambling can only exist if this simple combination rule is abandoned. Some change of the system (3:A)-(3:C), at any rate involving the abandonment or at least a radical modification of (3:C:b), may perhaps lead to a mathematically complete and satisfactory calculus of utilities, which allows for the possibility of a specific utility or disutility of gambling. It is hoped that a way will be found to achieve this, but the mathematical difficulties seem to be considerable.“* Neumann/Morgenstern (1953: 632).

[453] Vgl. Merksatz 1.9 auf S. 117.

[454] Vgl. Abschn. 1.3.3 auf S. 40.

[455] *„A mixture space has an infinite number of elements and the judge is asked to make judgements of preference or indifference between each pair of these elements, and these judgements are to be transitive.“* Thrall (1954: 183).

[456] Vgl. Jensen (1967b: 239–240); Löffler (2001: 15); Fine (2008: 622).

[457] Vgl. Thrall (1954: 183); Aumann (1962: 446).

schränkenden Wirkung dieser Annahme bewusst.[458] Schon frühzeitig wurde deshalb versucht, eine Nutzentheorie bei unvollständigen Präferenzen zu entwickeln.[459]

- **Transitivität:** Auf diese Weise wird – wie bereits erwähnt – gleichzeitig die Erfüllung der Transitivität erschwert, da der Akteur in der Lage sein muss, unabhängig von der Darstellungsform – also der Mischung – eine transitive Ordnung anzugeben. Zwar tritt das Problem zyklischer Präferenzen (und damit der *„Geldpumpen"*-Effekt) nicht auf, da es sich nicht um eine sequenzielle Entscheidung handelt,[460] jedoch dürfte eine transitive Ordnung wegen der Mischungsoperationen schwer aufzustellen sein. In Experimenten wurde frühzeitig die Tendenz zur Umkehrung von Präferenzen (*preference reversal*) festgestellt.[461] Offensichtlich beeinflusst die Art der Bestimmung der Präferenzen die Ausprägung derselben.
- **Stetigkeit:** Die Anforderungen des Stetigkeitsprinzips[462] werden ebenfalls kritisch gesehen, da diese den realen Entscheidungsträger durch die erforderliche Angabe der kritischen Wahrscheinlichkeit überfordern dürften. Ein häufig zu findendes Gegenargument schildert Beispiel 1.15.[463]

Beispiel 1.15:

Ein Entscheidungsträger sieht sich mit den folgenden drei Alternativen und Ergebnissen konfrontiert:

$$e_1: \; -\infty \; (\textit{sofortiger Tod})$$
$$e_2: \; 100 \text{€}$$
$$e_3: \; 200 \text{€}$$

Die Präferenz eines rationalen Akteurs wird lauten: $e_1 \prec e_2 \prec e_3$*. Entsprechend dem Stetigkeits-Axiom muss gelten:* $\lambda \cdot e_1 + (1-\lambda) \cdot e_3 \sim e_2$*. Also müsste der Akteur in der Lage sein, eine Wahrscheinlichkeit* λ *anzugeben, bei der er indifferent wäre zwischen dem Erhalt von 100€ einerseits und andererseits der Chance, mit der Wahrscheinlichkeit* $(1-\lambda)$ *den Betrag von 200€ zu erhalten*

---

458 *„We have conceded that one may doubt whether a person can always decide which of two alternatives [...] he prefers. But, whatever the merits of this doubt are, this possibility – i.e. the completeness of the system of (individual) preferences – must be assumed even for the purposes of the "indifference curve method". [...] If the general comparability assumption is not made, a mathematical theory [...] is still possible. It leads to what may be described as a many-dimensional vector concept of utility. This is a more complicated and less satisfactory set-up, but we do not propose to treat it systematically at this time."* Neumann/Morgenstern (1953: 28–29). Hervorh. im Original.

459 Vgl. Aumann (1962); Dubra/Maccheroni/Ok (2004).

460 Vgl. Fishburn (1991: 116–119); Cubitt/Sugden (2001: 123–124); Fischer (2004: 92).

461 Vgl. Lichtenstein/Slovic (1971); Tversky/Thaler (1990).

462 Vgl. Anf. 1.5.4 auf S. 115.

463 Vgl. Luce/Raiffa (1957: 27); French (1988: 161); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 251); Klein/Scholl (2011: 427); Wiese (2021: 100).

oder mit der Wahrscheinlichkeit λ sofort zu sterben. Dies dürfte in der Realität nicht der Fall sein.

Eine genaue Betrachtung von Beispiel 1.15 zeigt jedoch, dass es sich um ein zweidimensionales Problem handelt bzw. um ein Problem mit zwei Nutzendimensionen.[464] Es handelt sich um die Dimensionen "Leben" und "Geld", wobei die erste Dimension die zweifellos wichtigere Dimension ist. Demzufolge liegt im Beispiel 1.15 eine **lexikografische Präferenzordnung** vor. Diese Art der Präferenz wurde bereits vorgestellt[465] und es wurde in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass lexikografische Präferenzen nicht stetig sind. Aus diesem Grund zeigt Beispiel 1.15, dass lexikografische Präferenzordnungen nicht stetig sind, bzw. dass das Stetigkeits-Axiom lexikografische Präferenzen ausschließt.[466] Damit zeigt das Beispiel eindrücklich die Bedeutung des Axioms und offenbart, dass lexikographische Präferenzen in vielen realen Problemen auftreten, ohne als solche erkannt zu werden. Das Stetigkeits-Axiom ist genau für diese Situationen geschaffen.

Das Stetigkeits-Axiom impliziert deshalb eine **einzige Nutzendimension**.[467] Wenn auf die Stetigkeit verzichtet wird, lässt sich deshalb lediglich eine lexikografische Form des Erwartungsnutzens begründen.[468]

Das Beispiel 1.15 weist außerdem auf einen wichtigen Unterschied hin: Die Stetigkeit verhindert die Existenz unendlicher Nutzenwerte, nicht jedoch unendlicher Ergebniswerte. Prinzipiell existieren folgende Möglichkeiten zur Erzeugung unendlicher Nutzenwerte:[469]

- Der Akteur weist einem Ergebnis einen unendlichen Nutzen zu. Dies ist bei der Gotteswette von Pascal[470] der Fall.
- Die Nutzenfunktion des Akteurs ist unbeschränkt, wodurch unendliche Nutzenwerte entstehen. Auf dieser Konstellation beruht das St.-Petersburg-Paradox.[471]

Demzufolge ist das Stetigkeits-Axiom – in dem hier gewählten Betrachtungsrahmen – zwingend erforderlich, um Lotterien bzw. Ergebnisse mit unendlich positiven bzw. unendlich negativem Nutzen aus-

---

[464] Vgl. Thrall (1954: 184–185).
[465] Vgl. Bspl. 1.2 auf S. 43.
[466] Vgl. Russell (2020: 181).
[467] Vgl. Thrall (1954: 184–185); Schmidt (2004: 812).
[468] Vgl. Hausner (1954); Fishburn (1971: 65–66); Fishburn (1979: 110); Russell (2020).
[469] Vgl. Jordan (1993: 50–51); Anderson (1995: 50–52); Russell (2020: 181).
[470] Vgl. Beispiel 1.17 auf S. 163.
[471] Vgl. Abschn. 2.3.2.1 auf S. 304.

zuschließen.[472] Die Nutzenfunktion des Akteurs muss beschränkt sein. Die Stetigkeit der Präferenzen auf der Lotteriemenge in der einfachen Form[473] sorgt – in Verbindung mit den anderen Axiomen – für die Existenz einer beschränkten Nutzenfunktion $u(e)$. Wird die erwähnte strengere Formulierung verwendet,[474] ist diese beschränkte Nutzenfunktion ebenfalls stetig.

- **Unabhängigkeit:** Am meisten kritisiert wird jedoch das Unabhängigkeits-Axiom. Auf die Bedeutung und die unterschiedlichen Formulierungen bzw. Implikationen wurde bereits eingegangen.[475] Es wird hier wiederholt darauf hingewiesen, dass die Unabhängigkeitsforderung auch in vielen anderen Axiomensystemen standardmäßig enthalten ist,[476] und deshalb keine Besonderheit der Erwartungsnutzentheorie darstellt. An anderer Stelle wird detailliert auf diese Kritik eingegangen.[477]

- **Praktikabilität:** Zusätzlich wird aus **praktischer Perspektive** die Erzeugung der individuellen Risikonutzenfunktion kritisch gesehen. Auch wenn die dargestellten Anforderungen ohne Einschränkungen erfüllt werden könnten, bleibt die Frage zu beantworten, ob der Akteur den Aufwand der Ermittlung seiner individuellen RNF in Kauf nimmt, um vollständig rational zu handeln. Beobachtungen des realen Verhaltens scheinen diese Theorie zu widerlegen bzw. in einem kritischen Licht darzustellen.[478]

Abschließend kann zur Einordnung dieser Kritik auf die Vorgehensweisen zur Generierung des Präferenzfunktionals verwiesen werden.[479] Bei der Begründung des vNM-Präferenzfunktionals werden zuerst die Eigenschaften der zu messenden empirischen Struktur festgelegt. Diese kann anschließend mit dem dafür geschaffenen Funktional ordnungstreu gemessen werden. Die Ordnungstreue des Funktionals[480] ist aus diesem Grund eine logische Folge der vorgegebenen Eigenschaften der Präferenzen. Werden die Eigenschaften der zu messenden empirischen Struktur abgelehnt oder sind diese in der Realität nicht erfüllt, kann das Präferenzfunktional nicht mehr ordnungstreu sein.

---

[472] Vgl. Jensen (1967b: 241).

[473] Vgl. Anf. 1.5.4 auf S. 115.

[474] Vgl. Definition 1.13 auf S. 33.

[475] Vgl. Abschn. 1.5.4.2 auf S. 120. Zur Historie dieses Axioms vgl. Moscati (2016).

[476] Bei multikriteriellen Entscheidungen (Anf. 1.4.4 auf S. 61), bei Entscheidungen unter Ungewissheit (Anf. 1.6.9 auf S. 167) sowie bei intertemporalen Entscheidungen (Anf. 1.7.5 auf S. 195).

[477] Vgl. Abschn. 2.3.2.2 auf S. 315.

[478] Vgl. Hampton (1994); Schneider (2011: 191).

[479] Vgl. Tab. 1.4 auf S. 18.

[480] Vgl. Def. 1.3 auf S. 16.

1.5.4.4.2 Fazit

Die Erwartungsnutzentheorie wurde auf Basis vielfältiger Kritiken und Untersuchungen weiterentwickelt bzw. es wurden alternative Theorien vorgestellt. Der bekannteste Ansatz stammt von Kahneman und Tversky und ist unter dem Begriff der **„Prospect-Theory“** zusammengefasst und bekannt geworden.[481] Diese Ansätze werden hier nicht vorgestellt, sondern es wird auf die entsprechenden Ausführungen verwiesen.[482]

Als weitere Alternative ist die duale Nutzentheorie zu erwähnen. Diese wird in gewisser Weise als dual zur Erwartungsnutzentheorie interpretiert, ohne jedoch das Unabhängigkeitsaxiom zu benötigen. Auch für die Diskussion dieser Theorie wird auf die Literatur verwiesen.[483]

1.5.4.5 Stochastische Dominanz

1.5.4.5.1 Einführung

Die stochastische Dominanz ist schon seit den 1930-er Jahren ein mathematisches Forschungsfeld gewesen und erfuhr mit der Etablierung der verschiedenen Nutzentheorien eine Bedeutungssteigerung.[484] Stochastische Dominanz ist aus folgenden Gründen interessant:

- Monotonie bezüglich stochastischer Dominanz kann als Eigenschaft bzw. Anforderung an ein Präferenzfunktional oder Risikomaß verwendet werden.[485]
- Außerdem kann die stochastische Dominanz ergänzend zu den bereits vorgestellten Dominanzarten[486] als Vorauswahlkriterium für Entscheidungen bei Risiko herangezogen werden.

Im Unterschied zu den bisherigen Darstellungen werden die unsicheren Ergebnisse in diesem Abschnitt mit der Variable x anstelle von e bezeichnet.

[481] Vgl. Kahneman/Tversky (1979); Tversky/Kahneman (1992). Amos Tversky (1937–1996) und Daniel Kahneman, geb. 1934. Kahneman erhielt 2002 zusammen mit Vernon Smith den „Wirtschaftsnobelpreis“. Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 423).

[482] Vgl. Kapitel 2 auf S. 287.

[483] Vgl. Trost (1991); Brandtner (2012: 264–276).

[484] Vgl. Mosler (1982: 12–14); Fishburn (1989b: 3).

[485] Vgl. Brandtner (2012: 118–119).

[486] Vgl. Absolute Dominanz in Def. 1.23 auf S. 100 und Zustandsdominanz in Def. 1.24 auf S. 100.

Die Alternativen werden – abweichend von der bisherigen Notation[487] – nicht als Lotterien bezeichnet.

Grundlage für das Konzept der stochastischen Dominanz ist ein Entscheider, welcher seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte.[488] Eine zentrale Rolle im Erwartungsnutzenkonzept spielt das **Unabhängigkeits-Axiom**,[489] das die Monotonie der Präferenzen des Akteurs impliziert.[490] Es wurde darauf hingewiesen, dass die Monotonie auch als **Dominanz** bezeichnet wird. Sie drückt aus, dass ein rationaler Akteur versuchen wird, die Wahrscheinlichkeit eines besseren Ergebnis zu erhöhen und die Wahrscheinlichkeit eines schlechteren Ergebnisses zu reduzieren. Dieses Axiom bzw. diese Handlungsmaxime ist die Grundlage für das Konzept der stochastischen Dominanz.[491] Der Erwartungsnutzen in allgemeiner Form für stetige Verteilungen kann mit Definition 1.37 beschrieben werden.[492]

Definition 1.37: *Der Erwartungsnutzen einer Verteilungsfunktion von stetig verteilten Zufallsereignissen $F(x)$ ist definiert durch*

$$U(F(x)) = E_F[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dF(x).$$

Anstelle der Verteilungsfunktion wird in einigen Quellen auch die Dichtefunktion zur Beschreibung verwendet (vgl. Definition 1.38).[493]

Definition 1.38: *Der Erwartungsnutzen einer stetigen Dichtefunktion $f(x)$ ist definiert durch*

$$U(f(x)) = E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)\,dx.$$

Die folgenden Darstellungen verwenden das Erwartungsnutzenprinzip als Rahmen, jedoch wird schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die stochastische Dominanz ersten Grades auch für andere Nutzenfunktionen gilt. Das wird zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal erläutert. Von zwei stetigen Verteilungsfunktionen ($F(x)$ und $G(x)$) dominiert diejenige Verteilung, die den größeren Erwartungsnutzen verspricht (vgl. Merksatz 1.11).[494]

[487] Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.
[488] Vgl. Merksatz 1.9 auf S. 117.
[489] Vgl. Axiom 1.5.5 auf S. 116.
[490] Vgl. Axiom 1.5.6 auf S. 121.
[491] Vgl. Hadar/Russell (1969: 25–26).
[492] Vgl. Schmidt (2004: 766); Meyer (2014: 104).
[493] Vgl. Schneeweiß (1966: 61); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 285).
[494] Vgl. Hanoch/Levy (1969: 336); Bawa (1975: 99); Levy (2016: 47).

Merksatz 1.11: *Die Verteilung F(x) dominiert die Verteilung G(x), wenn gilt:* $\Delta E[u] = E_F[u(x)] - E_G[u(x)] \geqq 0$.

D. h. der Erwartungsnutzen der Verteilung F(x) ist größer als der Erwartungsnutzen G(x). Die Differenz des Erwartungsnutzens in Satz 1.11 kann mit der Definition des Erwartungsnutzens von stetig verteilten Zufallsvariablen in Def. 1.37 in Merksatz 1.12 formuliert werden:[495]

Merksatz 1.12: *Es seien zwei Verteilungsfunktionen* $F(x)$ *und* $G(x)$ *und* $u(x)$ *als streng monoton wachsende Nutzenfunktion mit endlichen Werten für jedes endliche* x*, so gilt:*

$$\Delta E[u] = E_F[u(x)] - E_G[u(x)] = \int (G(x) - F(x))\, du(x).$$

Das bedeutet, für einen Akteur mit $u(x)$ als streng monoton wachsender Nutzenfunktion können zwei Paare von Zufallsvariablen entsprechend Satz 1.12 verglichen werden. Dies bildet die Grundlage für die weiteren Darstellungen. Die Bezeichnung *„stochastische Dominanz erster bzw. zweiter Ordnung"* steht dabei synonym für die in der Literatur ebenfalls häufig anzutreffende Bezeichnung als *„stochastische Dominanz ersten bzw. zweiten Grades"*.

1.5.4.5.2 Dominanz erster Ordnung

Wenn sich ein Akteur mit streng monoton wachsender Risikonutzenfunktion an der Maximierung des Erwartungsnutzens orientiert, so kann er zwei Alternativen miteinander vergleichen, indem er die Relation der Verteilungsfunktionen analysiert (vgl. Definition 1.39).[496]

Definition 1.39: *Zwei Verteilungsfunktionen und eine Nutzenfunktion seien definiert wie in Satz 1.12. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Dominanz von* $F(x)$ *über* $G(x)$ *ist:* $F(x) \leqq G(x)\ \forall\ x$ *und* $F(x_0) < G(x_0)$ *für ein* x_0.

Diese Dominanz wird als **stochastische Dominanz erster Ordnung** bezeichnet. In diesem Fall gilt die Notation $F(x) \succ_{FSD} G(x)$.[497] Definition 1.39 drückt aus, dass ein Akteur zur Maximierung des Erwartungsnutzens diejenige Alternative wählen soll, deren Verteilungsfunktion an keiner Stelle Werte

[495] Für einen Beweis vgl. Hanoch/Levy (1969: 336–337) und Kruschwitz/Husmann (2012: 90–92).

[496] Vgl. Hanoch/Levy (1969: 337); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 101).

[497] Die Bezeichnung erfolgt konventionell auf Basis der englischsprachigen Abkürzung. FSD steht für First-order Stochastic Dominance.

annimmt, die größer sind als diejenigen Werte der Verteilungsfunktion der Vergleichs-Alternative.

Im **ersten Schritt** müssen die möglichen Ergebnisse jeder Alternative in nicht-absteigender Reihenfolge geordnet werden, beginnend mit dem schlechtesten Ergebnis. Im bisherigen Verlauf wurden n Zustände z_p mit $p = 1,...,n$ und der Eintrittswahrscheinlichkeit w_p betrachtet. Nun werden die Ergebnisse mit x_p bezeichnet, wobei $p = 1,2,...,s,...,n$ und so, dass von zwei beliebigen Ergebnissen das größere einen höheren Index erhält.

Im **zweiten Schritt** wird untersucht, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Alternative einen Ergebniswert s erreicht. Daraus ergibt sich die Verteilungsfunktion für den Eintritt des Ergebnisses $F(x_s)$ wie folgt:

$$F(x_s) = \sum_{p=1}^{s} w_p.$$

Im **dritten Schritt** werden die Verteilungsfunktionen miteinander verglichen. Eine Alternative a_1 dominiert eine Alternative a_2 stochastisch in erster Ordnung, wenn die Werte der Verteilungsfunktion von a_1 an jeder Stelle des Definitionsbereiches kleiner bzw. höchstens genauso groß ist, wie die Werte der Verteilungsfunktion von a_2 (vgl. Definition 1.40).

Definition 1.40: *Eine Aktion $a_1 \in A$ dominiert die Aktion $a_2 \in A$ stochastisch in erster Ordnung, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} &F_{a_1}(x) \leq F_{a_2}(x) \ \forall \ x \\ &\textit{sowie} \\ &F_{a_1}(x) < F_{a_2}(x) \ \textit{für mindestens ein } x. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt die Notation $a_1 \succ_{FSD} a_2$. Zur Erläuterung wird das Beispiel 1.16 eingeführt, welches auf Tabelle 1.24 basiert, die in Tabelle 1.33 rekapituliert wird.

Beispiel 1.16:

Einem Akteur stehen die vier effizienten Anlagemöglichkeiten aus Tab. 1.33 zur Auswahl. Er möchte seinen Erwartungsnutzen maximieren und die vorteilhafte Alternative finden. Leider sieht er sich nicht in der Lage, die Bernoulli*-Befragung mit sich selbst durchzuführen. Trotzdem sucht er eine Lösung für das Entscheidungsproblem.*

Tab. 1.33: Ausgangsdaten der Entscheidung unter Risiko. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion	Zustände			
	z_1 mit $w_1 = 0{,}1$	z_2 mit $w_2 = 0{,}2$	z_3 mit $w_3 = 0{,}5$	z_4 mit $w_4 = 0{,}2$
a_2	4	9	8	6
a_4	15	3	15	4
a_5	6	8	12	8
a_6	6	5	10	16

Mit den Werten aus Tabelle 1.33 ergeben sich die Verteilungsfunktionen in Tabelle 1.34.

Tab. 1.34: Verteilungsfunktionen der Alternativen. Quelle: Eigene Darstellung.

$$F_{a_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 4, \\ 0{,}1 & \text{für} & 4 \leq x < 6, \\ 0{,}3 & \text{für} & 6 \leq x < 8, \\ 0{,}8 & \text{für} & 8 \leq x < 9, \\ 1 & \text{für} & x \geq 9. \end{cases}$$

$$F_{a_4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 3, \\ 0{,}2 & \text{für} & 3 \leq x < 4, \\ 0{,}4 & \text{für} & 4 \leq x < 15, \\ 1 & \text{für} & x \geq 15. \end{cases}$$

$$F_{a_5}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 6, \\ 0{,}1 & \text{für} & 6 \leq x < 8, \\ 0{,}5 & \text{für} & 8 \leq x < 12, \\ 1 & \text{für} & x \geq 12. \end{cases}$$

$$F_{a_6}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} & x < 5, \\ 0{,}2 & \text{für} & 5 \leq x < 6, \\ 0{,}3 & \text{für} & 6 \leq x < 10, \\ 0{,}8 & \text{für} & 10 \leq x < 16, \\ 1 & \text{für} & x \geq 16. \end{cases}$$

In Abb. 1.28 sind die Verteilungsfunktionen der Alternativen a_2 und a_5 dargestellt.

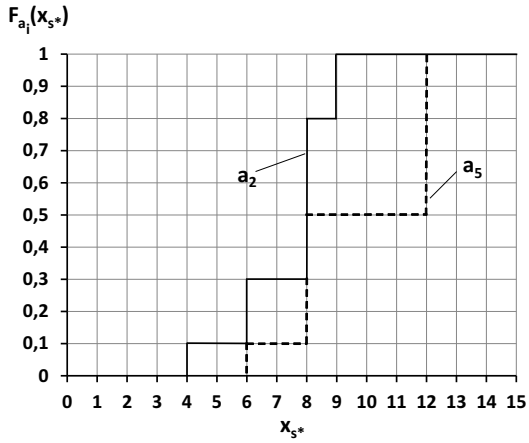


Abb. 1.28: Verteilungsfunktionen der Alternativen a_2 und a_5. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.34.

Auf Grundlage von Definition 1.40 kann festgestellt werden, dass $a_5 \succ_{FSD} a_2$. Kein Akteur, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte, wird sich demzufolge für die Alternative 2 entscheiden.

Um diesen Sachverhalt zu verallgemeinern, wird in Def. 1.41 eine Teilmenge von Nutzenfunktionen definiert.[498]

Definition 1.41: *Die Menge der monoton wachsenden Risikonutzenfunktionen U_1 ist wie folgt definiert:* $U_1 = \left\{ u(x) | u'(x) > 0 \right\}$.

In Def. 1.41 wird davon ausgegangen, dass $u(x)$ für endliche Werte von x ebenfalls endlich ist. In Verbindung mit der Definition des Erwartungsnutzens $E[u(x)]$[499] kann der Merksatz 1.13 formuliert werden.[500]

Merksatz 1.13: *Für einen Akteur, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte, gilt:* $a_1 \succ_{FSD} a_2 \Leftrightarrow E_{a_1}[u(x)] \geq E_{a_2}[u(x)] \forall\ u(x) \in U_1$.

Die stochastische Dominanz erster Ordnung spiegelt das Konzept des Erwartungsnutzens wider. Eine Alternative, die stochastisch in erster Ordnung dominiert wird, kann – bei Verwendung des Erwartungsnutzenkriteriums – nicht als die optimale Alternative resultieren.

Die Bedeutung bzw. Interpretation der stochastischen Dominanz erster Ordnung kann auch anhand der Risikoprofile erläutert werden. Diese basieren auf den Wahrscheinlichkeiten für das Überschreiten eines Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert x eintritt, der größer ist als der Wert x_s, wird bezeichnet als $Pr(x > x_s)$ und resultiert aus:[501]

$$Pr(x > x_s) = 1 - F(x_s).$$

Ermittlung und Interpretation der Risikoprofile werden wiederum anhand des Beispiels 1.16 erläutert.

Fortführung des Beispiels 1.16:

Mit den Daten aus der Tabelle 1.34 werden auf dieser Grundlage für die Alternativen 2 und 5 die Wahrscheinlichkeitsfunktionen ermittelt (vgl. Tabelle 1.35).

---

[498] Vgl. Bawa (1975: 100); Levy (1992: 557); Levy (2016: 42).

[499] Vgl. Def. 1.34 auf S. 118.

[500] Vgl. Levy (1992: 557); Levy (2016: 47); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 100).

[501] Vgl. Kruschwitz/Husmann (2012: 463).

Tab. 1.35: Wahrscheinlichkeitsfunktionen für a_2 und a_5. Quelle: Eigene Darstellung.

$Pr_{a_2}(x) =$	$Pr_{a_5}(x) =$
$\begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leq 4, \\ 0{,}9 & \text{für} \quad 4 < x \leq 6, \\ 0{,}7 & \text{für} \quad 6 < x \leq 8, \\ 0{,}2 & \text{für} \quad 8 < x \leq 9, \\ 0 & \text{für} \quad x > 9. \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leq 6, \\ 0{,}9 & \text{für} \quad 6 < x \leq 8, \\ 0{,}5 & \text{für} \quad 8 < x \leq 12, \\ 0 & \text{für} \quad x > 12. \end{cases}$

In der Abbildung 1.29 sind die Risikoprofile der Alternativen a_2 und a_5 zu sehen. Es wird deutlich, dass die Alternative a_2 den Wert 9 nicht erreicht, wohingegen Alternative a_5 diesen Wert mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit erreicht. Für beide Alternativen beträgt die Wahrscheinlichkeit, Werte zu erreichen, die größer sind als 12*, gleich null.*

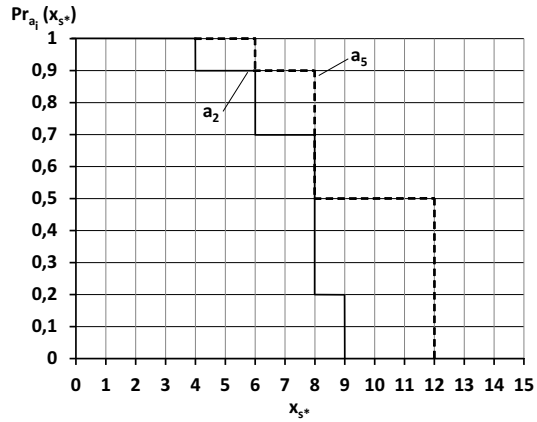


Abb. 1.29: Risikoprofile der Alternativen a_2 und a_5. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.35.

Aus der Abbildung 1.29 ist ersichtlich, dass die Alternative 5 die Alternative 2 stochastisch in erster Ordnung dominiert, da Alternative 2 in keinem Umweltzustand einen höheren Erwartungsnutzen offeriert als Alternative 5. Deshalb kann diese Alternative aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden.

Ausgangspunkt des Abschnitts war die Annahme eines Akteurs, welcher seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte. Merksatz 1.9[502] impliziert neben der Erfüllung der bisher angeführten Eigenschaften die Erfüllung der Eigenschaft der **Monotonie bzgl. stochastischer Dominanz erster Ordnung**.[503] Aufbauend auf der bereits erwähnten Monotonie[504] wird die Mo-

[502] Vgl. S. 117.

[503] Vgl. Machina (1987: 123); Sugden (2004: 691).

[504] Vgl. Anf. 1.5.6 auf S. 121.

notonie bezüglich stochastischer Dominanz erster Ordnung in Anforderung 1.5.11 beschrieben und als FOSD-Monotonie bezeichnet.[505]

Anforderung 1.5.11 (FOSD-Monotonie): *Die Relation $\succsim$ auf A ist monoton bezüglich stochastischer Dominanz erster Ordnung, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: $F_{a_1}(x) \leq F_{a_2}(x) \forall x \Rightarrow a_1 \succsim a_2$.*

Die FOSD-Monotonie ergibt sich aus dem Unabhängigkeits-Axiom, ist jedoch nicht so umfangreich bzw. so restriktiv.[506] Wenn die Präferenz eines Akteurs die FOSD-Monotonie erfüllt, dann wird ein Akteur keine Alternative bzw. Lotterie bevorzugen, die stochastisch in erster Ordnung dominiert wird. Ein Vergleich mit der bereits erwähnten Monotonie[507] zeigt die Ähnlichkeiten. Anforderung 1.5.11 wird in einigen Axiomensystemen ergänzend zur Unabhängigkeit angeführt, obwohl es sich – wie die soeben angesprochene Monotonie – aus der Unabhängigkeit ergibt.

Das vNM-Präferenzfunktional erfüllt die FOSD-Monotonie, bildet demzufolge Präferenzen, die monoton bezüglich stochastischer Dominanz erster Ordnung sind, ordnungstreu ab. Neben dem vNM-Präferenzfunktional erfüllen auch andere Funktionale diese Eigenschaft.[508]

1.5.4.5.3 Dominanz zweiter Ordnung

Die Verteilungsfunktionen der verbleibenden Alternativen sind in der Abbildung 1.30 dargestellt. Es ist erkennbar, dass für keine Alternative stochastische Dominanz erster Ordnung vorliegt. Für diese Fälle lässt sich die **stochastische Dominanz zweiter Ordnung** prüfen, die in allgemeiner Form unter Rückgriff auf Satz 1.11 und Satz 1.12 in Definition 1.42 eingeführt wird.[509]

Definition 1.42: *Es seien zwei Verteilungsfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ und $u(x)$ eine streng konkave Nutzenfunktion. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Dominanz von $F(x)$ über $G(x)$ ist:*

$$\int_{-\infty}^{x} (G(t) - F(t))\, dt \geqq 0 \;\forall\; x \text{ und } G > F \text{ für ein } x_0.$$

[505] Vgl. Brandtner (2012: 252).

[506] Vgl. Allais (1953: 504–505); Schneeweiß (1966: 38–42); Levy (1992: 559–560).

[507] Vgl. Axiom 1.5.6 auf S. 121.

[508] Vgl. Levy (1992: 560); Sugden (2004: 691).

[509] Vgl. Hanoch/Levy (1969: 338); Levy (2016: 67–68); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 101).

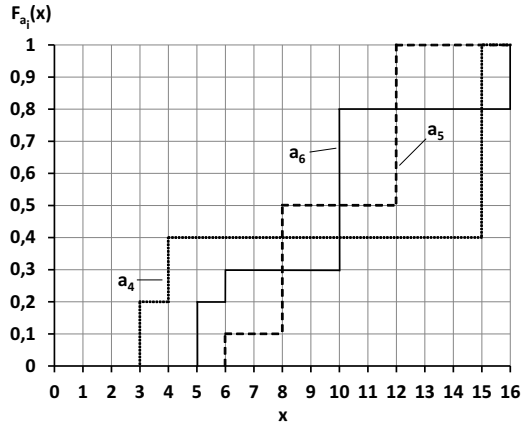


Abb. 1.30: Verteilungsfunktionen der verbleibenden Alternativen. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.34.

Demzufolge wird ein risikoaverser Akteur vorausgesetzt, da die Risikonutzenfunktion konkav verläuft. Wenn dies der Fall ist, dominiert eine Verteilung F die Verteilung G, wenn die **kumulierte Fläche** unter der Verteilungsfunktion F an **jeder Stelle** des Definitionsbereiches kleiner bzw. höchstens genauso groß ist, wie die kumulierte Fläche unter der Verteilungsfunktion G.[510] Ein Vergleich von Definition 1.39 auf S. 148 und Definition 1.42 auf S. 153 verdeutlicht, dass stochastische Dominanz erster Ordnung stochastische Dominanz zweiter Ordnung impliziert, die Umkehrung jedoch nicht gültig ist.

Im bisherigen Beispiel liegen diskrete Verteilungen vor. Zur Analyse des Beispiels werden die Flächeneinheiten unter den Verteilungsfunktionen in Abbildung 1.30 aufsummiert. Die Fläche zwischen zwei Ergebniswerten x_p und x_{p-1} unter einer diskreten Verteilungsfunktion ergibt sich aus:[511]

$$\int_{x_{p-1}}^{x_p} F(t)dt = F(x_{p-1}) \cdot (x_p - x_{p-1})$$

Für die kumulierte Fläche von Ergebnis x_1 bis zum Ergebnis x_s folgt damit:

$$\int_{x_1}^{x_s} F(t)dt = \sum_{p=2}^{s} w_{p-1} \cdot (x_s - x_{p-1})$$

[510] Für einen Beweis vgl. Hanoch/Levy (1969: 338–340) und Kruschwitz/Husmann (2012: 96–98).

[511] Vgl. Levy (2016: 74).

Nun werden die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Ergebnisses x_p für die Alternativen a_1 und a_2 bezeichnet mit: w_p^{a1} und w_p^{a2}. Dann gilt für die Differenz zwischen zwei kumulierten Flächen ΔKum unter den Verteilungsfunktionen F_{a_1} und F_{a_2} bis zum Wert x_s:

$$\begin{aligned}\Delta Kum(x_s) &= \int_{x_1}^{x_s} F_{a_2}(t)dt - \int_{x_1}^{x_s} F_{a_1}(t)dt \\ &= \int_{x_1}^{x_s} \left(F_{a_2}(t) - F_{a_1}(t)\right) dt \\ &= \sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_2} \cdot (x_s - x_{p-1}) - \sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_1} \cdot (x_s - x_{p-1})\end{aligned}$$

Damit kann die stochastische Dominanz zweiter Ordnung für diskrete Verteilungen in Definition 1.43 festgehalten werden.[512]

Definition 1.43: *Eine Aktion $a_1 \in A$ dominiert die Aktion $a_2 \in A$ stochastisch in zweiter Ordnung, wenn gilt:*

$$\sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_2} \cdot (x_s - x_{p-1}) - \sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_1} \cdot (x_s - x_{p-1}) \geq 0 \ \forall \ s \geq 2.$$

In diesem Fall gilt die Notation $a_1 \succ_{SSD} a_2$.[513]

Diese Relation wird wie folgt erläutert: Ein risikoaverser Akteur wird bei der Entscheidung zwischen mehreren Alternativen diejenige wählen, die bei gleichem Erwartungswert das geringere Risiko hinsichtlich des Ergebnisses aufweist. Somit wird die Alternative mit geringerer Standardabweichung und folglich steilerem Anstieg der Verteilungsfunktion präferiert.

Der Akteur vergleicht die Flächen unterhalb der Verteilungsfunktionen der Alternativen und bildet die Differenz zwischen diesen. Er startet den Vergleich bei $-\infty$ und summiert die Differenzen. Diese Summe darf für keinen Wert x einen negativen Wert annehmen. Ist das der Fall, dominiert eine Funktion stochastisch in zweiter Ordnung die andere Funktion. Zur Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes werden konkave Nutzenfunktionen als eine weitere Teilmenge von Nutzenfunktionen in Def. 1.44 beschrieben.[514]

Definition 1.44: *Die Menge der konkaven Risikonutzenfunktionen U_2 ist wie folgt definiert:* $U_2 = \left\{ u(x) | u(x) \in U_1, u''(x) < 0 \right\}$.

[512] Vgl. Hanoch/Levy (1969: 341).

[513] SSD steht für Second-order Stochastic Dominance.

[514] Vgl. Bawa (1975: 100); Levy (1992: 557); Levy (2016: 42).

In Verbindung mit der Definition des Erwartungsnutzens $E[u(x)]$[515] kann der Merksatz 1.14 formuliert werden.[516]

Merksatz 1.14: *Für einen erwartungsnutzenmaximierenden und risikoaversen Akteur gilt:* $a_1 \succ_{SSD} a_2 \Leftrightarrow E_{a_1}[u(x)] \geq E_{a_2}[u(x)] \forall\ u(x) \in U_2$.

Eine Alternative, die stochastisch in zweiter Ordnung dominiert wird, kann für einen risikoaversen Akteur, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte, nicht als die optimale Alternative resultieren. Zur Demonstration wird Beispiel 1.16 von S. 149 herangezogen.

Fortführung des Beispiels 1.16:

Die Anwendung von Definition 1.43 auf S. 155 auf Tab. 1.33 von S. 150 zeigt Tab. 1.36.

Tab. 1.36: Verteilungsfunktionen und kumulierte Flächeninhalte. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tabelle 1.33.

Verteilungsfunktionen															
$\mathbf{F(x)}$ \ $\mathbf{x}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
$\mathbf{F_{a_4}(x)}$	0	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	1	1
$\mathbf{F_{a_5}(x)}$	0	0	0	0	0,1	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1
$\mathbf{F_{a_6}(x)}$	0	0	0	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	1

Kumulierte Flächeninhalte															
Fläche \ $\mathbf{x}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
$\sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_4} \cdot (x_s - x_{p-1})$	0	0	0,2	0,6	1,0	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2	4,6	5,6
$\sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_5} \cdot (x_s - x_{p-1})$	0	0	0	0	0	0,1	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
$\sum_{p=2}^{s} w_{p-1}^{a_6} \cdot (x_s - x_{p-1})$	0	0	0	0	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	2,2	3,0	3,8	4,6	5,4	6,2

Differenz der kumulierten Flächen zwischen a_6 und a_5													
$\sum_{p=2}^{s} \left(w_{p-1}^{a_6} - w_{p-1}^{a_5}\right) \cdot (x_s - x_{p-1})$	0	0,2	0,4	0,6	0,4	0,2	0,5	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Auf Grundlage der Definition 1.43 von S. 155 kann mit Blick auf Tabelle 1.36 festgestellt werden, dass $a_5 \succ_{SSD} a_6$. *Das wird auch in der Abbildung 1.31 deutlich, in der die*

[515] Vgl. Def. 1.34 auf S. 118.

[516] Vgl. Levy (1992: 557); Levy (2016: 47); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 100).

Differenz zwischen den kumulierten Flächen unter den Verteilungsfunktionen dargestellt ist. Diese ist bei keinem Wert des Definitionsbereiches negativ.

Die Dominanz kann auch durch Verweis auf die Tabelle 1.27 auf S. 106 wie folgt erklärt werden: Der Erwartungswert beider Alternativen ist identisch ($\mu_{a_5} = \mu_{a_6} = 9{,}80$). Jedoch ist die Varianz der Alternative 6 ($\sigma_{a_6} = 3{,}71$) größer als die Varianz der Alternative 5 ($\sigma_{a_5} = 2{,}27$). Ein Akteur, dessen Nutzenfunktion streng konkav ist, entscheidet sich deshalb für die Alternative 5.

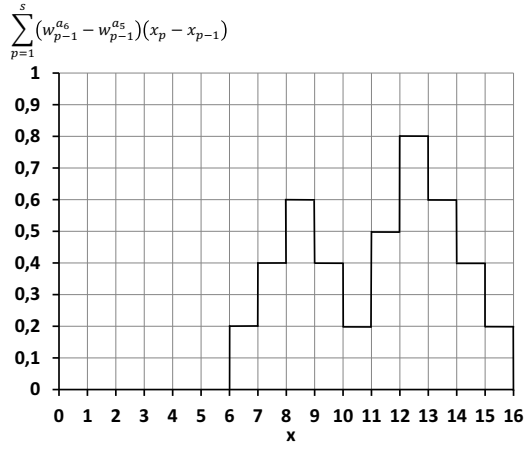


Abb. 1.31: Differenz zwischen den kumulierten Flächen von a_5 und a_6. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Eingangsdaten von Tabelle 1.36.

Für die Beziehungen der anderen Verteilungsfunktionen kann folgendes festgestellt werden: $a_5 \not\succ_{SSD} a_4$ und $a_6 \not\succ_{SSD} a_4$. Alternative 4 wird nicht stochastisch in zweiter Ordnung dominiert, da der Erwartungswert ($\mu_{a_4} = 10{,}40$) im Vergleich zu den anderen Alternativen größer ist.

An diesem Beispiel wird deutlich, dass die alleinige Betrachtung der Gesamtsumme unter der Verteilungsfunktion für die stochastische Dominanz zweiter Ordnung irrelevant ist. Gemäß Definition 1.43 müssen die kumulierten Flächen für jeden Wert des Definitionsbereiches miteinander verglichen werden.

Eine andere Vorgehensweise zur Untersuchung auf stochastische Dominanz besteht in der direkten Subtraktion der Verteilungsfunktionen bzw. der kumulierten Flächen unter den Verteilungsfunktionen. Darauf wird hier nicht detailliert eingegangen, sondern es wird stattdessen auf die weiterführende Literatur verwiesen.[517]

Nun wird kurz der Einfluss der Nutzenfunktion diskutiert. Es wurde schon darauf hingewiesen, dass das Konzept der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung nur mit dem Konzept der Maximierung des Erwartungsnutzens

[517] Vgl. Schmid/Trede (2006: 245–249).

übereinstimmt, wenn es sich um einen risikoaversen Akteur handelt. Zur Demonstration wird das Beispiel 1.16 wieder aufgegriffen und modifiziert.

Fortführung des Beispiels 1.16:

Die Ergebnisfunktionen der Alternativen 5 und 6 werden mit unterschiedlichen Nutzenfunktionen versehen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1.37 zu sehen.

Tab. 1.37: Einfluss der Nutzenfunktion des Akteurs. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion	Zustände				Funktional: $\sum_{p=1}^{n} u(x_{ip}) \cdot w_p$	
	z_1 mit $w_1 = 0{,}1$	z_2 mit $w_2 = 0{,}2$	z_3 mit $w_3 = 0{,}5$	z_4 mit $w_4 = 0{,}2$		
Ursprüngliche Ergebnisse						
a_5	6	8	12	8		
a_6	6	5	10	16		
Konkave Nutzenfunktion: $u(x_p) = \sqrt{(x_p)}$						
a_5	$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{8}$	**3,108**	⇐ **max**
a_6	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{16}$	**3,073**	
Konvexe Nutzenfunktion: $u(x_p) = (x_p)^2$						
a_5	6^2	8^2	12^2	8^2	**101,20**	
a_6	6^2	5^2	10^2	16^2	**109,80**	⇐ **max**

Aus Tabelle 1.37 wird deutlich, dass das Konzept der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung nur für streng konkave Nutzenfunktionen anwendbar ist. Nur dann ist Alternative 5 der Alternative 6 überlegen. Wird hingegen eine streng konvexe Nutzenfunktion angenommen, ist Alternative 6 überlegen, was jedoch nicht mit dem Konzept der stochastischen Dominanz übereinstimmt.

Die stochastische Dominanz erster und zweiter Ordnung bildet die Grundlage für die Risikoanalyse als Instrument der Investitionsrechnung.[518]

1.5.4.5.4 Zusammenfassende Kritik

Abschließend werden die verschiedenen Dominanzkonzepte in Tab. 1.38 eingeordnet. Es wird deutlich, dass die Dominanzformen für verschiedene Niveaus der Vollständigkeit der Informationen geeignet sind. Im einfachsten Fall ist lediglich bekannt, dass die Präferenzen des Akteurs monoton sind. Dann kann die Alternativenmenge auf absolute Dominanz und auf Zustandsdominanz hin untersucht werden. Wenn weitere Informationen vorliegen, können die

[518] Vgl. 1. Band, Abschn. 5.3.2 auf S. 493.

Konzepte der stochastischen Dominanz herangezogen werden. Wenn die Risikonutzenfunktion im Detail bekannt ist, kann das BERNOULLI-Prinzip zum Einsatz kommen und der Erwartungswert des Risikonutzens ermittelt werden.

Absolute Dominanz und Zustandsdominanz können auch bei Entscheidungen verwendet werden, bei denen keine Wahrscheinlichkeiten bekannt sind. Dies wird an anderer Stelle erläutert[519] und ist in Tab. 1.38 ebenfalls abgebildet.

Tab. 1.38: Einordnung der Dominanzkonzepte. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Nitzsch (2021: 236).

		Wahrscheinlichkeiten	
		Bekannt	**Unbekannt**
Informationen über Risikonutzenfunktion	Monotonie ist bekannt	absolute Dominanz (Def. 1.23 auf S. 100) Zustandsdominanz (Def. 1.24 auf S. 100)	
	Monotonie ist bekannt	Stochastische Dominanz erster Ordnung (Def. 1.39 auf S. 148)	
	Monotonie und Risikoaversion sind bekannt	Stochastische Dominanz zweiter Ordnung (Def. 1.42 auf S. 153)	
	Im Detail bekannt	Dominanz der Alternative mit dem größten positiven Erwartungswert des Risikonutzens (E.-regel 1.11 auf S. 119)	

Positiv hervorzuheben ist der Umstand, dass das Konzept vergleichsweise wenig Informationen erfordert. Für die stochastische Dominanz erster Ordnung genügt die Annahme eines Akteurs, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte und eine streng monotone Nutzenfunktion besitzt. Um das Konzept der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung anwenden zu können, muss zusätzlich Risikoaversion unterstellt werden. Eine darüber hinaus gehende Kenntnis bzw. Analyse der individuellen Nutzenfunktion ist nicht erforderlich. Negativ sind folgende Aspekte zu erwähnen:

1. Kenntnis der Verteilungsfunktionen,
2. Annahmen über den Akteur,
3. bedingte Lösungsmächtigkeit sowie
4. hoher Aufwand.

zu 1.: Sämtliche Darstellungen gehen davon aus, dass die Verteilungsfunktionen bekannt sind. Dies ist gleichbedeutend mit der Sicherheit über die Unsicherheit.

zu 2.: Das Konzept geht von einem Akteur aus, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte. Damit wird die Erfüllung der entsprechenden Axiome

[519] Vgl. Abschn. 1.6.1 auf S. 160.

vorausgesetzt. Diesbezüglich kann auf die kritische Diskussion dieser Annahmen verwiesen werden.[520]

zu 3.: Stochastische Dominanz erster und zweiter Ordnung erzeugen lediglich partielle Ordnungen. Die Beispiele hatten gezeigt, dass nur festgestellt werden kann, ob eine Alternative dominiert wird oder nicht. Wenn eine Alternative in erster bzw. zweiter Ordnung dominiert wird, kann sie – bei Maximierung des Erwartungsnutzens – nicht als optimale Alternative resultieren. Über die Menge der nicht-dominierten Alternativen hingegen liefert das Konzept der stochastischen Dominanz keine Aussagen.

zu 4.: Die Überprüfung auf stochastische Dominanz erfolgt durch Paarvergleiche. Bei m Alternativen sind $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1)$ Paarvergleiche erforderlich.

1.5.5 Zusammenfassende Kritik

Trotz aller Bemühungen zur Objektivierung der Entscheidungsmaßstäbe können verschiedene „optimale“ Alternativen resultieren. Darüber hinaus wurde deutlich, dass mit zunehmender Spezifizierung der Methoden auch die Anforderungen an den Akteur zunehmen. Je detaillierter und aussagekräftiger das Modell sein soll, desto mehr Anforderungen sind zu erfüllen bzw. desto restriktiver sind die Anforderungen. Dies senkt die angestrebte erhöhte Aussagekraft.

1.6 Unsicherheitspräferenz II - Einstufige Entscheidungen bei Ungewissheit

1.6.1 Einführung

Im Fall von Entscheidungen unter Ungewissheit kann der Akteur zwar die prinzipiell möglichen Umweltzustände definieren, nicht jedoch die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieser Zustände. In Ergänzung bzw. Abwandlung der bisherigen Festlegungen[521] gilt Folgendes:

- Ein **wesentlicher Unterschied** zum vorangegangenen Abschnitt besteht darin, dass nun für die Zustände **keine Eintrittswahrscheinlichkeiten** bekannt sind.

[520] Vgl. Abschn. 1.5.4.4 auf S. 141 sowie Abschn. 2.3.2.2 auf S. 315.

[521] Vgl. Abschn. 1.5.1 auf S. 98.

- Ein **weiterer Unterschied** liegt in der Verwendung von **Nutzengrößen**. Jedem Ergebnis wird vom Akteur ein Nutzen zugewiesen. Dies geschieht mittels der Nutzenfunktion wie folgt: $u_{ip} = f(e_{ip})$, wobei Folgendes zu berücksichtigen ist:
  - Einige Lösungskonzepte (z. B. die Maximin-Regel und die Maximax-Regel) erfordern nur ordinale Nutzenwerte.
  - Für andere Lösungen (z. B. das HURWICZ-Prinzip oder die LAPLACE-Regel) müssen **kardinale**, also **intervall-skalierte Nutzenwerte**[522] vorliegen.[523]
  - Immer dann, wenn – wie in der Spieltheorie allgemein üblich – **gemischte Strategien** berücksichtigt werden, müssen kardinale Nutzenwerte vorliegen.[524]
  - Um die Darstellungen zu vereinheitlichen, wird von der Existenz kardinaler Nutzenwerte ausgegangen.
  - Grundlage sind deshalb Präferenzen, welche einen kardinalen Nutzen ermöglichen[525] und die im besten Fall die Axiome der Erwartungsnutzentheorie erfüllen.[526] Diese Anforderungen sind an anderer Stelle ausführlich beschrieben.[527]

Wenn alle diese Komponenten festgelegt wurden, ist die Ausgangsbasis für die Entscheidungsfindung geschaffen. Die daraus resultierenden Informationen können in unterschiedlicher Weise grafisch dargestellt werden. Sehr verbreitet ist die Darstellung in tabellarischer Form, der sog. **Entscheidungs- bzw. Nutzenmatrix** (vgl. Tabelle 1.39).

[522] Vgl. Def. 1.7 auf S. 22.

[523] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 276); French (1988: 34–36). *„The payoff to the player will then be given by the entry in that particular row and column. This entry should represent a numerical utility in the sense of von Neumann and Morgenstern.“* Milnor (1954: 49).

[524] Vgl. Hurwicz (1951: 2); Schneeweiß (1966: 21). Vgl. Holler/Illing/Napel (2019: 36–37) zur Erläuterung von reinen und gemischten Strategien.

[525] Vgl. Abschn. 1.3.2 auf S. 28.

[526] *„In that case it is convenient to assume that utility is "measurable," i.e., satisfies the von Neumann-Morgenstern or Marschak postulates.“* Hurwicz (1951: 2). Hervorh. im Original. Vgl. auch die Quellen in Fußnote 523 sowie Chernoff (1954: 423); Arrow/Hurwicz (1972: 5); Maskin (1979: 320).

[527] Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

Tab. 1.39: Grundstruktur der Entscheidungsmatrix bei Ungewissheit. Quelle: Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 110).

Zustand / Aktion	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\cdots$	$\mathbf{z_n}$
$\mathbf{a_1}$	u_{11}	u_{12}	u_{13}	$\cdots$	u_{1n}
$\mathbf{a_2}$	u_{21}	u_{22}	u_{23}	$\cdots$	u_{2n}
$\mathbf{a_3}$	u_{31}	u_{32}	u_{33}	$\cdots$	u_{3n}
$\mathbf{a_x}$	u_{x1}	u_{x2}	u_{x3}	$\cdots$	u_{xn}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\mathbf{a_m}$	u_{m1}	u_{m2}	u_{m3}	$\cdots$	u_{mn}

Auch diese Entscheidungssituation wird als **„Spiel gegen die Natur“** bezeichnet. Die Tab. 1.39 kann deshalb synonym als Spiel-, Auszahlungs- bzw. Gewinnmatrix bezeichnet werden. Der Akteur wird als Spieler interpretiert, dessen Gegenspieler (die Natur) nicht bewusst, sondern zufällig handelt.[528] Im Gegensatz zur Entscheidung bei Risiko[529] sind die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt der Ereignisse jedoch unbekannt.

Zur Lösung des Entscheidungsproblems muss ein geeignetes Präferenzfunktional gebildet werden. Wie bereits dargelegt,[530] bildet das Präferenzfunktional $\Phi : A \to \mathbb{R}$ die Alternativen direkt auf die reellen Zahlen ab, wohingegen eine Nutzenfunktion zunächst die Ergebnisgrößen der Alternativen in die reellen Zahlen überführt. Dieser Schritt ist durch die Verwendung von Nutzenwerten bereits erledigt. Notwendig zur Bildung des Präferenzfunktionals ist deshalb lediglich eine weitere Operation auf den Nutzengrößen.

Um die Problemlösung zu erleichtern, wird die Alternativenmenge daraufhin überprüft, ob ineffiziente Alternativen existieren, die aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden können. Im ersten Schritt wird die Alternativenmenge auf **absolute Dominanz** hin untersucht (vgl. Def. 1.45).

Definition 1.45: *Gegeben ist die Zustandsmenge* $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ *mit* $z_p \in Z$ *und die Alternativenmenge* A*. Eine Aktion* $a_q \in A$ *heißt genau dann absolut dominant in Bezug auf* Z *und die Aktion* $a_k \in A$*, wenn gilt:* $\min\limits_{p} u_{qp} \geq \max\limits_{p} u_{kp}$.

Dies bedeutet, der schlechteste Nutzenwert der Alternative a_q ist mindestens ebenso gut, wie der beste Nutzenwert der Alternative a_k. Alternativen, welche derart dominiert werden, können aus den weiteren Analysen ausgeschlossen werden. Diese Dominanzform liegt implizit der PASCALschen Gotteswette zugrunde (vgl. Bspl. 1.17).

[528] Vgl. Krelle (1968: 119).
[529] Vgl. Abschn. 1.5 auf S. 98.
[530] Vgl. Abschn. 1.2 auf S. 8.

Beispiel 1.17:

Blaise Pascal *veröffentlichte 1670 folgendes Gedankenspiel:*[531] *Der Mensch steht vor zwei Alternativen: entweder an Gott zu glauben oder nicht. Die Situation kann wie in der Tab. 1.40 dargestellt werden.*

Tab. 1.40: Gotteswette von Pascal. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 173).

Zustand / Alternative	Gott existiert	Gott existiert nicht
An Gott glauben	Paradies bzw. $+\infty$	0
Nicht an Gott glauben	Hölle bzw. $-\infty$	0

Wenn Gott existiert, führt das gottesfürchtige Leben in den Himmel, das sündhafte Leben jedoch führt in die Hölle. Existiert Gott hingegen nicht, hat der Mensch unabhängig von seinem Lebenswandel nichts zu hoffen (0), aber auch nichts zu befürchten (0). Wird die Präferenzordnung Paradies $\succ$ Hölle unterstellt, ist das gottesfürchtige Leben die dominante Alternative, da deren schlechtestes Ergebnis (0) genauso gut ist wie das beste Ergebnis der Vergleichsalternative (0).[532]

Wie eingangs des Abschnittes erwähnt, stellen die Einträge in der Tab. 1.40 **Nutzenwerte** dar. Demzufolge werden bei diesem Gedankenspiel unendliche Nutzenwerte verwendet.[533]

Absolute Dominanz ist ein sehr strenges Kriterium und wird nur selten vorliegen. Ein schwächeres Selektionskriterium bietet die **Zustandsdominanz** (vgl. Def. 1.46).[534]

Definition 1.46: *Gegeben ist die Zustandsmenge $Z = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ und die Alternativenmenge A. Eine Aktion $a_i \in A$ heißt genau dann effizient bezüglich A und Z, wenn es keine Aktion $a_q \in A$ gibt, für welche gilt:*

$$\begin{aligned} &a) \quad u_{qp} \geq u_{ip} \;\forall\; p = 1,...,n \\ &\quad\; \textit{sowie} \\ &b) \quad u_{qp} > u_{ip} \textit{ für mindestens ein } p. \end{aligned}$$

Beide Dominanzformen wurden auch bei Entscheidungen unter Risiko verwendet.[535] Zur Erläuterung der folgenden Inhalte wird das Beispiel 1.18 eingeführt.

[531] Vgl. Lengwiler (2009: 536–538).
[532] Vgl. Schneider (1997: 92); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 173).
[533] Vgl. Jordan (1993: 50–51); Anderson (1995: 50–52); Russell (2020: 181).
[534] Vgl. Milnor (1954: 51); Luce/Raiffa (1957: 286–287).
[535] Vgl. Bspl. 1.10 auf S. 100.

Beispiel 1.18:

Es wird die effiziente Alternativenmenge aus dem Beispiel 1.10 auf S. 100 verwendet.[536] *Zusätzlich wird angenommen, die Nutzenfunktion des Akteurs lautet:* $u(e_{ip}) = e_{ip}$. *Die daraus resultierende Entscheidungsmatrix ist in Tab. 1.41 aufgeführt.*

Tab. 1.41: Entscheidungsmatrix des Beispiels 1.18. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion \ Zustand	z_1	z_2	z_3	z_4
a_2	4	9	8	6
a_4	15	3	15	4
a_5	6	8	12	8
a_6	6	5	10	16

Im Folgenden werden wünschenswerte Eigenschaften vorgestellt, die ein rationales Verfahren erfüllen sollte.

1.6.2 Anforderungen an ein rationales Verfahren

Damit eine Entscheidung unter Ungewissheit als rational bezeichnet werden kann, muss sie bestimmten Anforderungen genügen. In der Literatur wurde eine Reihe von Kriterien an rationale Entscheidungen unter Ungewissheit entwickelt.[537] Im Folgenden wird das von Milnor entwickelte Axiomensystem vorgestellt.[538]

Milnor möchte allgemeingültige Anforderungen ableiten, die ein Verfahren bzw. ein Präferenzfunktional erfüllen muss, um eine rationale Entscheidung zu ermöglichen bzw. um die Präferenzen ordnungstreu abbilden zu können. Von den bereits vorgestellten Verfahren für eine rationale Begründung[539] wird die dritte Variante gewählt. Demzufolge werden wünschenswerte Eigenschaften des Funktionals formuliert.

[536] Vgl. Tab. 1.24 auf S. 100.

[537] Vgl. Hurwicz (1951); Luce/Raiffa (1957: 286–297); Obermaier/Saliger (2020: 123–130).

[538] Vgl. Milnor (1954). John W. Milnor (geb. 1931) ist Mathematiker und erhielt sowohl den Abel-Preis als auch die Fields-Medaille. Er entwickelte auch eine Axiomatik für Entscheidungen bei Risiko. Vgl. Abschn. 1.5.4.1 auf S. 109.

[539] Vgl. Tab. 1.4 auf S. 18.

Grundlegende Anforderungen sind **schwache Ordnung**, **Stetigkeit** sowie **Konvexität**. Als erstes wird gefordert, dass die resultierende Ordnung vollständig, reflexiv und transitiv sein muss (vgl. Anf. 1.6.1 bis Anf. 1.6.3).

Anforderung 1.6.1 (Vollständigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf A ist vollständig, wenn für jedes Paar an Alternativen $a_1, a_2 \in A$ festgelegt wird: entweder $a_1 \succsim a_2$ oder $a_2 \succsim a_1$ oder beides.*

Jede Alternative muss sich selbst gegenüber schwach präferiert werden, was als Reflexivität bezeichnet wird.

Anforderung 1.6.2 (Reflexivität): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf A ist reflexiv, wenn gilt: $a_1 \succsim a_1$ für jedes $a_i \in A$.*

Die Transitivität wird in Anf. 1.6.3 beschrieben.

Anforderung 1.6.3 (Transitivität): *Die Relation $\succsim$ auf A ist transitiv, wenn aus $a_1 \succsim a_2$ und $a_2 \succsim a_3$ für jede Kombination $a_1, a_2, a_3 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq a_3$ und $a_2 \neq a_3$ folgt: $a_1 \succsim a_3$.*

Die nächste Anforderung postuliert Stetigkeit (vgl. Axiom 1.6.4).[540]

Anforderung 1.6.4 (Stetigkeit): *Die Relation $\succsim$ auf A ist stetig, wenn für die konvergente Folge (a_n) mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \succ a_2$ für alle n sowie $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1$ gilt $a_1 \succsim a_2$.*

Damit soll erreicht werden, dass keine „Sprünge“ bei der Bewertung der Alternativen vorhanden sind. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass sich die Reihung der Alternativen beim Übergang ins Unendliche nicht verändern sollen. Lexikografische Präferenzordnungen beispielsweise sind nicht stetig. Diese Eigenschaften wurden bereits ausführlich diskutiert,[541] weshalb darauf verwiesen wird.

Da nicht vorausgesetzt werden kann, dass ein Akteur die Alternativenmenge auf Dominanz (vgl. Def. 1.46 auf S. 163) geprüft hat, sollte das Entscheidungsverfahren dieses Kriterium berücksichtigen (vgl. Anf. 1.6.5).[542]

Anforderung 1.6.5 (Dominanz): *Die Relation $\succsim$ auf A erfüllt das Dominanz-Kriterium, wenn bei $u_{1p} \geq u_{2p}\ \forall\ p = 1,...,n$ sowie $u_{1p} > u_{2p}$ für mindestens ein p gilt: $a_1 \succ a_2$.*

[540] Vgl. Milnor (1954: 51); Zimmermann (2008: 24); Binmore (2011: 157).
[541] Vgl. Bsp. 1.2 auf S. 43.
[542] Vgl. Milnor (1954: 51); Luce/Raiffa (1957: 286–287); Obermaier/Saliger (2020: 125).

Eine weitere gängige Anforderung an eine rationale Entscheidung ist die Konvexität (vgl. Axiom 1.6.6).[543]

Anforderung 1.6.6 (Konvexität): *Für alle* $a_i \in A$ *mit* $a_1 \sim a_2$, $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$ *und* $a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ *muss gelten:* $a_3 \succsim a_1$.

Konvexität wurde bereits im Zusammenhang mit den grundlegenden Anforderungen an rationale Präferenzen eingeführt.[544] Konvexe Präferenzen implizieren, dass ein rationaler Akteur anstelle von zwei Extremergebnissen, die für ihn dieselbe Wertigkeit besitzen, eine Mischung aus diesen Ergebnissen - eine konvexe Linearkombination - als gleichwertig betrachtet.[545] Diese Anforderung an rationale Präferenzen muss auch von dem Lösungsmechanismus für Entscheidungen unter Ungewissheit erfüllt werden.

Bei Entscheidungen unter Ungewissheit wird die Idee der konvexen Lösungsmenge eingeführt, um sicherzustellen, dass ein rationaler Akteur anstelle einer optimalen Lösung ebenso eine konvexe Linearkombination aus anderen optimalen Lösungen wählen würde. Dies wird auch als „Randomisierung“ bezeichnet.[546]

Zur weiteren Betrachtung wird die folgende Notation eingeführt: Zu einer nicht-leeren Alternativenmenge A_1 existiert eine ebenso nicht-leere Lösungsmenge $L_1 \subseteq A_1$. Damit wird die optimale Lösung des Auswahlproblems bzw. die resultierende Rangordnung der Alternativen bezeichnet. Die ursprüngliche Alternativenmenge A_1 wird durch Ergänzung mindestens einer weiteren Alternative zur Alternativenmenge A_2 erweitert. Die zu dieser Menge gehörende Lösungsmenge ist $L_2 \subseteq A_2$.[547]

Mit Blick auf die Konvexität kann formuliert werden: Wenn a_1 und a_2 Elemente der Lösungsmenge L_1 für die Alternativenmenge A_1 sind und die Alternativenmenge um Alternative a_3 mit $a_3 = \lambda \cdot a_1 + (1-\lambda) \cdot a_2$ für alle $\lambda \in [0,1]$ erweitert wird, so muss a_3 - ebenso wie a_1 und a_2 - Bestandteil der Lösungsmenge L_2 sein.[548] Das nächste Axiom ergibt sich aus der Verwendung von intervall-skalierten Nutzen.

Anforderung 1.6.7 (Nutzen-Kardinalität): *Zwischen zwei Alternativen* a_1 *und* a_2 *darf sich die Präferenzordnung nicht durch eine Transformation der Nutzenmatrix* (u_{ip}) *der Form* $(u_{ip})' = \alpha \cdot (u_{ip}) + \beta$ *mit* $\alpha > 0$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ändern.*

---

[543] Vgl. Milnor (1954: 52).

[544] Vgl. Axiom 1.3.7 auf S. 36.

[545] Vgl. Abb. 1.7 b) auf S. 36.

[546] *„This axiom asserts that the player is not prejudiced against randomizing. If two rows are equally favorable, then he does not mind tossing a coin to decide between them.“* Milnor (1954: 52).

[547] Vgl. Streitferdt (1973: 91).

[548] Vgl. Streitferdt (1973: 92).

Damit wird Invarianz der Rangordnungen gegenüber einer positiv-affinen Transformation[549] gefordert. Da die Invarianz gegenüber diesen Transformationen ein Bestandteil der Definition intervall-skalierter Nutzen ist[550] ist Axiom 1.6.7 eine logische Konsequenz. Mit dieser Anforderung wird sichergestellt, dass die Änderung der verwendeten Maßeinheiten (z. B. Währungen) zu keiner Änderung der Präferenzordnung der Alternativen führt.

Neben diesen vier Axiomen werden noch weitere Anforderungen formuliert, die im Folgenden vorgestellt werden.

Anforderung 1.6.8 (Symmetrie): *Die Lösung darf nicht durch die Benennung der Alternativen oder der Umweltzustände beeinflusst werden.*

Damit wird gefordert, dass lediglich die zugrundeliegenden Ergebnisse, nicht jedoch die Benennung von Alternativen oder Umweltzuständen von Bedeutung sein dürfen.[551]

Das Unabhängigkeits-Axiom (vgl. Axiom 1.6.9) fordert, dass die Rangordnung zwischen zwei Alternativen unabhängig von **irrelevanten Alternativen** sein muss. Das bedeutet, dass die neue Lösung L_2 die bisherige Lösung L_1 beinhaltet. Es gilt deshalb: $L_2 \subseteq L_1 \cup (A_2 - A_1)$. Das kann formuliert werden zu: $L_2 \cap A_1 \subseteq L_1$.[552]

Anforderung 1.6.9 (Unabhängigkeit): *Zwischen zwei Alternativen a_1 und a_2 darf sich die Präferenzordnung nicht ändern, wenn eine weitere Alternative a_3 hinzugefügt wird.*

Die Forderung nach **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen** ist für viele Entscheidungssituationen grundlegend, so z. B. bei multikriteriellen Entscheidungen,[553] bei Entscheidungen unter Risiko[554] und auch bei intertemporalen Entscheidungen.[555] Dieses Axiom ist in der Literatur auch als Axiom der allgemeinen Zeilen-Hinzufügung zu finden.

Der allgemeine Fall der Erweiterung von A_1 zu A_2 kann derart spezifiziert werden, dass die hinzugefügte Alternativenmenge $A_2 - A_1$ besondere Eigenschaften aufweist. Dies wird in der Anforderung der speziellen Zeilen-Hinzufügung im Axiom 1.6.10 formuliert.

---

[549] Vgl. Def. 1.6 auf S. 21.

[550] Vgl. Def. 1.7 auf S. 22.

[551] Dieselbe Forderung wird in der kooperativen Spieltheorie erhoben (vgl. Axiom 4.4.5 auf S. 484).

[552] Vgl. Streitferdt (1973: 92).

[553] Vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61.

[554] Vgl. Anf. 1.5.5 auf S. 116.

[555] Vgl. Anf. 1.7.5 auf S. 195.

Anforderung 1.6.10 (Spez. Zeilen-Hinzufügung): *Zwischen zwei Alternativen a_1 und a_2 darf sich die Präferenzordnung nicht ändern, wenn eine weitere Alternative a_3 hinzugefügt wird, die äquivalent zu den bisherigen Alternativen ist oder von diesen dominiert wird im Sinn von Definition 1.46.*[556]

Das bedeutet, wenn eine hinzugefügte Alternative gleichwertig zu den bestehenden Alternativen ist oder von diesen schwach dominiert wird, soll sich die bisherige Lösung nicht ändern. Axiom 1.6.10 ist eine Abschwächung von Axiom 1.6.9.

Die Lösungsmenge L_2 kann also dadurch ermittelt werden, dass zur Lösungsmenge L_1 diejenige Alternativenmenge $A_2 - A_1$ hinzugerechnet wird, die äquivalent zu L_1 ist. Dann muss gelten: $L_2 = L_1 \cup (A_2 - A_1)$ bzw. $L_2 \cap A_1 = L_1$.

Anforderung 1.6.11 (Spalten-Duplikation): *Zwischen zwei Alternativen a_1 und a_2 darf sich die Präferenzordnung nicht ändern, wenn eine bestehende Spalte dupliziert und hinzugefügt wird.*

Die Forderung nach Unabhängigkeit der Lösung von duplizierten Spalten ist unmittelbar einsichtig. Wichtig für die optimale Entscheidung ist, welche Zustände prinzipiell möglich sind und nicht, wie oft diese in der Tabelle dargestellt sind.[557]

Anforderung 1.6.12 (Spalten-Linearität): *Zwischen zwei Alternativen a_1 und a_2 darf sich die Präferenzordnung nicht ändern, wenn eine Konstante $c \neq 0$ zu den Ergebnissen einer Spalte hinzu addiert wird.*

Die Addition einer Konstante nach Axiom 1.6.12 entspricht der Erhöhung der Werte von **sämtlichen Alternativen** um einen identischen Betrag für **einen Umweltzustand**, unabhängig von der Entscheidung des Akteurs. Wenn diese Erhöhung unabhängig von der Entscheidung ist, darf sie bei der Entscheidung auch keine Rolle spielen.

Diese Anforderungen soll ein Präferenzfunktional erfüllen, um die Präferenzen eines Akteurs bei Entscheidungen unter Ungewissheit ordnungstreu abbilden zu können. Auf dieser Basis können nun die wichtigsten Präferenzfunktionale vorgestellt werden.

---

[556] Vgl. S. 163.

[557] *„Thus we are only interested in what states of Nature are possible, and not in how often each state may have been counted in the formation of the matrix.“* Milnor (1954: 52).

1.6.3 Klassische Regeln und Prinzipien

Im Folgenden wird zwischen einer **Entscheidungsregel** und einem **Entscheidungsprinzip** unterschieden. Die Entscheidungsregel erlaubt ohne weitere Spezifikationen bzw. Festlegungen die Identifikation einer optimalen Alternative. Die grundlegende Entscheidungsregel wurde bereits vorgestellt.[558] Das Entscheidungsprinzip verlangt noch zusätzliche Informationen, ohne die es keine Aussage ermöglicht. Deshalb können aus einem Entscheidungsprinzip mehrere Entscheidungsregeln gebildet werden.[559]

Die folgenden Präferenzfunktionale sind sog. **ad-hoc-Funktionale**.[560] Demzufolge orientieren sich diese Funktionale an einseitigen Ausrichtungen von Präferenzen bzw. an einem sehr engen Ausschnitt möglicher Facetten. Das heißt jedoch nicht, dass sie inhaltlich nicht begründet sind. Es ist bei der Vielzahl an Akteuren in der Realität nicht auszuschließen, dass derartige Orientierungen existieren.

Wald-Regel (Maximin-Regel):[561]

Bei dieser Regel werden nur die ungünstigsten möglichen Zuständen betrachtet. Das Präferenzfunktional lautet deshalb: $\Phi(a_i) = \underset{p}{min}\ u_{ip}$. Die optimale Alternative a_{opt} ist definiert durch E.-regel 1.12.[562]

Entscheidungsregel 1.12: *Bei Anwendung der* Wald*-Regel ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \underset{i}{max}\left[\underset{p}{min}\ u_{ip}\right].$$

Ziel dieses Kriteriums ist es, ausgehend von den ungünstigsten möglichen Zuständen aller Alternativen diejenige zu identifizieren, die von diesen Zuständen die beste ist. Gesucht ist demzufolge diejenige Alternative mit dem größten Mindesterfolg.

Die Bezeichnung Maximin-Regel beschreibt die Anwendung bei Nutzenwerten. Werden jedoch negative Größen in der Entscheidungsmatrix verwendet (also Verluste), erfolgt die Anwendung als **Minimax-Regel**, da in diesem Fall der größtmögliche Verlust einer Aktion minimiert wird.

---

[558] Vgl. Def. 1.4 auf S. 17.

[559] Vgl. Bitz (1981: 87–88); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 37–38).

[560] Vgl. Tab. 1.4 auf S. 18.

[561] Vgl. Wald (1945: 181–183); Wald (1950: 18). Abraham Wald (1902–1950).

[562] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 112).

Die ersten Skizzen zum Kriterium der Maximierung des schlechtesten Ergebnisses erfolgten durch VON NEUMANN.[563] Im Rahmen der später entwickelten Spieltheorie ist das **Maximin-Prinzip** eine weit verbreitete Strategie.[564] Gegen einen rational handelnden Gegenspieler ist diese Lösung gut begründ- und nachvollziehbar. Der Akteur kalkuliert die Reaktion des Gegenspielers ein, welcher ihm schaden möchte. Er identifiziert aus den möglichen Spielzügen des Gegners denjenigen, der ihm den größten Schaden zufügen könnte, also den geringsten Gewinn erbringt. Dann wählt er seinerseits diejenige Aktion, bei der er in diesem Fall das beste Ergebnis erhält. Wird diese Betrachtung umgekehrt, stellt sich die Frage nach der Minimierung des Maximalwertes des Gegners. Die Antwort darauf gab VON NEUMANN mit dem **Minimax-Theorem**,[565] das auch als Hauptsatz für 2-Personen-Nullsummen-Spiele bezeichnet wird.[566]

Bei einem Spiel gegen die Natur existiert jedoch kein bewusst agierender Gegenspieler. Deshalb muss gefragt werden, ob die Anwendung des Maximin-Prinzips in solchen Situationen sinnvoll ist. Es handelt sich um eine sehr pessimistische Entscheidungsregel.[567]

Anwendung der WALD-Regel auf Bspl. 1.18 von S. 164: *Aus Tabelle 1.42 ergibt sich die optimale Alternative mit: a_5.*

Tab. 1.42: Anwendung der WALD-Regel. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Zustände				Funktional: $\min_p u_{ip}$	
	z_1	z_2	z_3	z_4		
a_2	4	9	8	6	**4**	
a_4	15	3	15	4	**3**	
a_5	6	8	12	8	**6**	⇐ max
a_6	6	5	10	16	**5**	

Es wurde bei der Vorstellung der Anforderungen an rationale Entscheidungen darauf hingewiesen, dass von intervall-skalierten Nutzengrößen ausgegangen wird. Zur Anwendung der Maximin-Regel sind jedoch lediglich ordinalskalierte Werte erforderlich.[568] Das liegt darin begründet, dass lediglich der

[563] Vgl. Neumann (1928: 302–306).

[564] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 93–98); Holler/Illing/Napel (2019: 60–63).

[565] Vgl. Neumann (1928: 305); Holler/Illing/Napel (2019: 62).

[566] Vgl. Bühlmann/Loeffel/Nievergelt (1975: 182–184); Zimmermann (2008: 39).

[567] Krelle verortete die Regel „*an der äußersten Grenze der Rationalität*“ und diagnostizierte bei Akteuren, welche diese Regel verwenden „*einen geradezu pathologischen Pessimismus.*“ Krelle (1968: 185).

[568] Vgl. Schneeweiß (1966: 21); Obermaier/Saliger (2020: 115).

kleinste Wert jedes Zustands identifiziert und verglichen wird. Die WALD-Regel **verletzt** das Axiom der **Spalten-Linearität**.[569]

Verletzung des Spalten-Linearitäts-Axioms durch die WALD-Regel: *Die Werte des Zustandes z_2 werden für jede Alternative um den Betrag 5 erhöht. In Tab. 1.43 wird deutlich, wie sich die bisherige Präferenzordnung $a_5 \succ a_6 \succ a_2 \succ a_4$ verändert zu $a_5 \sim a_6 \succ a_4 \sim a_2$.*

Tab. 1.43: Verletzung des Spalten-Linearitäts-Axioms. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Zustände				Funktional: $\min_p u_{ip}$	
	z_1	z_2	z_3	z_4		
a_2	4	14	8	6	**4**	
a_4	15	8	15	4	**4**	
a_5	6	13	12	8	**6**	⇐ **max**
a_6	6	10	10	16	**6**	⇐ **max**

Maximax-Regel:

Als zur WALD-Regel gegenteilige Regel kann die Maximax-Regel bezeichnet werden, bei der ausschließlich die besten Werte Berücksichtigung finden. Das Präferenzfunktional lautet deshalb: $\Phi(a_i) = \max_p u_{ip}$. Die optimale Alternative a_{opt} ist definiert durch die Entscheidungsregel 1.13.[570]

Entscheidungsregel 1.13: *Bei Anwendung der Maximax-Regel ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \left[\max_p u_{ip} \right].$$

Entsprechend dieser Regel wird diejenige Alternative mit dem größten Maximalerfolg gewählt. Zur Anwendung der Maximax-Regel sind – wie auch bei der Maximin-Regel – lediglich ordinal-skalierte Werte erforderlich.[571] Die Regel wird nun am Eingangs-Beispiel erläutert.

---

[569] Vgl. Anf. 1.6.12 auf S. 168.

[570] Vgl. Krelle (1968: 186); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 96).

[571] Vgl. Obermaier/Saliger (2020: 115).

Anwendung der Maximax-Regel auf Bspl. 1.18 von S. 164: *Alternative a_6 ist optimal (vgl. Tabelle 1.44).*

Tab. 1.44: Anwendung der Maximax-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tab. 1.41.

Alternative	Zustände				Funktional: $\max_p u_{ip}$	
	z_1	z_2	z_3	z_4		
a_2	4	9	8	6	**9**	
a_4	15	3	15	4	**15**	
a_5	6	8	12	8	**12**	
a_6	6	5	10	16	**16**	⇐ **max**

Diese Regel ist dahingehend zu kritisieren, dass sie von einem Best-case-Szenario ausgeht und demzufolge einen unverbesserlichen Optimisten voraussetzt.[572]

Beide Regeln müssen dafür kritisiert werden, dass sie lediglich **einen zukünftigen Zustand** berücksichtigen. Damit werden implizit alle anderen Zustände ausgeschlossen, was als kaum rational einzustufen ist.

Hurwicz-Prinzip:

Um die Kritikpunkte gegen die Wald-Regel und die Maximax-Regel zu beheben, entwarf Hurwicz ein Entscheidungsprinzip, das mehrere Zustände berücksichtigt.[573] Wie bei der Vorstellung der Anforderungen an rationale Entscheidungen dargestellt, geht dieses Prinzip von mindestens intervallskalierten Nutzengrößen aus.[574] Dieses Prinzip besteht in einem Kompromiss aus den beiden kritisierten Regeln und zielt demzufolge auf die Berücksichtigung des niedrigsten und des höchsten Wertes jeder Alternative. Das Präferenzfunktional lautet: $\Phi(a_i) = \lambda \left(\underset{p}{max}\ u_{ip} \right) + (1-\lambda) \left(\underset{p}{min}\ u_{ip} \right)$. Die optimale Alternative a_{opt} ist definiert durch Entscheidungsregel 1.14.[575]

Entscheidungsregel 1.14: *Bei Anwendung des* Hurwicz*-Prinzips ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \underset{i}{max} \left[\lambda \left(\underset{p}{max}\ u_{ip} \right) + (1-\lambda) \left(\underset{p}{min}\ u_{ip} \right) \right].$$

[572] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 113).

[573] Vgl. Hurwicz (1951). Leonid Hurwicz (1917–2008) erhielt 2007 zusammen mit Eric S. Maskin (geb. 1950) und Paul A. Samuelson (1915–2009) den „Wirtschaftsnobelpreis".

[574] Vgl. Obermaier/Saliger (2020: 116).

[575] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 113).

Der Faktor λ dient in der Zielfunktion zur Gewichtung des besten bzw. des schlechtesten Ergebnisses. Im Folgenden gilt:

- $0 \leq \lambda \leq 1$, wobei
- der Maximalerfolg mit dem Faktor λ und
- der Minimalerfolg mit dem Faktor $1 - \lambda$ gewichtet wird.

Es wird deutlich, dass bei der Festlegung $\lambda = 0$ das HURWICZ-Prinzip der WALD-Regel entspricht, wohingegen mit $\lambda = 1$ die Maximax-Regel resultiert. Das HURWICZ-Prinzip wird nun auf das Beispiel angewendet.

Anwendung des HURWICZ-Prinzips auf Bspl. 1.18 von S. 164: *Es werden zwei Werte verwendet: $\lambda_1 = 0{,}25$ und $\lambda_2 = 0{,}75$. Das Ergebnis ist in der Tabelle 1.45 zu sehen.*

Tab. 1.45: Anwendung des HURWICZ-Prinzips. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tab. 1.41.

Alternative	Zustände				Funktional bei:		
	z_1	z_2	z_3	z_4	$\lambda_1 = 0{,}25$	$\lambda_2 = 0{,}75$	
a_2	4	9	8	6	**5,25**	**7,75**	
a_4	15	3	15	4	**6,00**	**12,00**	
a_5	6	8	12	8	**7,50**	**10,50**	
a_6	6	5	10	16	**7,75**	**13,25**	$\Leftarrow \max_{\lambda_1}; \max_{\lambda_2}$

Entsprechend dem HURWICZ*-Prinzip ist die zu präferierende Alternative in beiden Fällen die Alternative a_6.*

Das HURWICZ-Prinzip erfüllt einige Anforderungen nicht, was im Folgenden gezeigt wird.

Axiome, die das HURWICZ-Prinzip nicht erfüllt:

Das HURWICZ*-Prinzip* ***verletzt*** *das Axiom der* ***Spalten-Linearität***.[576] *Zur Demonstration dieses Effektes werden die Werte des Zustandes z_2 für jede Alternative um den Betrag 5 erhöht und das* HURWICZ*-Prinzip für λ_2 angewendet. In Tab. 1.46 wird deutlich, wie sich die bisherige Präferenzordnung $a_6 \succ a_4 \succ a_5 \succ a_2$ verändert zu $a_6 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_5$. Optimal bleibt a_6, jedoch verändert sich die Rangordnung von a_2 und a_5.*

[576] Vgl. Anf. 1.6.12 auf S. 168.

Tab. 1.46: Verletzung des Spalten-Linearitäts-Axioms durch das HURWICZ-Prinzip. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tab. 1.41.

Alternative	Zustände				Funktional bei:	
	z_1	z_2	z_3	z_4	$\lambda_2 = 0{,}75$	
a_2	4	14	8	6	**11,50**	
a_4	15	8	15	4	**12,25**	
a_5	6	13	12	8	**11,25**	
a_6	6	10	10	16	**13,50**	$\Leftarrow \max_{\lambda_2}$

Darüber hinaus kann gezeigt werden, dass das HURWICZ*-Prinzip die* ***Konvexitäts-Anforderung verletzt.***[577] *Dazu werden die zwei Alternativen in Tab. 1.47 betrachtet und der Wert* $\lambda = 0{,}75$ *verwendet.*

Tab. 1.47: Nichterfüllung des Konvexitäts-Axioms durch das HURWICZ-Prinzip. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Luce/Raiffa (1957: 283).

Alternative	Zustände			Funktional bei: $\lambda_2 = 0{,}75$
	z_1	z_2	z_3	
a_1	0	1	0	**0,75**
a_2	1	0	0	**0,75**
$a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**0,375**

Gemäß dem Konvexitäts-Axiom müsste Alternative 3 gleichwertig zu den anderen beiden Alternativen sein. Bei Anwendung des HURWICZ*-Prinzips ist dies jedoch nicht der Fall.*

Laplace-Regel:[578]

Bei diesem Vorgehen werden – in Ermangelung weiterer Informationen – alle Zustände als gleich wahrscheinlich eingestuft. Die Begründung lautet: Wenn keine Informationen über die Wahrscheinlichkeiten vorliegen, besteht kein Grund dafür, die Wahrscheinlichkeit eines Zustands höher oder niedriger einzuschätzen als die Wahrscheinlichkeit eines anderen Zustands. Deshalb wird diese Regel auch als **„Regel des unzureichenden Grundes“** bezeichnet. Wie bei der Vorstellung der Anforderungen an rationale Entscheidungen dargestellt, geht dieses Prinzip von mindestens intervall-skalierten Nutzengrößen aus.[579] Das Präferenzfunktional lautet: $\Phi(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} u_{ip}$. Die optimale Alternative a_{opt} wird definiert mit der E.-regel 1.15.

---

[577] Vgl. Anf. 1.6.6 auf S. 166.

[578] Diese Regel geht auf JAKOB BERNOULLI (1655–1705) zurück, wurde später jedoch ebenfalls von PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827) benutzt und nach diesem benannt.

[579] Vgl. Abschn. 1.6.2 auf S. 164; Obermaier/Saliger (2020: 120).

Entscheidungsregel 1.15: *Bei Anwendung der* LAPLACE*-Regel ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \left[\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} u_{ip} \right].$$

Die LAPLACE-Regel wird nun auf das Beispiel angewendet.

Anwendung der LAPLACE-Regel auf Bspl. 1.18 von S. 164: *Alternativen a_4 und a_6 weisen den höchsten Wert auf und sind deshalb gleichwertig (vgl. Tab. 1.48).*

Tab. 1.48: Anwendung der LAPLACE-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tab. 1.41.

Alternative	Zustände z_1	z_2	z_3	z_4	Funktional: $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_{ip}$	
a_2	4	9	8	6	**6,75**	
a_4	15	3	15	4	**9,25**	⇐ **max**
a_5	6	8	12	8	**8,50**	
a_6	6	5	10	16	**9,25**	⇐ **max**

Die LAPLACE*-Regel* ***verletzt*** *das Axiom der* ***Spalten-Duplikation***.[580] *Zur Erläuterung wird im bisherigen Beispiel der Umweltzustand z_4 dupliziert und als zusätzlicher Zustand z_5 eingeführt. Tab. 1.49 zeigt, wie sich die bisherige Präferenzordnung $a_4 \sim a_6 \succ a_5 \succ a_2$ verändert zu $a_6 \succ a_5 \succ a_4 \succ a_2$.*

Tab. 1.49: Nichterfüllung des Duplikations-Axioms durch die LAPLACE-Regel. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Zustände z_1	z_2	z_3	z_4	$z_5 = z_4$	Funktional: $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} u_{ip}$	
a_2	4	9	8	6	6	**6,60**	
a_4	15	3	15	4	4	**8,20**	
a_5	6	8	12	8	8	**8,40**	
a_6	6	5	10	16	16	**10,60**	⇐ **max**

Die Annahme, dass für alle Zukunftslagen die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit vorliegt, dürfte selten erfüllt sein.

[580] Vgl. Anf. 1.6.11 auf S. 168.

Savage-Niehans-Regel:[581]

Dieses Vorgehen - auch als „Minimax-Regret-Regel“ bzw. „Regel des geringsten Bedauerns“ bezeichnet - besteht aus zwei Schritten: Im ersten Schritt ist aus der Nutzenmatrix die Matrix der Opportunitätskosten (Matrix des Bedauerns) zu ermitteln. Dazu wird der „Bedauernswert“ b_{ip} für jede Alternative und jeden Umweltzustand nach folgender Berechnungsvorschrift ermittelt:

$$b_{ip} = \max_{k} u_{kp} - u_{ip}.$$

Dies ist die Differenz aus dem Nutzen der gewählten Alternative und dem Nutzen der optimalen Alternative (dem Spaltenmaximum) und gibt den Nutzenentgang an, der dann resultiert, wenn anstelle der optimalen Alternative die Alternative a_i gewählt wurde. Je größer diese Differenz, desto größer ist der entgangene Nutzen und auch das „Bedauern“ auf Seiten des Entscheidungsträgers. Wie bei der Vorstellung der Anforderungen an rationale Entscheidungen dargestellt, geht dieses Prinzip von mindestens intervallskalierten Größen aus.[582] Bei diesem Prinzip sind es die Werte des Nutzenentgangs die mindestens intervall-skaliert sein müssen, da ja die Differenzen in diesen Werten betrachtet werden.

Das Präferenzfunktional lautet: $\Phi(a_i) = \max_{p} b_{ip}$. Diese Regel ist eines der wenigen Beispiele, in denen das Präferenzfunktional minimiert wird. Die optimale Alternative a_{opt} ist deshalb definiert durch Entscheidungsregel 1.16.[583]

Entscheidungsregel 1.16: *Bei Anwendung der* Savage-Niehans*-Regel ist diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \min_{i} \left[\max_{p} b_{ip} \right].$$

Die Savage-Niehans-Regel wird nun auf das Beispiel angewendet.

Anwendung der Savage-Niehans-Regel auf Bspl. 1.18 von S. 164: *Es ergeben sich die Maximalwerte für jeden Umweltzustand, wie sie in Tabelle 1.50 dargestellt sind.*

[581] Jürg Niehans (1919–2007) und Leonard Savage (1917–1971), die die Regel unabhängig voneinander entwickelten. Vgl. Niehans (1948: 445); Savage (1951).

[582] Vgl. Abschn. 1.6.2 auf S. 164.

[583] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 115).

Tab. 1.50: Darstellung der maximalen Alternativen. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tab. 1.41.

	$\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$
$\max_{k}(u_{kp})$	15	9	15	16

Bei Verwendung dieser Maximalwerte ergeben sich die Werte des Bedauerns bzw. die Matrix der Opportunitätskosten in Tabelle 1.51.

Tab. 1.51: Anwendung der Regel des geringsten Bedauerns. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tab. 1.41.

Alternative	Zustände $\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$	Funktional: $\max_{p} b_{ip}$	
$\mathbf{a_2}$	$b_{21} = 11$	$b_{22} = 0$	$b_{23} = 7$	$b_{24} = 10$	**11**	
$\mathbf{a_4}$	$b_{41} = 0$	$b_{42} = 6$	$b_{43} = 0$	$b_{44} = 12$	**12**	
$\mathbf{a_5}$	$b_{51} = 9$	$b_{52} = 1$	$b_{53} = 3$	$b_{54} = 8$	**9**	$\Leftarrow$ **min**
$\mathbf{a_6}$	$b_{61} = 9$	$b_{62} = 4$	$b_{63} = 5$	$b_{64} = 0$	**9**	$\Leftarrow$ **min**

Die Alternativen a_5 und a_6 weisen die geringsten Wert des maximalen Bedauerns auf und sind gleichwertig. Die Präferenzordnung lautet: $a_5 \sim a_6 \succ a_2 \succ a_4$.

Es wird deutlich, dass es sich bei diesem Prinzip um die Anwendung der Minimax-Regel auf die Matrix der Opportunitätskosten handelt, d. h. der minimale Wert des maximalen Nachteils jeder Alternative wird ermittelt. Die Savage-Niehans-Regel **verletzt** das Unabhängigkeits-Axiom.[584]

Abhängigkeit von irrelevanten Alternativen bei der Savage-Niehans-Regel:

Zur Demonstration wird in dem bisher diskutierten Fall die Alternative a_7 eingeführt. Damit ergeben sich die Ergebnisse in Tabelle 1.52.

Tab. 1.52: Einführung einer irrelevanten Alternative. Quelle: Eigene Darstellung.

Einführung der zusätzlichen Alternative				
Alternative	**Zustände** $\mathbf{z_1}$	$\mathbf{z_2}$	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{z_4}$
$\mathbf{a_7}$	5	15	5	10
$\Rightarrow$ Resultierender Maximalwert für jeden Umweltzustand				
$\max_{k}(u_{kp})$	15	15	15	16

[584] Vgl. Anf. 1.6.9 auf S. 167 sowie Krelle (1968: 189); Yager (2004: 112).

Diese Alternative verändert keine der bisher ermittelten Ergebnisse, jedoch führt sie dazu, dass sich die Maximalvarianten der verschiedenen Umweltzustände entsprechend Tabelle 1.52 ändern. Auch wenn die neue Alternative entsprechend der Regel des geringsten Bedauerns nicht als optimale Alternative gewählt wird, führt sie zu einer Veränderung der bisher mit dieser Regel ermittelten Alternative. Die neue Präferenzordnung lautet: $a_5 \succ a_6 \sim a_7 \succ a_2 \succ a_4$ *(vgl. Tabelle 1.53), so dass die Relation der Alternativen 5 und 6 durch die Alternative 7 verändert wurde.*

Tab. 1.53: Einfluss der irrelevanten Alternative a_7. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.41 und Tab. 1.52.

Alternative	Zustände				Funktional: $\max_p b_{ip}$	
	z_1	z_2	z_3	z_4		
a_2	$b_{21} = 11$	$b_{22} = 6$	$b_{23} = 7$	$b_{24} = 10$	**11**	
a_4	$b_{41} = 0$	$b_{42} = 12$	$b_{43} = 0$	$b_{44} = 12$	**12**	
a_5	$b_{51} = 9$	$b_{52} = 7$	$b_{53} = 3$	$b_{54} = 8$	**9**	⇐ **min**
a_6	$b_{61} = 9$	$b_{62} = 10$	$b_{63} = 5$	$b_{64} = 0$	**10**	
a_7	$b_{61} = 10$	$b_{62} = 0$	$b_{63}10$	$b_{64} = 6$	**10**	

Interessanterweise erfüllt die Savage-Niehans-Regel das Axiom der **speziellen Zeilen-Hinzufügung**.[585] Das liegt darin begründet, dass die spezielle Zeilen-Hinzufügung schwächer ist als die Unabhängigkeit in Form der allgemeinen Zeilen-Hinzufügung.

1.6.4 Zwischenfazit

Mit Blick auf die festgestellten Anforderungen an eine rationale Entscheidung in Abschnitt 1.6.2 wird in einem ersten Schritt dargestellt, inwieweit die Verfahren die Axiome Milnors erfüllen. Die Bezeichnung „konstitutiv“ in Tab. 1.6.2 bedeutet, dass diese Anforderung zusammen mit den übrigen konstitutiven Anforderungen das jeweilige Entscheidungskriterium implizieren.

[585] Vgl. Anf. 1.6.10 auf S. 168 sowie Luce/Raiffa (1957: 319).

Tab. 1.54: Erfüllung der Axiome von MILNOR durch die Verfahren. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Milnor (1954: 52); Binmore (2011: 158).

Präferenz-funktional / Anforderung	WALD-Regel	HURWICZ-Prinzip	LAPLACE-Regel	SAVAGE-NIEHANS-Regel
Schwache Ordnung (Anf. 1.6.1 bis Anf. 1.6.3)	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv
Stetigkeit (Anf. 1.6.4)	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt	Erfüllt, konstitutiv
Dominanz (Anf. 1.6.5)	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv
Konvexität (Anf. 1.6.6)	Erfüllt, konstitutiv	**Nicht** erfüllt	Erfüllt	Erfüllt, konstitutiv
Nutzen-Linearität (Anf. 1.6.7)	Erfüllt	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt	Erfüllt
Symmetrie (Anf. 1.6.8)	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv
Unabhängigkeit (Anf. 1.6.9)	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	**Nicht** erfüllt
Spezielle Zeilen-Hinzufügung (Anf. 1.6.10)	Erfüllt	Erfüllt	Erfüllt	Erfüllt, konstitutiv
Spalten-Duplikation (Anf. 1.6.11)	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv	**Nicht** erfüllt	Erfüllt, konstitutiv
Spalten-Linearität (Anf. 1.6.12)	**Nicht** erfüllt	**Nicht** erfüllt	Erfüllt, konstitutiv	Erfüllt, konstitutiv

In Tabelle 1.55 sind die Ergebnisse der bisher behandelten Entscheidungsregeln und -prinzipien zusammengefasst.

Tab. 1.55: Ergebnisse der Entscheidungen bei Ungewissheit. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 1.41.

E.-regel bzw. E.-prinzip	Optimale Alternative
WALD	a_5
Maximax	a_6
HURWICZ	
$\lambda = 0{,}25$	a_6
$\lambda = 0{,}75$	a_6
SAVAGE-NIEHANS	a_5 und a_6
LAPLACE	a_6

1.6.5 Zusammenfassende Kritik

Die von MILNOR aufgestellten Axiome sind der Gradmesser zur Beurteilung der Rationalität von Entscheidungsverfahren bzw. Präferenzfunktionalen. Die Anforderungen sind nachvollziehbar und teilweise auch in anderen

Entscheidungssituationen anzutreffen, so z. B. die schwache Ordnung, Stetigkeit, Konvexität, Symmetrie und Unabhängigkeit. Es wird deutlich, dass die zunehmende Anzahl an wünschenswerten Eigenschaften dazu führt, dass diese nicht in ihrer Gesamtheit von den unterschiedlichen Methoden erfüllt werden können. Der Akteur muss deshalb eine Entscheidung treffen, welche Eigenschaften für ihn relevant sind und welches Modell deshalb für ihn geeignet ist.

Auch die objektivierten Entscheidungsmaßstäbe, welche sämtlich dasselbe Ziel verfolgen (die Identifizierung **der** optimalen Alternative), können nicht verhindern, dass verschiedene „optimale“ Alternativen entstehen. Daraus folgt, dass trotz aller methodischer Vorschriften im Sinne der präskriptiven Entscheidungstheorie keine „objektiv richtige Rationalität“ feststellbar ist, sondern Rationalität immer subjektiv bleibt.

Ein wesentlicher Kritikpunkt liegt in der Annahme, dass Nutzenwerte für Zustände und Alternativen vorliegen. Die Lösungsansätze basieren auf den Grundannahmen der Spieltheorie (deshalb wird die Situation auch als “Spiel gegen die Natur“ bezeichnet) und setzen die Existenz eines kardinalen Nutzens voraus.[586] Die dafür notwendigen Axiome bzw. Voraussetzungen werden nicht thematisiert. Die Ausführungen zu den erforderlichen Axiomen[587] hatten jedoch schon auf eine Reihe Hindernisse aufmerksam gemacht. In der Praxis dürfte deshalb die größte Schwierigkeit in der Umwandlung von Ergebnis- in Nutzenwerte bzw. in der Erfüllung der dafür erforderlichen Prämissen bestehen.

[586] Vgl. Abschn. 1.6.1 auf S. 160 inbes. die Fußnoten 523 und 526 auf S. 161.
[587] Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

1.7 Zeitpräferenz bei Sicherheit - Einstufige, mehrperiodige Entscheidungen

1.7.1 Einführung

Wie in dem einleitenden Abschnitt[588] bereits erwähnt wurde, muss der Entscheidungsträger festlegen, wie er den zeitlichen Unterschied der eintretenden Ereignisse bewertet. Der Akteur steht vor dem Problem, die in der Zukunft – zu unterschiedlichen Zeitpunkten – anfallenden Konsequenzen seiner Entscheidung berücksichtigen und bewerten zu müssen. Er muss abwägen, wie er den Konsum zu unterschiedlichen Zeitpunkten bewertet.

Dies wird als Zeitpräferenz bezeichnet, die aus der subjektiven Sicht eines Marktteilnehmers die Vorziehenswürdigkeit des Sofortkonsums gegenüber dem Aufschub des Konsums beschreibt. Abbildung 1.32 enthält die Indifferenzkurven eines Akteurs, der sich für den Konsum zu zwei verschiedenen Zeitpunkten entscheiden muss.[589]

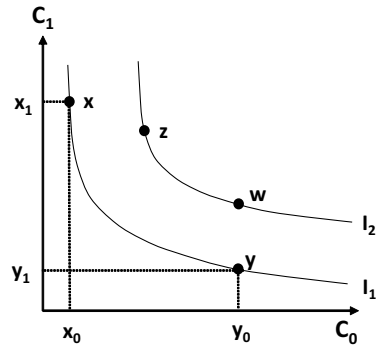


Abb. 1.32: Intertemporale Indifferenzkurven. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Bitz (1981: 294); Kruschwitz/Husmann (2012: 12).

Die Zeitpräferenz des Akteurs beschreibt, in welcher Relation – aus seiner **subjektiven** Sicht – der Konsum C_0 in der Periode $t = 0$ zum Konsum C_1 in der Periode $t = 1$ steht. Es wird davon ausgegangen, dass der Akteur in einem bestimmten Punkt indifferent zwischen dem früheren und dem späteren Konsum ist. In der Abbildung 1.32 beispielsweise befinden sich die Alternativen x und y auf einer Indifferenzkurve und sind für den Akteur deshalb gleichwertig.

[588] Vgl. Abschn. 1.2 auf S. 8.

[589] Vgl. Lehmann (1973: 52–54 sowie 109–110) zu einer fundamentalen Kritik an der Verwendung der Indifferenzkurven-Analyse zur Ableitung der Zeitpräferenz.

Die Kombination der Ergebnisse (x_0,x_1) besitzt für ihn denselben Wert, wie die Kombination (y_0,y_1). Die Indizierung der Indifferenzkurven enthält keine Aussage über die Zuordnung zu den Konsumphasen, sondern beschreibt unterschiedliche Nutzenniveaus. Der Nutzen der Kombinationen auf I_2 ist größer als der Nutzen von I_1.

Zur Beschreibung der Zeitpräferenz wird ein Akteur betrachtet, der heute in $t = 0$ ein Einkommen E_0 erhält und vor folgender Wahl steht:[590] Er kann E_0 entweder in Höhe von C_0 konsumieren oder in Höhe von S_0 auf einem vollkommenen Kapitalmarkt zum Zinssatz r für eine Periode anlegen. Nach Ablauf der Periode in $t = 1$ kann er den angelegten Betrag zuzüglich der Zinsen als C_1 ebenfalls verkonsumieren. Damit ergibt sich folgende Darstellung:

$$E_0 = C_0 + S_0 \tag{1}$$

Der Betrag, der nach einer Periode für Konsum zur Verfügung steht, besteht in dem Sparbetrag und dem Ertrag aus der Geldanlage und ergibt sich aus:

$$C_1 = S_0 \cdot (1+r). \tag{2}$$

Werden diese Gleichungen zusammengeführt, ergibt sich:

$$E_0 = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{1+r} \tag{3}$$

Der Akteur möchte den Nutzen aus diesen beiden Aktivitäten $U = U(C_0,C_1)$ maximieren. Mit dem Lagrange-Ansatz folgt:

$$L = U + \lambda \left(E_0 - C_0 - C_1 \cdot \frac{1}{1+r} \right) \tag{4}$$

Es resultiert:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial C_1}}{\frac{\partial U}{\partial C_0}} = \frac{1}{1+r} \tag{5}$$

Auflösen nach r ergibt:

$$r = \underbrace{\frac{\frac{\partial U}{\partial C_0} - \frac{\partial U}{\partial C_1}}{\frac{\partial U}{\partial C_1}}}_{\Pi} \tag{6}$$

Der Term Π verkörpert die relative Abweichung des Grenznutzens des Gegenwartskonsums vom Grenznutzen des Zukunftskonsums und wird auch als reine Zeitpräferenz bezeichnet.

Mit:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial C_1}}{\frac{\partial U}{\partial C_0}} = -\frac{dC_0}{dC_1} \tag{7}$$

[590] Zur folgenden Darstellung vgl. Fisher (1930: 510–511); Wied-Nebbeling/Schott (2005: 91–92); Kruschwitz/Husmann (2012: 11–16); Breyer (2020: 172–174).

kann Gleichung 5 auch wie folgt formuliert werden:

$$-\frac{dC_0}{dC_1} = \frac{1}{1+r} \tag{8}$$

Das führt zu:

$$-\frac{dC_1}{dC_0} = 1+r \tag{9}$$

Womit folgt:

$$r = -\frac{dC_1}{dC_0} - 1 \tag{10}$$

$$r = GRiS - 1 \tag{11}$$

$$\Pi = -\frac{dC_1}{dC_0} - 1 \tag{12}$$

Daraus kann geschlussfolgert werden: Im intertemporalen Nutzenmaximum entspricht das Grenznutzenverhältnis aus Zukunfts- und Gegenwartskonsum dem Diskontfaktor $1+r$. Bei einem nutzenmaximierenden Akteur auf einem vollkommenen Kapitalmarkt muss Π dem Marktzinssatz r entsprechen.[591] In Gleichung 11 beschreibt $GRiS$ die **Grenzrate der intertemporalen Substitution** (vgl. Def. 1.47).

Definition 1.47: *Die Grenzrate der intertemporalen Substitution $GRiS$ ist definiert durch:* $GRiS = -\frac{dC_1}{dC_0} = \frac{\frac{\partial U}{\partial C_0}}{\frac{\partial U}{\partial C_1}}$.

Die Frage, ob Π ausschließlich eine zeitliche und nicht auch eine güterwirtschaftliche Komponente beinhaltet, wurde früh gestellt.[592] Die Antwort lautet, dass sehr wohl beide Komponenten gemeinsam gemessen werden, jedoch keine bessere messtheoretische Möglichkeit zur Unterscheidung existiert.[593] Für die weiteren Darstellungen wird folgende Begriffsabgrenzung vorgenommen:

- **Zeitpräferenz im engeren Sinn:** Diese Form der Präferenz bezieht sich auf die Vorliebe für den zeitlichen Eintritt eines Ereignisses bzw. für den Konsum eines Gutes. Die vom Akteur zu beantwortende Frage lautet: Bevorzugen Sie lieber 100,-€ heute oder 110,-€ in einem Jahr? Dieses Verständnis wird in einigen Quellen auch als reine Zeitpräferenz bezeichnet und liegt den folgenden Erläuterungen zugrunde.

[591] „It is the (percentage) excess of the present marginal want for one more unit of *present* goods over the *present* marginal want for one more unit of *future* goods." Fisher (1930: 62). Hervorh. im Original.

[592] Vgl. Lehmann (1973: 87–98).

[593] Vgl. Kalveram (1977: 197).

- **Zeitpräferenz im weiteren Sinn:** In den Erläuterungen zu den Präferenzen[594] wurde deutlich gemacht, dass die Zeitpräferenz i. e. S. oftmals mit anderen reinen Präferenzarten verknüpft ist, wie z. B. mit der Sicherheitspräferenz.[595] Eine streng isolierte Betrachtung ist selten möglich. Aber auch eine Verbindung mit der Höhenpräferenz ist denkbar.[596] Es handelt sich deshalb häufig um multidimensionale Präferenzen.[597] Der erweiterte Begriff der Zeitpräferenz ist vor diesem Hintergrund wenig überzeugend und wird hier nicht verwendet.

Nach dieser Festlegung muss geklärt werden, wie groß diese Rate ist. Das kann von jedem Individuum anders eingeschätzt werden. Grundsätzlich sind folgende Präferenzen möglich:[598]

- Gegenwartspräferenz,
- Zukunftspräferenz sowie
- Indifferenz.

Gegenwartspräferenz bedeutet, dass ein Akteur von zwei positiven Ergebnissen mit identischen Beträgen dasjenige bevorzugt, welches früher verfügbar ist. Im Fall von **Zukunftspräferenz** würde das später anfallende Ergebnis präferiert. Wenn der Zeitpunkt keine Rolle spielt, ist der Akteur **indifferent**.[599]

Es erscheint in diesem Zusammenhang erforderlich, auf die Unterscheidung von **individueller** Zeitpräferenz einerseits und **sozialer** bzw. **gesellschaftlicher** Zeitpräferenz andererseits hinzuweisen. Die individuelle Zeitpräferenz wird durch die persönlichen Wünsche, Vorlieben, Hoffnungen, Ängste, etc. der einzelnen Akteure bestimmt. Auf dieser Basis schauen diese Personen in die Zukunft und versuchen, ihren persönlichen Nutzen durch heutige Entscheidungen zu maximieren.

Davon zu unterscheiden ist der gesellschaftliche Nutzen heutiger Entscheidungen, der räumlich und auch zeitlich über den individuellen Nutzen hinausgeht. Gut illustriert wird dies durch die Diskussion um die Berücksichtigung der Bedürfnisse zukünftiger Generationen sowie durch Bestrebungen, ökologische Folgen angemessen bei heutigen Entscheidungen zu berücksichtigen. Die Bewertung dieser Aspekte erfolgt durch die gesellschaftliche Zeitpräferenz. Im weiteren Verlauf wird ausschließlich die individuelle Zeitpräferenz diskutiert.

---

[594] Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.

[595] Vgl. Keeney/Raiffa (1993: 488–493).

[596] Vgl. Dyckhoff (1988: 1003).

[597] Vgl. Tab. 1.2 auf S. 9.

[598] Vgl. Fishburn (1968: 351); Voigt (1992: 281).

[599] Zeitindifferenz ist ein Merkmal der kalkulatorischen Investitionsrechenverfahren. Vgl. 1. Band, Abschn. 3.1.2 auf S. 165.

In vielen Modellen wird von einer Bevorzugung der Gegenwart in den individuellen Präferenzen ausgegangen.[600] Bereits Böhm-Bawerk nahm an, dass bei individuellen Entscheidungsträgern i. d. R. Gegenwartspräferenz vorliegt und sah dafür folgende Gründe:[601]

1. Der Wert von (gegenwärtigen und auch von zukünftigen) Konsumgütern bestimmt sich aus der Relation von Bedarf und Deckung. Wird das gegenwärtige Bedarf-Deckungs-Verhältnis ungünstiger empfundenen als das zukünftige Verhältnis, führt das zum Vorziehen von künftigem Einkommen bzw. dem daraus resultierenden Nutzen.
2. Die zukünftigen Bedürfnisse und die zu deren Befriedigung erforderlichen Mittel werden systematisch unterschätzt. Dafür werden folgende Gründe erwähnt:
   - Unsicherheit über den Eintritt der Ereignisse: Über die Zukunft liegen nur unvollständige Informationen vor. Diese zukünftigen Ereignisse werden tendenziell unterschätzt.
   - Willensschwäche: Ein heutiger Genuss wird vorgezogen, auch wenn sich der Akteur bewusst ist, dass dadurch ein künftiges, u. U. wichtigeres Bedürfnis nicht oder nur teilweise befriedigt werden kann.
   - Unsicherheit über eigene Lebenserwartung: Selbst wenn zukünftige Zustände mit Sicherheit eintreten, besteht Unsicherheit darüber, ob der Akteur diese noch erleben wird. Auch deshalb werden künftige Bedürfnisse geringer gewichtet.
3. Ein Verzicht auf gegenwärtigen Konsum kann zusätzlich in Produktionsaktivitäten investiert werden. Daraus resultiert eine Ertragssteigerung, die eine Investition in der Gegenwart als erstrebenswert erscheinen lässt.

Böhm-Bawerk führt aus, dass sich die Wirkungen des ersten und zweiten Grundes ergänzen, wohingegen der dritte Grund isoliert von den ersten beiden existiert. Fisher basiert seine Ausführungen zur „Ungeduld“ primär auf dem ersten Grund.[602] Demzufolge ging er bei der Begründung des Kapitalwertes ebenfalls von einer Gegenwartspräferenz aus.[603] Als Bestimmungsgrößen der Zeitpräferenz identifizierte er zwei Einflussgrößen: Einerseits die Summe der psychischen Faktoren, also die individuellen Charaktereigenschaften. Andererseits aber auch die aktuelle Einkommenssituation des Akteurs. Je höher

[600] Vgl. Anf. 1.7.7 auf S. 205.

[601] Vgl. Böhm-Bawerk (1921: 328–340); Kalveram (1977: 157–161); Beck (2014: 205–207).

[602] Vgl. Fisher (1930: 75); Kalveram (1977: 161).

[603] Vgl. Fisher (1930: 61–68). *„Time preference, a concept which psychologicalIy underlies interest, lends itself to express any situation, either preference for present as against future goods or preference for future as against present goods or for no preference. The term impatience carries with it the presumption that present goods are preferred. But I shall treat the two terms (impatience and time preference) as synonymous.“* Fisher (1930: 66).

das aktuelle Einkommen ist, desto geringer wird die Ungeduld sein. Das kann dazu führen, dass die Ungeduld „negativ“ ist,[604] also eher in Geduld umschlägt.

In vielen Fällen sieht sich der Akteur **mehreren Ereignissen** gegenüber, die zu **unterschiedlichen Zeitpunkten** in der Zukunft anfallen. Im Allgemeinen stehen ihm mehrere Handlungsmöglichkeiten zur Auswahl. Er muss in der Gegenwart über die Vorziehenswürdigkeit der Alternativen befinden. Dazu muss er die – zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallenden – Ereignisse miteinander vergleichen. Diese Situation wird auch als **intertemporale Entscheidung** bezeichnet. Zur Lösung dieses Problems wird ein Präferenzfunktional und eine Optimierungsvorschrift benötigt, wie es bereits beschrieben wurde.[605] Die zentrale Frage lautet: Welche Präferenzfunktionale setzen welche Anforderungen an die Präferenzen eines Akteurs voraus?

Für den oftmals vorausgesetzten vollkommenen und vollständigen Kapitalmarkt ist die Analyse der subjektiven Präferenzen durch das Separationstheorem von Fisher irrelevant.[606] An dieser Stelle soll jedoch die Gelegenheit genutzt werden, die hinter der Kapitalwert-Idee stehenden Annahmen der subjektiven Präferenzen zu erläutern. Dies erfolgt aus folgenden Gründen:

- Die Konzentration auf finanzmathematische Operationen lässt die zugrundeliegenden Annahmen über die handelnden Personen verblassen. Das ist jedoch für ökonomische Zwecke ungünstig, da es sich bei Akteuren um Individuen handelt, die individuelle Präferenzen haben.
- Die Analyse der Zeitpräferenz stellt die notwendige Ergänzung zu den bisherigen Erläuterungen zur Höhen-, Arten- und Sicherheitspräferenz dar.
- Es kann – im Vorgriff auf die Erläuterungen – gezeigt werden, dass die additiven Präferenzfunktionale von multikriteriellen Entscheidungen, Entscheidungen unter Risiko und intertemporalen Entscheidungen einige Gemeinsamkeiten aufweisen. Die Unterschiede werden ebenfalls herausgearbeitet.
- In einigen Modellen der Investitionsrechnung wird die Annahme des vollkommenen und vollständigen Kapitalmarktes aufgegeben und es werden Instrumente für den realen – also den unvollkommenen – Kapitalmarkt vorgestellt.[607] Auch diese Instrumente verwenden eines der im Folgenden vorgestellten Präferenzfunktionale, weshalb die Vergegenwärtigung der damit verbundenen Annahmen auch für diese Modelle wichtig ist.

Die intertemporale Entscheidungsfindung weist Ähnlichkeiten mit den folgenden Situationen auf:

---

[604] *„Impatience may be and sometimes is negative!“* Fisher (1930: 67).

[605] Vgl. Def. 1.4 auf S. 17.

[606] Vgl. 1. Band, Abschn. 3.3.6 auf S. 224.

[607] Vgl. 1. Band, Abschn. 3.5.1 auf S. 261.

- **Multikriterielle Entscheidung:** Die Zeitpunkte können als Merkmale oder Attribute interpretiert werden.[608] Dann können die Darstellungen zu den Anforderungen an rationale Präferenzen für multikriterielle Entscheidungen als Grundlage verwendet werden.[609]
- **Entscheidung unter Ungewissheit:**[610] Wenn die Zeitpunkte als Spalten und die Alternativen als Reihen dargestellt werden, ergeben sich Ähnlichkeiten zur Ungewissheits-Situation. Dyckhoff stellte diesen Weg vor und erarbeitete ein Axiomensystem,[611] welches Ähnlichkeiten mit dem Axiomensystem von Milnor hat.[612]
- **Entscheidung unter Risiko:**[613] Eine grundlegende Axiomatik des diskontierten Nutzens geht auf Koopmans zurück.[614] Er orientierte sich an der Axiomatik von von Neumann und Morgenstern zu Entscheidungen unter Risiko, welche Präferenzen über Lotterien definierten. Koopmans definiert sein Axiomensystem für Präferenzen über sog. Konsumprogramme, also über Zahlungsreihen. Die beiden Axiomensysteme sind deshalb vom Aufbau her relativ ähnlich. Das Axiomensystem von Koopmans wurde in den Folgejahren weiter entwickelt bzw. variiert.[615] Ein anderes Axiomensystem, das ebenfalls Ähnlichkeiten mit dem von-Neumann-Morgensternschen Ansatz aufweist, stammt von Lancaster.[616] Dieses Modell baut auf 10 Axiomen auf, konnte sich jedoch in der Form nicht durchsetzen. Es eröffnete aber eine Sichtweise, die von anderen Autoren später aufgegriffen wurde.[617]

Im weiteren Verlauf wird die Analogie zur multikriteriellen Entscheidung genutzt, da die Ähnlichkeit der beiden Situationen didaktisch gute Anknüpfungspunkte erlaubt. Im Anschluss wird kurz auf die Axiomatik von Dyckhoff eingegangen.

---

608 Vgl. Debreu (1960: 21); Fishburn (1979: 42–43); French (1988: 133–137); Keeney/Raiffa (1993: 476–483); Fishburn/Wakker (1995: 1138–1139); Bouyssou/Pirlo (2016: 114).

609 Vgl. Abschn. 1.4.3.2 auf S. 55.

610 Vgl. Abschn. 1.6 auf S. 160.

611 Vgl. Dyckhoff (1988).

612 Vgl. Milnor (1954) sowie die ausführliche Darstellung im Abschn. 1.6.2 auf S. 164.

613 Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

614 Vgl. Koopmans (1960: 293–294); Koopmans/Diamond/Williamson (1964: 85); Koopmans (1972b). Tjalling C. Koopmans (1910–1985) erhielt 1975 den „Wirtschaftsnobelpreis“ zusammen mit Leonid W. Kantorowitsch.

615 Vgl. Gottinger (1969: 430–433); Fishburn/Rubinstein (1982); Prelec/Loewenstein (1991); Frederick/Loewenstein/O'Donoghue (2002).

616 Vgl. Lancaster (1963).

617 Vgl. Fishburn/Rubinstein (1982); Anchugina (2017).

1.7.2 Axiome rationalen Handelns

1.7.2.1 Ergebnisse, Präferenzen und Nutzen

Für die weiteren Ausführungen gelten folgende Annahmen und Notationen:

- Der Akteur geht von einer **sicheren Datenlage** aus (was für Entscheidungen über die Zukunft lediglich eine erste Näherung sein kann).
- Es existiert eine endliche Menge bekannter Perioden $N = \{1,2,3,...,n\}$ mit $p \in N$.
- Zeit wird in identische äquidistante Abschnitte unterteilt, d. h. jede Periode ist gleichlang.
- Die Menge A ist durch die drei Alternativen $A = \{x,y,z\}$ definiert.
- Jede Alternative wird durch einen Ergebnisvektor beschrieben. Die Alternative x z. B. wird durch den Vektor $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ beschrieben, wobei x_p das Ergebnis der Periode p beschreibt.
- Die Menge P_p mit $p \in N$ beschreibt die bekannten Ergebnisse, die in der Periode p mit Sicherheit aus den verschiedenen Alternativen resultieren. Für $p = 1$ folgt z. B.: $P_1 = \{x_1,y_1,z_1\}$. P_1 bezeichnet die Menge der Ergebnisse der Alternativen in der Periode 1, P_2 ist die Menge der Ergebnisse der Alternativen der Periode 2 usw.
- Es resultiert das kartesische Produkt $P^n = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n = \prod_{p=1}^{n} P_p$.[618]
- Auf diese Weise entsteht die **Ergebnismatrix** (vgl. Tab. 1.56).

Tab. 1.56: Grundstruktur der intertemporalen Ergebnismatrix. Quelle: Eigene Darstellung.

Periode / Alternative	p = 1	p = 2	p = 3	⋯	p = n
x	x_1	x_2	x_3	⋯	x_n
y	y_1	y_2	y_3	⋯	y_n
z	z_1	z_2	z_3	⋯	z_n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮

- Neben der Berücksichtigung der Gesamtmenge sämtlicher Perioden N ist es möglich bzw. erforderlich, lediglich Teilmengen (z. B. R oder S) zu betrachten. Um die Teilmengen zu unterscheiden, wird die Menge $I \subseteq N$ eingeführt, welche die Zeitpunkte indiziert. Die Menge $S = \prod_{p \in I} P_p$ beschreibt

[618] Vgl. Krantz et al. (1971: 247); French (1988: 119); Wakker (1989: 27); Takemura (2019: 157–158).

eine nichtleere Teilmenge und $R = \prod_{p \notin I} P_p$ stellt die Komplementärmenge $R = P^n \backslash S$ dar. Eine Auszahlung bzw. ein Ergebniswert von P_R wird mit x_R bezeichnet.

- Die zukünftigen Zustände werden nicht vom Akteur selbst und auch nicht von einem bewusst handelnden Gegenspieler beeinflusst.

Ein allgemeingültiger **erster Schritt** besteht in der Umwandlung der Ergebnismatrix in eine Nutzen- bzw. Entscheidungsmatrix. Dabei muss für die Ergebnisgrößen eine Nutzenfunktion bekannt sein oder ermittelt werden, so dass folgt: $u(x_p) = f(x_p)$. Mit dieser Funktion wird also die **Höhenpräferenz** des Akteurs abgebildet. Dies wirft die Frage nach der Gestalt der Nutzenfunktion auf. Für quantitative, finanzielle Größen ist dies ziemlich unproblematisch. Bei qualitativen Kriterien ist es jedoch nicht so einfach. An entsprechender Stelle wird dies erläutert.[619]

Der Term $u(x_p)$ bezeichnet den Nutzen des Ergebnisses der Alternative x in der Periode p und stellt quasi den "*Brutto-Nutzen*" des Ergebnisses in der Zukunft dar. Es ist also der noch nicht in der Zeit transformierte – noch nicht diskontierte – Nutzen. In diesem Zusammenhang ergeben sich bereits folgende Möglichkeiten bzw. Fragen:

- Es wird eine einzige Nutzenfunktion $u_0(x_p)$ festgelegt, die für sämtliche Perioden angewendet wird. Die Höhenpräferenz des Akteurs bleibt also während der gesamten Zeit konstant und entspricht den heutigen Präferenzen.
- Es wird für jede Periode eine eigene Nutzenfunktion $u_p(x_p)$ verwendet. Damit kann berücksichtigt werden, dass sich die Höhenpräferenz von Akteuren im Zeitverlauf ändert. Das ist z. B. im Fall privater Konsumentscheidungen im Verlauf des Konsumentenlebens nicht unüblich.

Auf dieses Problem und mögliche Lösungen wird im weiteren Verlauf eingegangen. Für die einleitende Darstellung genügt die Feststellung, dass die Höhenpräferenz festgelegt werden muss. Dafür wird die Notation $u(x_p)$ gewählt, die an entsprechender Stelle ausdifferenziert wird. Korrekterweise müsste formuliert werden: $u^H(x_p)$, da es der Nutzen nach Festlegung der **Höhenpräferenz** ist. Auf diese Notation wird jedoch im Folgenden verzichtet.

Im weiteren Verlauf wird eine Nutzenfunktion der Form $u(x_p) = x_p$ unterstellt. Bei den Ergebnissen handelt es sich deshalb um positiv-ökonomische Absolutwerte, wie z. B. Gewinn, Umsatz, Einzahlungen. Das bedeutet nicht, dass der Zahlenwert positiv sein muss, sondern dass die verwendete Rechengröße ökonomisch erstrebenswert ist. Dies ist z. B. bei Auszahlungen oder Kosten nicht der Fall.

---

[619] Vgl. Abschn. 1.4.3.4 auf S. 77.

Ähnlich wie bei multikriteriellen Entscheidungen und bei einstufigen Entscheidungen unter Unsicherheit kann im **zweiten Schritt** die Alternativenmenge auf ineffiziente Alternativen untersucht werden. Dazu wird die **Zeitdominanz** herangezogen (vgl. Def. 1.48).[620]

Definition 1.48 (Zeitdominanz): *Gegeben ist die Menge der Perioden N und die Alternativenmenge A. Eine Aktion $x \in A$ heißt genau dann effizient bezüglich A und N, wenn es keine Aktion $y \in A$ gibt, für welche gilt:*

a) $u(y_p) \geq u(x_p)\ \forall\ p \in N$
sowie
b) $u(y_p) > u(x_p)$ *für mindestens ein* p.

Wenn es eine Aktion y gibt, welche diese beiden Kriterien erfüllt, so dominiert y die Alternative x bzw. es kann formuliert werden: x ist ineffizient. Mit dieser Dominanzform wird die Monotonie der Nutzenfunktion widergespiegelt. Ineffiziente Alternativen können aus der weiteren Analyse ausgeschlossen werden. Der Vollständigkeit halber wird hier ein weiteres Dominanz-Prinzip – die sog. zeitliche Summendominanz – erwähnt (vgl. Def. 1.49).[621]

Definition 1.49 (Zeitliche Summendominanz): *Gegeben ist die endliche Menge zukünftiger Perioden $p \in N$ mit $N = \{1,2,3,...,i,...,n\}$ und die Alternativenmenge A. Eine Aktion $x \in A$ heißt genau dann zeitlich summendominant gegenüber $y \in A$ wenn gilt:*

$$\sum_{p=1}^{i} x_p \geq \sum_{p=1}^{i} y_p \text{ für alle } i \in N \text{ sowie } \sum_{p=1}^{i} x_p > \sum_{p=1}^{i} y_p \text{ für mindestens ein } i \in N.$$

Zur Erläuterung werden die zwei Alternativen in Tab. 1.57 betrachtet. Es wird deutlich, dass Zeitdominanz nach Def. 1.48 nicht gegeben ist. Jedoch dominiert Alternative y die Alternative x gemäß Def. 1.49. Es wird erkennbar, dass die zeitliche Summendominanz stärker ist als die Zeitdominanz in Def. 1.48. Demzufolge impliziert Zeitdominanz die zeitliche Summendominanz nach Def. 1.49, eine Umkehrung der Aussage gilt jedoch nicht.[622]

Ein Vergleich mit Entscheidungen unter Risiko zeigt, dass die zeitliche Summendominanz dem Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung ähnelt.[623] Ebenso wie die Zustandsdominanz die stochastische Dominanz erster Ordnung impliziert, impliziert Zeitdominanz die zeitliche Summendominanz.

[620] Vgl. Bitz (1981: 289); Dyckhoff (1988: 994); Keeney/Raiffa (1993: 479).
[621] Vgl. Mus (1988: 510).
[622] Vgl. Mus (1988: 513).
[623] Vgl. Abschn. 1.5.4.5.2 auf S. 148.

Tab. 1.57: Beispiel für die zeitliche Summendominanz. Quelle: Eigene Darstellung.

Alternative	Zeitpunkte						Funktional: $\sum_{p=1}^{6} e_p$
	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	
x	20	30	40	50	80	50	270
y	45	45	45	45	45	45	270

Prüfung auf zeitliche Summendominanz							
$\sum_{p=1}^{i} x_p$	20	50	90	140	220	270	
$\sum_{p=1}^{i} y_p$	45	90	135	180	225	270	

Wird das Prinzip der zeitlichen Summendominanz vor dem Hintergrund der – noch folgenden umfangreichen – Ausführungen dieses Abschnitts zur Zeitpräferenz betrachtet, so muss festgestellt werden, dass die Problematik der Zeitpräferenz eher ignoriert als abgebildet wird. Offensichtlich ist das Ergebnis aus jeder Periode gleichwertig. Eine – wie auch immer gestaltete – Skalierung oder Gewichtung erfolgt nicht. Darüber hinaus ist es fraglich, warum ein Alternativenvergleich nur auf einen Teil der gesamten Betrachtungsperiode reduziert wird. Anders formuliert: Warum wird der Alternativenvergleich abgebrochen, sobald eine Alternative in der Summe höhere Ergebnisse erzielt, ohne Rücksicht darauf, dass dieses „Teilergebnis“ in den darauffolgenden Jahren noch verändert werden kann. Aus diesen Gründen wird dieses Prinzip nur in seltenen Fällen zu einem ordnungstreuen Präferenzfunktional führen.[624]

Im **dritten Schritt** muss festgelegt werden, wie für die effizienten Alternativen die *„Brutto-Nutzengrößen“* aus den verschiedenen Zeitpunkten transformiert und aggregiert werden. Das bedeutet, die **Zeitpräferenz** muss festgelegt werden.

Für das weitere Vorgehen ist die Annahme eines **kompensatorisches Verfahrens** charakteristisch. Es wird also unterstellt, dass ein geringes Ergebnis in einem Zeitpunkt durch ein besseres Ergebnis zu einem anderen Zeitpunkt kompensiert werden kann. Damit können die verschiedenen Zeitpunkte additiv zu einer Gesamtgröße verknüpft werden. Gleichzeitig wird implizit die Existenz jedes beliebigen Ergebniswertes zu jedem Zeitpunkt zugelassen. Es existieren keine Zeitpunkte bei denen ein vorher definiertes Ergebnisniveau nicht über- oder unterschritten werden darf. Wenn dies der Fall sein sollte, so müsste vorab eine entsprechende Überprüfung der Alternativen erfolgen.

[624] Vgl. Dyckhoff (1988: 999–1000).

Die Ähnlichkeit der Struktur mit multikriteriellen Problemen lässt vermuten, dass ein Präferenzfunktional mit additiver Struktur existiert. Deshalb sind folgende Fragen zu beantworten:[625]

- Welchen intertemporalen Nutzen haben die Ergebnisse (bzw. deren „Brutto-Nutzengrößen“) der unterschiedlichen Zeitpunkte aus heutiger Sicht?
- Können diese Nutzenwerte der verschiedenen Zeitpunkte additiv zu einem Gesamtnutzenwert zusammengefasst werden? Wenn ja, wie?
- Welche Anforderungen müssen die Präferenzen des Akteurs für eine solche Zusammenfassung erfüllen?

1.7.2.2 Grundlagen des additiven intertemporalen Nutzens

Das heutige Standardmodell des diskontierten Nutzens, das auf der exponentiellen Diskontierung beruht, stammt von Samuelson.[626] Aus dem Modell selbst gehen keine Informationen über die verwendeten Annahmen bezüglich der Präferenzen des Akteurs hervor. Die folgenden Erläuterungen zu den – von diesem Modell implizierten – Eigenschaften der Präferenzen basieren auf dem **Additivitäts-Theorem von Debreu** für Nutzenfunktionen.[627]

Um ein Präferenzfunktional zu erstellen, das den Nutzen des Konsums zu mehreren Zeitpunkten erfasst, müssen Indifferenzkurven vorliegen.[628] Damit aus diesen Indifferenzkurven eine Nutzenfunktion abgeleitet werden kann, muss eine Reihe von Anforderungen erfüllt sein. In den Ausführungen zur Existenz von additiven Präferenzen[629] wurden die dafür notwendigen Axiome vorgestellt.[630] Diese werden jetzt auf die vorliegende Situation angepasst.

Grundständig ist die Forderung nach vollständiger, reflexiver und transitiver Ordnung (vgl. Axiom 1.7.1).

[625] Vgl. Abb. 1.1 auf S. 4.

[626] Vgl. Samuelson (1937).

[627] Vgl. Debreu (1960: 21).

[628] Vgl. Abb. 1.32 auf S. 181.

[629] Vgl. Abschn. 1.4.3.2 auf S. 55.

[630] Das folgende Axiomensystem basiert – wie beschrieben – vom Grundsatz auf Debreu (1960) und von der Darstellung auf French (1988: 119–135) sowie Fishburn/Edwards (1997). Es wurde ausgewählt, da es mit den bisherigen Darstellungen am besten harmoniert. Weitere Axiomensysteme präsentieren u. a. Fishburn/Rubinstein (1982); Bleichrodt/Rohde/Wakker (2008); Anchugina (2017).

Anforderung 1.7.1 (Ordnung): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf P^n ist:*

- *vollständig, wenn für jedes Paar an Ergebnissen $x, y \in P^n$ mit $x \neq y$ festgelegt wird: entweder $x \succsim y$ oder $y \succsim x$ oder beides,*
- *reflexiv, wenn gilt: $x \succsim x$ für jedes $x \in P^n$,*
- *transitiv, wenn aus $x \succsim y$ und $y \succsim z$ für jede Kombination $x, y, z \in P^n$ mit $x \neq y$, $x \neq z$ und $y \neq z$ folgt: $x \succsim z$.*

Die nächste Anforderung postuliert Stetigkeit (vgl. Anf. 1.7.2). Diese Eigenschaft ist ebenfalls aus den grundlegenden Anforderungen bekannt.[631]

Anforderung 1.7.2 (Stetigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf P^n ist stetig, wenn für jedes beliebige $x \succ y \succ z$ ein $\lambda \in]0,1[$ existiert, so dass gilt: $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot z \sim y$.*

In den Ausführungen zur additiven Repräsentation von Präferenzen wurde darauf hingewiesen, dass weiterhin folgende Restriktionen zur additiven Zusammenfassung erforderlich sind:[632]

- Wesentlichkeit,[633]
- begrenzte Lösbarkeit[634] sowie
- wechselseitige Unabhängigkeit.[635]

Diese sind auch im vorliegenden Kontext relevant und werden kurz diskutiert. Wesentlichkeit (vgl. Anf. 1.7.3) fordert, dass sich die Ergebnisse der betrachteten Alternativen in mindestens einem Zeitpunkt voneinander unterscheiden müssen.[636]

Anforderung 1.7.3 (Wesentlichkeit): *Die Zeitpunkte sind wesentlich für die Präferenzordnung auf P^n, wenn für jedes $p \in N$ Ergebnisse $x_p, y_p \in P_p$ sowie $z \in P_{N \setminus \{p\}}$ existieren, so dass gilt: $(x_p, z) \succ (y_p, z)$.*

Es dürfen nur Zeitpunkte enthalten sein, die für die Präferenzordnung wesentlich sind. Das bedeutet, dass kein Zustand mit identischen Ergebniswerten für sämtliche Alternativen existiert. Diese Bedingung sollte sichergestellt werden, da ansonsten u. U. keine stetige Repräsentation möglich ist.[637] Wie auch im Fall multikriterieller Entscheidungen ist die folgende Axiomatik für

[631] Vgl. Anf. 1.3.4 auf S. 32 sowie French (1988: 106). In Def. 1.7.2 wird mit Ergebnisvektoren formuliert, so dass wie eingangs beschrieben gilt: $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ usw.

[632] Vgl. Krantz et al. (1971: 303–305); French (1988: 120); Fishburn/Edwards (1997: 147).

[633] Vgl. Anf. 1.4.1 auf S. 57.

[634] Vgl. Anf. 1.4.2 auf S. 58.

[635] Vgl. Anf. 1.4.4 auf S. 61.

[636] Vgl. Fishburn/Edwards (1997: 147).

[637] Vgl. Roberts (1985: 229).

Entscheidungssituationen mit **mindestens drei wesentlichen Perioden** ausgerichtet.[638]

Die Bedingung der **begrenzten Lösbarkeit**[639] sichert die Existenz von Indifferenzkurven und ist primär eine Anforderung an die Alternativenmenge, als an die Präferenzen. Dazu werden zwei Zeitpunkte $i, j \in N$ betrachtet. Die Alternativenmenge A muss so dicht sein, dass die Bildung von indifferenten Wertepaaren – und somit die Konstruktion von Indifferenzkurven – in jedem Punkt möglich ist. Das wird in der Anf. 1.7.4 beschrieben.[640]

Anforderung 1.7.4 (Begrenzte Lösbarkeit): *Die Relation $\succsim$ auf P^n erfüllt die Bedingung der begrenzten Lösbarkeit, wenn für alle $\overline{x_i}, x_i, \underline{x_i} \in P_i$ und $x_j^1, x_j^2 \in P_j$ mit: $(\overline{x_i}, x_j^1) \succsim (x_i, x_j^2) \succsim (\underline{x_i}, x_j^1)$ ein $x_i^* \in P_i$ existiert, so dass gilt: $(x_i^*, x_j^1) \sim (x_i, x_j^2)$.*

Die Frage ist nun, ob diese Eigenschaft für die vorliegende Konstellation intertemporaler Entscheidungen auf Basis von finanziellen Ergebnissen in jedem Fall erfüllt ist. Bei den Ergebnissen handelt es sich um finanzielle Größen, die jede Ausprägung annehmen können. Probleme, welche in diesem Zusammenhang mit der Ausprägung von qualitativen Teilzielen (z. B. Farbe, Haptik, Gestalt) bei multikriteriellen Entscheidungen auftreten können,[641] dürften in dem hier relevanten Kontext seltener vorkommen. Jedoch muss nicht zwingend in jeder Menge A eine Alternative existieren, die genau die in der Anf. 1.7.4 beschriebenen Eigenschaften aufweist. Deshalb wird diese Bedingung explizit erwähnt.

Mit diesen beiden Voraussetzungen ist die Existenz von Indifferenzkurven für jedes Paar von Zeitpunkten und für jede Ausprägungsmöglichkeit der Ergebnisse zu diesen Zeitpunkten sichergestellt. Im nächsten Schritt ist sicherzustellen, dass der Akteur seine Präferenz zwischen zwei Zeitpunkten unabhängig von der Ausprägung anderer Zeitpunkte ausdrücken kann.[642] Dies ist als Unabhängigkeit der Präferenzen bereits aus den Darstellungen zum additiven Präferenzfunktional bei multikriteriellen Entscheidungen bekannt.[643]

Im Zusammenhang mit der Bewertung von Ereignissen zu unterschiedlichen Zeitpunkten muss sichergestellt sein, dass die Präferenz ausschließlich aufgrund der Ausprägung der Werte zwischen zwei betrachteten Zeitpunkten beurteilt wird, ohne dass die Ausprägung von Ergebnissen zu anderen Zeit-

[638] Liegen lediglich zwei wesentliche Zeitpunkte vor, ist die Eigenschaft der wechselseitigen Unabhängigkeit im Axiom 1.7.5 auf S. 195 durch die THOMSON-Bedingung zu ersetzen. Vgl. Krantz et al. (1971: 256); French (1988: 116); Nitzsch (1992: 50–52).

[639] Zur Eigenschaft der Lösbarkeit vgl. Anf. 1.3.11 auf S. 39.

[640] Vgl. Anf. 1.4.2 auf S. 58 sowie Krantz et al. (1971: 256); French (1988: 114); Pomerol/Barba-Romero (2000: 154); Takemura (2019: 161).

[641] Vgl. Fortführung des Beispiels 1.4 auf S. 56.

[642] Vgl. Gäfgen (1974: 321–322).

[643] Vgl. Anforderung 1.4.3 auf S. 60.

punkten eine Rolle spielt. Darauf wurde schon frühzeitig hingewiesen.[644] Die Präferenzen für verschiedene Zeitpunkte müssen voneinander unabhängig, also separierbar sein.[645] Zur Veranschaulichung dient Beispiel 1.19.

Beispiel 1.19:

Es wird die Wahl des Hauptgerichtes betrachtet. Ein Akteur soll heute den Speiseplan für die gesamte nächste Woche zusammenstellen und kann dafür als Hauptgericht zwischen Pizza, Steak oder Fisch wählen. Unabhängigkeit bzw. Separierbarkeit würde von einem Akteur, der Pizza lieber mag als Steak, fordern, dass er die gesamte Woche lang Pizza präferiert. Dies wird jedoch kaum der Fall sein.

Die Unabhängigkeit der Präferenz für die Zeitpunkte wird bei Alltagsentscheidungen i. d. R. nicht erfüllt sein.[646] Die Präferenzen sind im Beispiel 1.19 also nicht separierbar, was daran liegen dürfte, dass die Zeitpunkte nicht "weit genug voneinander entfernt" sind.[647]

Diese Unabhängigkeit wird auch als **Konsumunabhängigkeit**[648] bezeichnet.[649] Die Unabhängigkeit kann auf sämtliche Zeitpunkte ausgeweitet werden, was erforderlich ist, um das Präferenzfunktional additiv zu gestalten.[650] Dies wird – wie bereits erwähnt und dargestellt – als wechselseitige Unabhängigkeit bezeichnet (vgl. Anf. 1.7.5).[651]

Anforderung 1.7.5 (Wechselseitige Unabhängigkeit): *Die Relation* $\succsim$ *auf* P^n *ist wechselseitig unabhängig, wenn für jedes* $S \subseteq P^n$ *und* $R = P^n \backslash S$ *für alle* $x_R, y_R \in P_R$ *und für alle* $z, w \in P_S$ *gilt:*

$$(x_R, z) \succsim (y_R, z) \Leftrightarrow (x_R, w) \succsim (y_R, w).$$

Die mit Axiom 1.7.5 geforderte Unabhängigkeit ist sehr stark, da sie für sämtliche Teilmengen aus N gilt. So ist beispielsweise die Relation $\succsim$ wechselseitig

---

644 *„...we have to suppose...that enjoyments and sacrifices at different times can be calculated independently and added;...".* Ramsey (1928: 543).

645 Vgl. Barro/King (1984: 818–821); Fishburn/Edwards (1997: 147); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 534–535).

646 Vgl. Fishburn (1968: 351); Fishburn (1979: 42–43). *„The amount of wine I drank yesterday and will drink tomorrow can be expected to have effects upon my today's indifference slope between wine and milk. For this reason neither Wold nor I would care to treat the preference over time as if it could be written as a sum of independent daily utilities."* Samuelson (1952: 674).

647 Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.

648 Vgl. Frederick/Loewenstein/O'Donoghue (2002: 357).

649 Vgl. Ferejohn/Page (1978: 272); Bleichrodt et al. (2015: 1425–1426).

650 Vgl. Fishburn/Edwards (1997: 147); Bleichrodt/Rohde/Wakker (2008: 342).

651 Vgl. Ferejohn/Page (1978: 271–272); French (1988: 119); Fishburn/Edwards (1997: 147).

unabhängig auf der Teilmenge Q, wenn jede Teilmenge der Zeitpunkte $S \subseteq Q$ unabhängig von der Komplementärmenge der Zeitpunkte $R = Q \backslash S$ ist.

Zur Erläuterung wird ein Akteur gewählt, der zwischen den folgenden Zahlungsströmen wählen kann: $x = (75{,}75{,}75)$ und $y = (100{,}50{,}75)$. Angenommen, er präferiert einen gleichmäßigen Zahlungsstrom und deshalb gilt $x \succ y$. Bei Erfüllung der wechselseitigen Unabhängigkeit müsste dann für die Zahlungsreihen $z = (75{,}75{,}0)$ und $w = (100{,}50{,}0)$ folgendes gelten: $z \succ w$. Die Präferenz mit Blick auf die ersten beiden Zeitpunkte bleibt identisch, unabhängig davon, ob die Zahlungsströme zu einem anderen Zeitpunkt eine identische Veränderung erfahren.

Die bisherigen Annahmen sichern die Existenz eines ordnungstreuen, kardinalen Präferenzfunktionals, das im Merksatz 1.15 formuliert ist.[652]

Merksatz 1.15: *Wenn in einem Entscheidungsproblem mit mindestens 3 wesentlichen Perioden (Anf. 1.7.3) die Präferenzen des Akteurs die Axiome Ordnung (Anf. 1.7.1), Stetigkeit (Anf. 1.7.2), das Lösbarkeits-Axiom (Anf. 1.7.4) und wechselseitige Unabhängigkeit (Anf. 1.7.5) erfüllen, dann existieren Nutzenfunktionen $u_1,...,u_n$ auf $P_1,...,P_n$ mit $u_p : P \to \mathbb{R}$, die die Präferenzrelation $\succsim$ auf P^n mit $n \geq 3$ so repräsentieren, dass gilt:*

$$\sum_{p=1}^{n} u_p(x_p) \geq \sum_{p=1}^{n} u_p(y_p) \Leftrightarrow x \succsim y.$$

Jede andere Funktion v_p mit: $v_p(x_p) = \alpha \cdot u_p(x_p) + \beta$, wobei $\alpha > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.

Im Merksatz 1.15 beschreibt die Nutzenfunktion u_p den Nutzen des Ergebnisses der Alternative in dieser Periode. Für jede Periode existiert eine solche Nutzenfunktion. Demzufolge werden $p = 1,...,n$ Nutzenfunktionen – für jede Periode p eine Nutzenfunktion u_p – additiv zusammengefasst. Merksatz 1.15 ist dem entsprechenden Merksatz bei multikriteriellen Entscheidungen sehr ähnlich.[653] Im Fall multikriterieller Entscheidungen waren dies die Nutzenfunktionen für die Teilziele. Damit ist das Kernproblem der intertemporalen Bewertung jedoch nicht gelöst.

1.7.2.3 Berücksichtigung der Zeit

Im hier vorliegenden Fall stellt sich jedoch die Frage, wie die Nutzenfunktionen der verschiedenen Perioden aggregiert werden können. Dazu wird folgendes Vorgehen gewählt:

[652] Vgl. Fishburn (1979: 89); Fishburn/Edwards (1997: 148).

[653] Vgl. Merksatz 1.6 auf S. 63.

- In einem **ersten Schritt** wird angenommen, es existiert eine **einheitliche Nutzenfunktion** $u_0(x_p)$. Damit wird die heutige **Höhenpräferenz** für die gesamte Planungszeit quasi „eingefroren". Diese Nutzenfunktion wird zur „Einheitsnutzenfunktion" für sämtliche Perioden definiert.
- Um zeitliche Unterschiede abzubilden, werden die Werte dieser Einheitsnutzenfunktion im **zweiten Schritt** für jede Periode durch den Faktor $g_p > 0$ gewichtet. Damit kann das Präferenzfunktional für jede Alternative wie folgt formuliert werden: $\sum_{p=1}^{n} g_p \cdot u_0(x_p)$.
- Diese Vorgehensweise erfordert jedoch eine zusätzliche Anforderung an die Präferenzen des Akteurs. Diese Anforderung – die **Stationarität** – wird im **dritten Schritt** erläutert.[654]

Zum besseren Verständnis sind einige Unterscheidungen und zusätzliche Definitionen erforderlich. In den bisherigen Darstellungen wurde implizit davon ausgegangen, dass die Präferenzrelation vom Akteur in der Gegenwart festgelegt wird. Dies ist bei Planungsmodellen allgemein üblich und besagt, dass der Entscheidungsträger zum Entscheidungszeitpunkt - also vor Realisierung der besten Alternative - seine Präferenzen festlegt. Im Zusammenhang mit intertemporalen Problemstellungen muss jedoch die Entwicklung bzw. Veränderlichkeit von Präferenzen im Zeitablauf berücksichtigt werden. Dazu sind – in Erweiterung und Wiederholung der bisherigen Notation – folgende Erläuterungen angebracht:

- **Bisherige und weiter verwendete Notation:**
  - Es existiert eine endliche Menge, bekannter Perioden $N = \{1,2,3,...,n\}$ mit $p \in N$.
  - Die Menge A ist durch die drei Alternativen $A = \{x,y,z\}$ definiert. Jede Alternative wird durch einen Ergebnisvektor beschrieben, so z. B. $x = (x_1, x_2, x_3,...,x_n)$, wobei x_p das Ergebnis der Periode p beschreibt.
  - Die Menge P_p mit $p \in N$ beschreibt die bekannten Ergebnisse, die in der Periode p mit Sicherheit aus den verschiedenen Alternativen resultieren. Für $p = 1$ folgt z. B.: $P_1 = \{x_1,y_1,z_1\}$. P_1 bezeichnet die Menge der Ergebnisse der Alternativen in der Periode 1, P_2 ist die Menge der Ergebnisse der Alternativen der Periode 2 usw.
  - Die Präferenzrelation $\succsim$ liegt demzufolge auf dem kartesischen Produkt $P^n = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n = \prod_{p=1}^{n} P_p$.
  - Die Entscheidungssituation ist folgende: Der Akteur muss wählen zwischen Ergebnis $x \geq 0$, das in der Periode $p = 1$ (x_1) anfällt und dem

[654] Aus aus didaktischen Gründen wird hier dieser der Weg gewählt. Für eine alternative Darstellung unter Verwendung anderer Axiome wird auf die Literatur verwiesen. Vgl. Fishburn (1979: 90–93); Fishburn/Edwards (1997: 150–153); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 345–346).

Ergebnis $y \geq 0$, welches er in Periode $p = 2$ erhält (y_2). Die klassische Frage lautet: Bevorzugen Sie 100,-€ in $p = 1$ oder 110,-€ in $p = 2$?

- **Neue, ergänzende Notation:**
  - Die Festlegung der Präferenzen des Akteurs und damit die Entscheidung für eine der Alternativen wird zu verschiedenen Zeitpunkten $T = \{0,1,2,3,...,\infty\}$ mit $t \in T$ möglich. Der Zeitpunkt $t = 0$ stellt die Gegenwart dar.
  - Die zum Zeitpunkt t geäußerte Präferenzrelation erhält die Notation $\succsim_t$. Wird die Präferenz in der Gegenwart abgefragt, folgt: $\succsim_0$.
  - Unabhängig vom **relativen** zeitlichen Abstand zwischen zwei Ergebnissen kann der **absolute** Abstand dieser Ergebnisse zum heutigen Zeitpunkt verändert werden. Dazu werden die Ergebnisse gemeinsam um denselben Zeitraum Δt in die Zukunft verlagert, wobei $\Delta t > 0$. Dies wird notiert mit: $x_{1+\Delta t}$, $x_{2+\Delta t}$ usw. Die Größe von Δt spielt dabei keine Rolle. Wichtig hingegen ist, dass der Zeitraum des Eintritts für beide Ereignisse um denselben positiven Wert verschoben wird.
  - Weiterhin ist es denkbar, dass auch der Zeitpunkt für die Äußerung der Präferenzen und damit für die Entscheidung in die Zukunft verschoben wird. Legt der Akteur in $t = 0$ seine Präferenzordnung fest, gilt: $\succsim_0$, für einen späteren Zeitpunkt gilt: $\succsim_{0+\Delta t}$ mit $\Delta t > 0$.
  - Wichtig für die weiteren Betrachtungen ist die Annahme, dass sich die Ergebnisse im Zeitablauf nicht ändern. Die zum Entscheidungszeitpunkt vorliegende Ergebnismenge ist identisch mit der Ergebnismenge, die zu jedem späteren Zeitpunkt betrachtet wird.
  - Wenn Präferenzen vorliegen, die im Zeitablauf mehrfach geäußert bzw. abgefragt werden, so folgt die Präferenzordnung: $\{\succsim\}_0^\infty$.

Es werden folgende drei wichtige Eigenschaften von intertemporalen Präferenzrelationen beschrieben:

- Stationarität,
- Zeitkonsistenz sowie
- Zeitinvarianz.

Die Stationarität wird in der Def. 1.50 beschrieben.[655]

Definition 1.50 (Stationarität): *Die Präferenzrelation $\succsim_0$ auf P^n ist stationär, wenn gilt: $x_p \succsim_0 y_{p+1} \Leftrightarrow x_{p+\Delta t} \succsim_0 y_{p+1+\Delta t}$ für alle $x, y \in P^n$, alle $p \in N$, alle $t \in T$ sowie $\Delta t > 0$.*

Die Entscheidung in $t = 0$ über die beiden Alternativen darf nur von der Höhe der Zahlungen x und y sowie von der relativen Zeitdistanz zwischen diesen Zahlungen abhängen. Hingegen darf die Entfernung dieser Zeitdistanz

[655] Vgl. Halevy (2015: 341); Millner/Heal (2018: 160).

vom heutigen Entscheidungspunkt keine Rolle bei der Entscheidung spielen. Beispiel 1.20 erläutert die Grundidee dieser Eigenschaft.

Beispiel 1.20:

Es werden vier Alternativen in Tabelle 1.58 betrachtet.

Tab. 1.58: Stationarität von Präferenzen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Koopmans/Diamond/Williamson (1964: 85).

Periode / Alternative	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	···
A	x_1	x_2	x_3	x_4	···
B	x_1	y_2	y_3	y_4	···
C	x_2	x_3	x_4	···	···
D	y_2	y_3	y_4	···	···

Der Zeitpunkt der Entscheidung liegt in $t = 0$, weshalb gilt $\succsim_0$. Stationarität fordert in diesem Fall: A wird gegenüber B schwach präferiert, wenn C ebenfalls gegenüber D schwach vorgezogen wird. Es gilt: $A \succsim_0 B \Leftrightarrow C \succsim_0 D$. Damit wird gefordert, dass jede Frage nach einer Änderung der Präferenzen in der Zukunft für die heute zu treffende Entscheidung irrelevant sein soll.

Koopmans als Begründer dieser Eigenschaft fordert damit, dass diejenigen Zeitpunkte von Zahlungsströmen irrelevant für die Präferenzordnung sind, die jeweils identische Ausprägungen aufweisen.[656] Beispiel 1.20 zeigt eindrücklich die Intention und die Interpretation der Stationarität.[657] Es wird die Eigenschaft einer einstufigen Entscheidung – die auf der Basis der heute verfügbaren Informationen getroffen wird – beschrieben. Damit wird also **nicht** beschrieben, dass die Präferenzen über den betrachteten Zeitraum unveränderlich sind oder sein müssen. Es wird lediglich gefordert, dass der Akteur **im Entscheidungszeitpunkt**, also in $t = 0$, die Präferenzen über zukünftige Entscheidungen in dem Sinne ordnet, dass es unerheblich ist, wie weit die Ereignisse in der Zukunft liegen. Jedoch wird in der weiteren Darstellung deutlich,[658] dass trotzdem zeitkonsistente Präferenzen impliziert werden. Das Beispiel 1.21 erläutert die Eigenschaft.[659]

[656] Vgl. Koopmans (1960: 293–294).

[657] „This does *not* imply that, after one period has elapsed, the ordering then applicable to the "then" future will necessarily be the same as that now applicable to the "present" future. [...] Any question of change or constancy of preferences as the time of choice changes is therefore extraneous for the present study. Postulates [...] express merely an invariance of the *present* ordering under postponement of entire programs....“ Koopmans/Diamond/Williamson (1964: 85–86). Hervorh. im Original. Ähnlich in Koopmans (1972b: 83–84).

[658] Vgl. Merksatz 1.16 auf S. 203.

[659] Vgl. Thaler (1981: 202); Loewenstein/Prelec (1992: 574–575); Keren/Roelofsma (1995: 288).

Beispiel 1.21:

Ein Akteur wird gebeten, sich die zwei folgenden Entscheidungsprobleme zu betrachten und für jedes Problem jeweils eine Präferenzordnung festzulegen.

Problem 1:	*Alternative A:*	*Erhalt von 150 € heute*
	oder	
	Alternative B:	*Erhalt von 200 € in 9 Monaten*
Problem 2:	*Alternative C:*	*Erhalt von 150 € in 10 Jahren*
	oder	
	Alternative D:	*Erhalt von 200 € in 10 Jahren und 9 Monaten*

Wenn die Präferenzen des Akteurs stationär sind und für ihn im ersten Problem gilt $A \succ_0 B$, so muss für das zweite Problem gelten: $C \succ_0 D$.

Für die Entscheidung soll ausschließlich die Zeitdifferenz zwischen den Ergebnissen relevant sein. Die Stationarität ist kritisch hinterfragt worden, worauf an geeigneter Stelle detailliert eingegangen wird.[660]

Die nächste Eigenschaft von Präferenzen ist **Zeitkonsistenz** (vgl. Def. 1.51).[661] Die Beziehung zwischen den Präferenzen zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist konsistent, wenn eine ursprünglich (also in $t = 0$) als optimal identifizierte Alternative auch später (also in $t = 0 + \Delta t$) weiterhin optimal bleibt.

Definition 1.51 (Zeitkonsistenz): *Die Präferenzrelation $\{\succsim\}_0^\infty$ auf P^n ist zeitkonsistent, wenn gilt: $x_p \succsim_0 y_{p+1} \Leftrightarrow x_p \succsim_{0+\Delta t} y_{p+1}$ für alle $x, y \in P^n$, alle $p \in N$, alle $t \in T$ sowie $\Delta t > 0$.*

Eine Änderung des Betrachtungszeitpunktes von $t = 0$ zu $t = 0 + \Delta t$ führt zu keiner Änderung der Präferenzordnung. Es existiert also kein ex-post-Bedauern über getroffene Entscheidungen. Ebenso wenig werden einmal festgelegte – möglicherweise jedoch unangenehme – Aktivitäten aufgeschoben, wenn der ursprünglich dafür geplante Zeitpunkt eintritt. Wenn der Akteur heute festlegt, dass morgen Aufräumen besser ist als Nicht-Aufräumen, so muss diese Reihung auch Bestand haben, wenn der morgige Tag gekommen ist. Ein Aufschieben unangenehmer Tätigkeiten (auch als *„Prokrastination“* bzw. umgangssprachlich als *„Aufschieberitis“* bezeichnet) existiert bei zeitkonsistenten Präferenzen demnach nicht.[662] Das impliziert jedoch, dass sich die Rahmenbedingungen (Zeitpunkte, Ergebnisse in den Zeitpunkten, Informationen) und die Alternativen (Alternativen selbst sowie Alternativenmen-

[660] Vgl. Abschn. 2.3.4 auf S. 333.

[661] Vgl. Halevy (2015: 341); Millner/Heal (2018: 160). Fishburn bezeichnet diese Eigenschaft als Persistenz. Vgl. Fishburn (1979: 90); Fishburn/Edwards (1997: 150).

[662] Das Aufschieben unangenehmer Aktivitäten wird auch als *„mañana-Effekt“* bezeichnet. Vgl. Strotz (1955/56: 173).

ge) in der Zwischenzeit nicht verändern dürfen. Das Beispiel 1.22 erläutert die Eigenschaft der Zeitkonsistenz.[663]

Beispiel 1.22:

Ein Akteur kann sich zwischen Pizza (P) und Salat (S) entscheiden und legt in $t = 0$ für die nächsten vier Mahlzeiten folgende Präferenzrelationen fest:

$$(P_1,P_2,P_3,P_4) \succ_0 (P_1,P_2,P_3,S_4) \succ_0 (P_1,P_2,S_3,S_4).$$

Nun wird angenommen, dass zwei Mahlzeiten vorüber sind, was bedeutet, dass der Akteur zwei Mal Pizza aß. Er befindet sich also am Ende von Periode $p = 2$. Zeitkonsistenz verlangt nun vom Akteur, für die dritte Mahlzeit in $p = 3$ – selbst nach Genuss von zwei Mal Pizza – wiederum Pizza anstatt Salat zu wählen. Es muss also gelten:

$$(P_3,P_4) \succ_2 (P_3,S_4) \succ_2 (S_3,S_4).$$

Interessanterweise liefert Strotz in seinem – mittlerweile als Klassiker zu bezeichnenden – Aufsatz auch einen Lösungsvorschlag zur Erreichung von zeitkonsistenten Präferenzen. Dieser wird an anderer Stelle erläutert.[664] Die Zeitkonsistenz wird auch als **dynamische Konsistenz** bezeichnet, da die Präferenzen zu unterschiedlichen Zeitpunkten abgefragt werden.[665] Der wesentliche Unterschied zwischen Zeitkonsistenz und wechselseitiger Unabhängigkeit[666] ist folgender: Die Unabhängigkeit der Präferenzen wird zu einem Zeitpunkt (i. d. R. $t = 0$) beurteilt. Bei der Zeitkonsistenz hingegen werden die Präferenzen aus zwei unterschiedlichen Zeitpunkten miteinander verglichen.

Unabhängigkeit verlangt, dass die Entscheidung in einem Zeitpunkt ohne Berücksichtigung der Entscheidung in einem anderen Zeitpunkt erfolgt. Das ist im obigen Beispiel 1.22 nicht der Fall, da die Zeitpunkte direkt nebeneinander liegen bzw. die Mahlzeiten direkt aufeinander folgen. Die Entscheidungen beeinflussen sich aufgrund der zeitlichen Nähe. Aber auch wenn die Präferenzen nicht unabhängig sind, können sie zeitkonsistent sein. Das hat Beispiel 1.22 verdeutlicht. Zeitkonsistenz erfordert die Beibehaltung der Präferenzen auch bei Berücksichtigung bzw. trotz der in der Zwischenzeit – also während Δt – gemachten Erfahrungen des Akteurs.

Unabhängigkeit der Präferenzen bezieht sich auf die Entscheidung für die gesamte Planungsperiode im Zeitpunkt $t = 0$, so wie im Beispiel 1.19 auf S. 195. Zeitkonsistenz hingegen bezieht sich auf den Vergleich der Präferenzen der in $t = 0$ zu treffenden Entscheidung und der in der Zukunft $t = 0 + \Delta t$ zu treffenden Entscheidung, wie im Beispiel 1.22. Wenn der Akteur heute festlegt,

---

663 Vgl. Machina (1989: 1646).

664 Vgl. Abschn. 2.3.4 auf S. 333.

665 Vgl. Machina (1989: 1646).

666 Vgl. Axiom 1.7.5 auf S. 195.

nächsten Montagabend Pizza gegenüber allen anderen Gerichten vorzuziehen, so muss er diese Präferenz auch beibehalten, wenn er an dem besagten Montagabend die Wahl tatsächlich treffen muss.

Interessanterweise impliziert die Stationarität die Zeitkonsistenz,[667] was durch die Verbindung mit der Zeitinvarianz erfolgt. Die **Zeitinvarianz** verknüpft die unterschiedlichen Betrachtungspunkte $t = 0$ und $t = 0 + \Delta t$. Jedoch werden wie im Fall der Stationarität auch die Ereignisse selbst verschoben. Die Präferenzen bleiben trotzdem bestehen, sie sind historisch unabhängig bzw. sie sind keine Funktion der Kalenderzeit (vgl. Def. 1.52).[668]

Definition 1.52 (Zeitinvarianz): *Die Präferenzrelation* $\{\succsim\}_0^\infty$ *auf* P^n *ist zeitinvariant, wenn gilt:* $x_p \succsim_0 y_{p+1} \Leftrightarrow x_{p+\Delta t} \succsim_{0+\Delta t} y_{p+1+\Delta t}$ *für alle* $x, y \in P^n$, *alle* $p \in N$, *alle* $t \in T$ *sowie* $\Delta t > 0$.

Bei Zeitinvarianz werden sowohl der Beurteilungszeitpunkt, als auch die Ergebnisse selbst in die Zukunft verschoben. Das Beispiel 1.23 verdeutlicht die Unterschiede zwischen den drei erläuterten Eigenschaften.

Beispiel 1.23:

Eine Studierende soll am Sonntagabend ihre Präferenzen für das Aufstehen am Montag festlegen. Es wird angenommen, sie präferiert an diesem Abend für den direkt folgenden Montag frühes Aufstehen gegenüber Ausschlafen. Ihre Zeitpräferenz ist:

- *stationär, wenn sie bei der Entscheidung am Sonntagabend das Frühaufstehen auch für jeden anderen Tag der Woche bevorzugen würde,*
- *zeitkonsistent, wenn sie diese Präferenz auch noch am Montagmorgen hätte und demzufolge aufstehen würde,*
- *zeitinvariant, wenn sie am nächsten Sonntagabend dieselbe Entscheidung erneut für den dann folgenden Montagmorgen treffen würde.*

Vielleicht wird an dem Beispiel 1.23 verständlich, warum Stationarität die Zeitkonsistenz impliziert. Bei der Stationarität wird der Betrachtungs- bzw. Entscheidungspunkt fixiert und es wird der Zeitpunkt der Ereignisse variiert. Im Fall der Zeitkonsistenz hingegen wird der Zeitpunkt des Eintritts der Ereignisse fixiert und der Betrachtungszeitpunkt wird variiert. In beiden Fällen wird der relative Abstand zwischen Entscheidungs- und Eintrittszeitpunkt verändert. Die Präferenzrelation sollte trotzdem unverändert bleiben. Auf die Intention dieser Forderung (z. B. Vermeidung von *„Geldpumpen“* durch zyklische Präferenzen) und die damit verbundenen Schwierigkeiten im praktischen Entscheidungsverhalten wurde bereits eingegangen.[669]

---

[667] Es ist deshalb nicht erstaunlich, dass dieses Axiom auch unter der Bezeichnung *„zeitliche Konsistenz“* zu finden ist. Vgl. Williams/Nassar (1966: 853).

[668] Vgl. Halevy (2015: 341); Millner/Heal (2018: 160).

[669] Vgl. Abschn. 1.3.3 auf S. 40.

Zwischen den drei Eigenschaften besteht eine Beziehung, wie sie im Merksatz 1.16 beschrieben ist.[670]

Merksatz 1.16: *Jeweils zwei der drei Eigenschaften Stationarität, Zeitkonsistenz und Zeitinvarianz implizieren die dritte Eigenschaft.*

So führt z. B. die Verbindung von Zeitkonsistenz und Zeitvarianz zur Stationarität. Es gilt: $Zeitkonsistenz \wedge Zeitinvarianz \Rightarrow Stationarität$. Diese Relation wird im weiteren Verlauf wieder aufgegriffen.

Die Frage ist nun, welche dieser Eigenschaften erforderlich ist, um den Nutzen additiv bei Verwendung einer einzigen Nutzenfunktion zusammenfassen zu können. Es wurde frühzeitig gezeigt, dass lediglich exponentielles Diskontieren zu zeitkonsistenten Entscheidungen führt.[671] Koopmans schuf später das Axiomensystem, welches diese Form der Diskontierung ermöglicht und das die Stationarität der Präferenzen voraussetzt.[672] Für die weitere Darstellung wird die Stationarität im Axiom 1.7.6 beschrieben.[673]

Anforderung 1.7.6 (Stationarität): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf P^n ist stationär, wenn es ein $e \in P$ gibt, so dass gilt:*

$$(x_1,...,x_{n-1},e) \succ (y_1,...,y_{n-1},e) \Leftrightarrow (e,x_1,...,x_{n-1}) \succ (e,y_1,...,y_{n-1}).$$

Wie im Merksatz 1.16 erläutert, impliziert die Stationarität die Zeitkonsistenz.[674] Damit wird die Besonderheit der intertemporalen Entscheidung erfasst. Sämtliche anderen Axiome finden sich auch bei multikriteriellen Entscheidungen.[675] Für intertemporale Entscheidungen muss **zusätzlich** noch die Konstanz der Präferenzen gegenüber zeitlichen Veränderungen – hier als Stationarität bezeichnet – sichergestellt werden.

Wenn der Akteur heute seine Zeitpräferenz festlegt und durch die von ihm so definierte Zeit reisen könnte, so dürften sich die Präferenz nicht ändern. Weder in Bezug auf die dabei zurückgelegte absolute Zeit, noch in Bezug auf Änderungen der Relation von einzelnen Zeitpunkten zueinander. Die Präferenz wird durch das Stationaritäts-Axiom quasi für die gesamte betrachtete Zeit eingefroren. Das impliziert darüber hinaus die Unabhängigkeit der Zeitpräferenz vom Alter und Geburtsjahr des Akteurs sowie die Unveränderlichkeit der Präferenz im Zeitverlauf. Speziell bei der Untersuchung von Entschei-

[670] Vgl. Halevy (2015: 341–342); Millner/Heal (2018: 162).

[671] Vgl. Strotz (1955/56: 172).

[672] Vgl. Koopmans (1960: 293–294); Koopmans/Diamond/Williamson (1964: 85); Koopmans (1972b: 83).

[673] Vgl. Ferejon/Page (1978: 272); Fishburn (1979: 96); Dyckhoff (1988: 1002); Frederick/Loewenstein/O'Donoghue (2002: 357–358); Halevy (2015: 340); Anchugina (2017: 192).

[674] Vgl. Fishburn/Edwards (1997: 154); Halevy (2015: 342); Webb (2016: 101–103).

[675] Vgl. Merksatz 1.15 auf S. 196.

dungen im Lebensverlauf von Akteuren ist diese Prämisse problematisch.[676] Die Stationarität führt zur **absoluten Zeitkonstanz** von Präferenzen. Dies wird an anderer Stelle erläutert.[677]

Die Stationarität erlaubt die Verwendung der eingangs erwähnten Periodengewichte in spezieller Form. Aufgrund der Stationarität kann definiert werden:[678] $g_p = \delta^{p-1}$, wobei $\delta = \frac{1}{1+r}$. Dieses Gewicht δ^{p-1} wird auch als **Diskontierungsfaktor** bezeichnet. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{p=1}^{n} g_p \cdot u_0(x_p) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} \cdot u_0(x_p) \end{aligned}$$

Dies ist das **exponentielle Diskontierungsmodell**, das von Samuelson vorgeschlagen wurde[679] und am weitesten verbreitet ist. Der Faktor r stellt die Zeitpräferenzrate – im Fall von Finanzanlagen also den Zinssatz – dar und wird auch als **Diskontrate** bezeichnet. Der Wert δ ist für alle Perioden konstant.

Damit kann ein ordnungstreues, kardinales Präferenzfunktional formuliert werden, das zur exponentiellen Diskontierung führt (vgl. Merksatz 1.17).[680]

Merksatz 1.17: *Wenn in einer Entscheidung mit $n \geq 3$ wesentlichen Perioden (Anf. 1.7.3) die Präferenzrelation $\succsim$ auf P^n die Axiome Ordnung (Anf. 1.7.1), Stetigkeit (Anf. 1.7.2), begrenzte Lösbarkeit (Anf. 1.7.4), wechselseitige Unabhängigkeit (Anf. 1.7.5) sowie Stationarität (Anf. 1.7.6) erfüllt, dann existiert eine Nutzenfunktion $u_0 : P \to \mathbb{R}$ und ein $\delta > 0$, so dass gilt:*

$$\sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} u_0(x_p) \geq \sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} u_0(y_p) \Leftrightarrow x \succsim y.$$

Jede andere Funktion v_0 mit: $v_0(x_p) = \alpha \cdot u_0(x_p) + \beta$, wobei $\alpha > 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, bildet ebenfalls die Präferenzrelation ab.

Merksatz 1.17 beinhaltet die weitverbreitete Formulierung des Modells des diskontierten Nutzens und beschreibt den idealtypischen **homo oeconomicus** für intertemporale Entscheidungen. Dieser erfüllt sämtliche – für eine

[676] Vgl. Strulik/Trimborn (2018).

[677] Vgl. Abschn. 2.4.3.3 auf S. 355.

[678] Vgl. Ferejohn/Page (1978: 169); Fishburn (1979: 95–96); French (1988: 135); Bleichrodt/Gafni (1996: 53); Anchugina (2017: 187).

[679] Vgl. Samuelson (1937: 156); Bleichrodt et al. (2015: 1422).

[680] Vgl. Krantz et al. (1971: 304–305); French (1988: 135); Fishburn/Edwards (1997: 154).

exponentielle Diskontierung notwendigen – Anforderungen. Somit ergibt sich die standardmäßige Formulierung des diskontierten Nutzens im Merksatz 1.18.[681]

Merksatz 1.18: *Wenn in einer Entscheidung die Präferenzen des Akteurs die Axiome 1.7.1 bis 1.7.6 erfüllen, ergibt sich für Alternative x der heutige Gesamtnutzen U_0 einer Folge von zukünftigen Ereignissen aus:*

$$U_0(x) = \sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} u_0(x_p)$$

Der Gesamtnutzen aus Merksatz 1.18 stellt das additive Präferenzfunktional bei intertemporalen Entscheidungen dar. Werden die endliche, nicht leere Aktionenmenge $A = \{a_1,...,a_m\}$ mit $i = 1,....,m$ und die Ergebnisse jeder Alternative mit e_i bezeichnet, so kann die Regel für die Wahl der optimalen Alternative bei intertemporalen Entscheidungen formuliert werden (vgl. E.-regel 1.17).

Entscheidungsregel 1.17: *Bei Erfüllung der Anforderungen an rationale intertemporale Präferenzen ist für einen Akteur diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \left[\sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} u_0(e_{i;p}) \right].$$

In der Einführung[682] wurde auf die Gegenwartspräferenz als Standardannahme hingewiesen.[683] Diese Eigenschaft postuliert, dass ein Akteur von zwei Handlungssequenzen diejenige bevorzugt, die ihm zu einem früheren Zeitpunkt ein angenehmes Ergebnis offeriert.[684] Die Ungeduld grenzt den Faktor δ auf den Bereich $0 < \delta \leq 1$ ein und wird in Axiom 1.7.7 beschrieben.[685]

Anforderung 1.7.7 (Ungeduld): *Die Präferenzrelation $\succsim$ auf P^n ist ungeduldig, wenn für alle $p \in N$ gilt:*

$$a \succ b \Rightarrow (x_1,...,x_{t-1}, a, b, x_{t+2},..., x_n) \succ (x_1,...,x_{t-1}, b, a, x_{t+2},..., x_n)$$

sowie

$$a \sim b \Rightarrow (x_1,...,x_{t-1}, a, b, x_{t+2},..., x_n) \sim (x_1,...,x_{t-1}, b, a, x_{t+2},..., x_n).$$

[681] Vgl. Anchugina (2017: 192).
[682] Vgl. Abschn. 1.7.1 auf S. 181.
[683] Vgl. Fisher (1930: 61–70); Krelle (1968: 61).
[684] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 349–350).
[685] Vgl. Fishburn (1979: 90); Fishburn/Rubinstein (1982: 680); Dyckhoff (1988: 1001).

Ungeduld ist **keine notwendige** Eigenschaft für die Diskontierung, sondern dient lediglich der Eingrenzung des Faktors δ.[686] Auch die Einschränkung des Faktors δ auf positive Werte ist nicht zwangsläufig. Negative Zinssätze wurden üblicherweise für einzelne, seltene Fälle bzw. im Rahmen von Gedankenspielen diskutiert, so z. B.:[687]

- Ein Wirtschaftssystem, in dem verderbliche Güter als Zahlungsmittel fungieren.
- Kostenpflichtige Aufbewahrung von Bargeld in Krisen- bzw. Kriegszeiten.

Deshalb galt ein negativer Zinssatz für lange Zeit als ausschließlich theoretisch möglich. Jedoch waren in den letzten Jahren im realen Inter-Banken-Handel negative Zinssätze zu beobachten.[688]

Ein Wert von $\delta > 1$ würde bedeuten, dass die Zukunft mehr wert ist, als die Gegenwart. Selbstverständlich muss nicht jeder Akteur so denken bzw. handeln, sondern kann auch eine Sequenz wählen, in welcher er zuerst das unangenehme und anschließend das angenehme Ergebnis erhält. Sozusagen, um sich das Beste für den Schluss aufzuheben. Dies ist eine rein subjektive, normative Festlegung. Es wird an diesem Axiom sehr schön deutlich, welche impliziten Annahmen über die subjektiven Präferenzen bei der Diskontierung verwendet werden.

Stationarität und Ungeduld sind unabhängig voneinander. Stationarität nach Anf. 1.7.6 kann sowohl mit der Ungeduld nach Eigenschaft 1.7.7 als auch mit der gegenteiligen Eigenschaft kombiniert werden.[689]

Abschließend wird noch kurz auf die Übereinstimmung der Axiomatiken von Dyckhoff und Milnor eingegangen.[690] Wichtig erscheint der nochmalige Hinweis darauf, dass die Axiomatik von Dyckhoff für intertemporale Entscheidungen unter Sicherheit konzipiert ist, wohingegen die Axiome von Milnor für Ungewißheits-Situationen gedacht sind. Trotzdem können folgende Ähnlichkeiten und Unterschiede festgestellt werden:[691]

- **Stetigkeit:** Dyckhoff beginnt seine Axiomatik mit der Stetigkeitsforderung. Diese hat im Milnor'schen System ihre Entsprechung mit dem Stetigkeits-Axiom.[692]
- **Unbeschränkter Definitionsbereich:** Im zweiten Schritt fordert Dyckhoff die Abbildung möglichst sämtlicher Ergebnisausprägungen. Dies

[686] Vgl. Fishburn/Edwards (1997: 153); Bleichrodt et al. (2015: 1422).
[687] Vgl. Fisher (1930: 41 und 218).
[688] Vgl. Ortmann (2017: 2).
[689] Vgl. Fishburn/Rubinstein (1982: 682).
[690] Vgl. die Darstellung des Axiomensystems von Milnor im Abschnitt 1.6.2 auf S. 164.
[691] Vgl. Milnor (1954: 51); Dyckhoff (1988: 994–995). Die gewählte Reihenfolge ist an der Axiomatik von Dyckhoff ausgerichtet.
[692] Vgl. Axiom 1.6.4 auf S. 165.

wird in der Axiomatik von Milnor nicht explizit erwähnt. Jedoch ist dort einerseits der Hinweis auf eine vollständige und transitive Präferenzordnung enthalten. Andererseits geht Milnor explizit von Nutzengrößen aus.

- **Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen:** Dieses dritte Axiom von Dyckhoff entspricht dem Allgemeinen Zeilen-Hinzufügungs-Axiom bei Milnor.[693]
- **Ergebnisdominanz:** Damit fordert Dyckhoff in Anlehnung an die Zustandsdominanz[694] die Zeitdominanz[695] und sichert die Monotonie der Nutzenfunktion.
- **Skaleninvarianz:** Dyckhoff weist auf die Notwendigkeit hin, dass eine Änderung der Skala zu keiner Änderung der Präferenz führen darf. Dies ist vergleichbar mit dem Axiom der Ergebnis-Linearität von Milnor.[696] Damit wird Invarianz der Lösung gegenüber einer positiven linearen Transformation der zugrundeliegenden Ergebnismatrix gefordert. Mit dieser Anforderung wird sichergestellt, dass die Änderung der verwendeten Maßeinheiten (z. B. Währungen) zu keiner Änderung der Präferenzordnung der Alternativen führt.
- **Spalten-Linearität:** Die Addition einer Konstante zu den Spalten darf zu keiner Änderung der Nutzenfunktion führen.[697] Das entspricht der Erhöhung der Werte von **sämtlichen Alternativen** um einen identischen Betrag für **einen Zeitpunkt**. Diese Forderung entspricht dem Milnor'schen Axiom der Spalten-Linearität.[698]

Das sind die Punkte, bei denen die Axiomensysteme Ähnlichkeiten aufweisen. Darüber hinaus identifiziert Dyckhoff die Eigenschaften Stationarität und Ungeduld, um den intertemporalen Charakter der Entscheidung zu erfassen. Diese Forderungen finden logischerweise keine Entsprechung im Milnor'schen System.

[693] Vgl. Axiom 1.6.9 auf S. 167.
[694] Vgl. Def. 1.46 auf S. 163.
[695] Vgl. Anford. 1.7.8 auf S. 211.
[696] Vgl. Axiom 1.6 auf S. 21.
[697] Vgl. Dyckhoff (1988: 996).
[698] Vgl. Axiom 1.6.12 auf S. 168.

1.7.2.4 Konstante Grenzrate intertemporaler Substitution und Kapitalwert

Im vorangegangenen Abschnitt wurde das allgemeine additive Präferenzfunktional für intertemporale Entscheidungen erläutert. Dieses wird nun detaillierter analysiert.

Im Zusammenhang mit der Bewertung von **finanziellen Aspekten** von Investitionsentscheidungen wird eine standardisierte Variante dieses Funktionals verwendet. Dazu wird die Nutzenfunktion $u_0(x_p)$ im Präferenzfunktional vereinfacht.[699] Diese Nutzenfunktion bewertet die Periodenergebnisse und kann verschiedene Formen annehmen. Eine übliche – jedoch für das Modell des diskontierten Nutzens nicht notwendige bzw. sich aus diesem Modell nicht zwingend ableitende – Form ist die lineare Nutzenfunktion.[700] Wenn als Ergebnisse ausschließlich Zahlungsgrößen vorliegen, kann formuliert werden $u_0(x_p) = x_p$, womit die Nutzenfunktion linear im Geld ist.[701]

Nun wird kurz die Struktur des Funktionals beleuchtet. An anderer Stelle[702] wurde eine lineare Nutzenfunktion vorgestellt, wie sie in vielen ökonomischen Modellen verwendet wird. Die Verwendung einer solchen Grundstruktur führt zu folgender Modellierung des Gesamtnutzens U_0 der Alternative x mit einer Reihe von Ergebnissen x_p in den Perioden $p = 1,2,3,...,n$ mittels der Gewichtungsfaktoren g_p:

$$U_0(x) = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + g_3 \cdot x_3 + ... + g_n \cdot x_n = \sum_{p=1}^{n} g_p \cdot x_p.$$

Das Verhältnis der Gewichte bleibt konstant, da dies den Austauschraten zwischen den Zeitpunkten entspricht:[703]

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2} = ... = \frac{g_n}{g_{n-1}} = \frac{g_{p+1}}{g_p} = konstant = \delta$$

Das Gewicht $g_p = \delta^{p-1}$ wird üblicherweise als **Diskontierungsfaktor** bezeichnet. Aus der Darstellung wird deutlich, dass der Faktor δ für diese lineare Gleichung konstant ist. Das Gewicht δ^{p-1} jedoch nimmt mit zunehmender Entfernung vom ersten Glied ab. Die Rate dieser Reduktion ist die **Diskontrate**, die in diesem Modell ebenfalls **konstant** ist.[704]

Auf dieser Basis ergibt sich die bekannte geometrische Reihe. Das daraus resultierende lineare Präferenzfunktional spiegelt die **lineare Zeitbewertung**

[699] Vgl. Merksatz 1.18 auf S. 205.
[700] Vgl. Bleichrodt et al. (2015: 1422–1423).
[701] Vgl. Streich/Levy (2007: 201); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 358).
[702] Vgl. Def. 1.19 auf S. 70.
[703] Vgl. Fishburn (1979: 93–96); French (1988: 133–134).
[704] Zu einer ausführlichen Erläuterung vgl. Abschn. 2.4.3 auf S. 349.

durch den Akteur wider.[705] Diese Form der Modellierung impliziert eine Reihe von Eigenschaften, die an anderer Stelle ausführlich diskutiert werden.[706] Ein so gewichtetes Ergebnis wird üblicherweise als **Barwert** bezeichnet.

Mit der Verwendung dieser Modellierung werden implizit konstante Grenzraten der intertemporalen Substitution und damit lineare Indifferenzkurven angenommen.[707] Zur Erklärung wird der Nutzen U betrachtet, der aus zwei Ergebnissen x_1 und x_2 resultiert, die zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen:

$$U = u(x_1, x_2)$$

Die Änderung des Nutzens bei gleichzeitiger, infinitesimaler Variation der Teilnutzen ergibt sich aus:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot dx_2.$$

Der Nutzen auf einer Indifferenzkurve ist konstant, es folgt $dU = 0$ und somit:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot dx_2.$$

Die Grenzrate der intertemporalen Substitution (GRiS) gibt an, um wie viele Einheiten der Konsum in der Periode $p = 2$ erhöht werden muss, um eine Reduktion des Konsums in Periode $p = 1$ bei Konstanz des Nutzenniveaus U zu kompensieren. Die GRiS folgt aus:

$$GRiS = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}.$$

Aus Gleichung 11 auf S. 183 ist bekannt, dass:

$$\begin{aligned} r &= GRiS - 1 \\ &= -\frac{dx_2}{dx_1} - 1 \end{aligned}$$

In Abbildung 1.33 sind diese Zusammenhänge dargestellt.

[705] Vgl. Bleichrodt et al. (2015: 1423).

[706] Vgl. Abschn. 2.4.3.2 auf S. 350.

[707] Vgl. auch die Ausführungen zur Grenzrate der intertemporalen Substitution im Abschn. 1.7.1 auf S. 181.

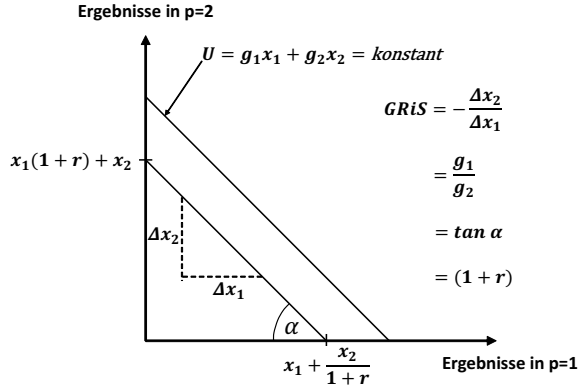


Abb. 1.33: Lineare intertemporale Indifferenzkurven. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Bitz (1981: 305).

Die Grenzrate der intertemporalen Substitution ist für jede Kurve und an jeder Stelle konstant. Je steiler die Indifferenzkurven sind, desto größer ist die Gegenwartspräferenz. Die GRiS der Substitution eines Ergebnisses in $p = 1$ durch ein Ergebnis in $p = 2$ ergibt sich in Abb. 1.33 mit:[708]

$$GRiS = -\frac{dx_2}{dx_1} = -m = (1+r) = tan\ \alpha.$$

Es wurde bereits auf das reziproke Verhältnis von GRS und Gewichtungsfaktoren hingewiesen.[709] Das wird an der Abb. 1.33 noch einmal erläutert. Der konstante Gesamtnutzen ergibt sich mit:[710]

$$U = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2$$

Für das Verhältnis von Nutzenänderung und Gewichten der Teilziele bei Konstanz des Gesamtnutzens galt:

$$\frac{\Delta u(x_1)}{\Delta u(x_2)} = -\frac{g_2}{g_1}$$

In Abb. 1.33 gilt:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -(1+r) = -\frac{g_1}{g_2}$$

Damit folgt:

[708] Vgl. Bitz (1981: 304); Schäfer (2005: 85); Breyer (2020: 172–174).
[709] Vgl. Abschn. 1.4.3.3.2 auf S. 70.
[710] Vgl. ergänzend Abb. 1.13 auf S. 71.

$$(1+r) = \frac{g_1}{g_2} = \frac{1}{\delta} = GRiS$$

Damit wird deutlich, dass die Grenzrate der intertemporalen Substitution zwischen x_1 und x_2 gleich dem negativen Wert der Austauschrate – also der Gewichte – dieser Werte entspricht. Diese Gewichte bestehen aus den Diskontierungsfaktoren.

Als Beispiel kann hier der Wert $(1+r) = 1{,}1$ und der obige Zwei-Zahlungs-Fall verwendet werden. Der Gesamtnutzen resultiert aus: $U = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2$. Der Anstieg der Indifferenzkurve lautet $m = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -1{,}1$. Es ergibt sich: $g_1 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^0 = 1$ und $g_2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^1 = \frac{1}{1{,}1}$, womit das Verhältnis $\frac{g_1}{g_2}$ den Wert 1,1 annimmt. Dieses Verhältnis ist die Grenzrate der intertemporalen Substitution und für alle Glieder der Kette konstant.

Für Zwecke der Modellierung ökonomischer Sachverhalte wird üblicherweise noch Monotonie bzw. Dominanz sichergestellt. Im hier vorliegenden Kontext ist die **Zeitdominanz** relevant. Diese Eigenschaft wurde bereits vorgestellt, wird an dieser Stelle aber als Axiom wiederholt (vgl. Axiom 1.7.8).[711]

Anforderung 1.7.8 (Zeitdominanz): *Gegeben ist die Menge der Perioden N und die Alternativenmenge A. Eine Aktion $x \in A$ heißt genau dann effizient bezüglich A und N, wenn es keine Aktion $y \in A$ gibt, für welche gilt:*

a) $u(y_p) \geq u(x_p)\ \forall\ p \in N$
sowie
b) $u(y_p) > u(x_p)$ *für mindestens ein* p.

Auf dieser Basis kann die Summe der diskontierten Ergebnisse als lineares, ordnungstreues Präferenzfunktional eingesetzt werden (vgl. Merksatz 1.19).[712]

Merksatz 1.19: *Das Funktional* $U_0(x) = \sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} \cdot x_p$ *bildet die Präferenzen des Akteurs in dem Sinne ab, dass* $x \succsim y \Leftrightarrow U_0(x) \geq U_0(y)$, *wenn die Präferenzen die Anforderungen schwache Ordnung (Anf. 1.7.1) und Zeitdominanz (Axiom 1.7.8) erfüllen und wenn zwischen allen Paaren von Zeitperioden eine einzige konstante Grenzrate der intertemporalen Substitution existiert.*

[711] Vgl. Bitz (1981: 289); Dyckhoff (1988: 994); Keeney/Raiffa (1993: 479).

[712] Vgl. Bitz (1981: 303–305); Dyckhoff (1988: 1002); French (1988: 134); Keeney/Raiffa (1993: 479–480). Zur Grenzrate der intertemporalen Substitution (GRiS) vgl. Gleichung 11 auf S. 183.

Jedes lineare Funktional ist eindeutig bestimmt bis auf lineare Transformationen.[713] Die Darstellungen in Merksatz 1.19 und im Merksatz 1.18 sind ähnlich, weisen jedoch folgende Unterschiede auf:

- Im Merksatz 1.19 werden direkt die diskontierten Ergebniswerte summiert. Das ist das Ergebnis der Annahme einer linearen Nutzenfunktion, was für Finanzgrößen durchaus akzeptabel ist. Damit erfolgt die Annahme einer einzigen, identischen Grenzrate der intertemporalen Substitution für sämtliche Paare von Perioden die Erfüllung der wechselseitigen Unabhängigkeit und der Stationarität.
- Im Merksatz 1.18[714] hingegen werden die diskontierten Nutzenwerte summiert. Demzufolge kann die Nutzenfunktion $u_0(x_p)$ auch nicht-linear gestaltet sein, was zu nicht-konstanten Grenzraten der intertemporalen Substitution führt.[715]

Das Kriterium aus Merksatz 1.19 stellt ein additives Präferenzfunktional bei intertemporalen Entscheidungen dar. Werden die endliche, nicht leere Aktionenmenge $A = \{a_1,...,a_m\}$ mit $i = 1,....,m$ und deren Ergebnisse allgemeingültig mit e_i bezeichnet, so kann die Regel für die optimale Alternative bei intertemporalen Entscheidungen formuliert werden (vgl. E.-regel 1.18).

Entscheidungsregel 1.18: *Bei Erfüllung der Anforderungen an rationale intertemporale Präferenzen und bei Annahme einer linearen Nutzenfunktion ist für einen Akteur diejenige Alternative $a_{opt} \in A$ optimal, für die gilt:*

$$\Phi(a_{opt}) = \max_i \left[\sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} e_{i;p} \right].$$

In der hier verwendeten Notation werden mit p die Zeitperioden nummeriert. Üblicherweise wird in der Literatur zur Investitionsrechnung im Exponenten die zeitliche Distanz der Periode vom heutigen Zeitpunkt aus gemessen und mit t bezeichnet. Der heutige Zeitpunkt wird auf $t = 0$ und die letzte Periode auf $t = N$ gesetzt. Das führt zu der gebräuchlicheren Darstellung:[716]

$$U_0 = \sum_{t=0}^{N} \delta^t \cdot e_t$$

mit $\delta = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{q}$ folgt:

$$= \sum_{t=0}^{N} q^{-t} \cdot e_t$$

[713] Vgl. French (1988: 131). Zu den Transformationsarten vgl. Tab. 1.5 auf S. 25.

[714] Vgl. S. 205.

[715] Vgl. French (1988: 135); Bleichrodt et al. (2015: 1422–1423).

[716] Vgl. Samuelson (1937: 156); Bleichrodt et al. (2015: 1421).

In den bisherigen Darstellungen wurden die Merkmale des Kapitalmarktes nicht berücksichtigt. Für das theoretische Konstrukt des vollkommenen Kapitalmarktes[717] wird angenommen, dass es nur einen einzigen Kapitalmarktzins gäbe, der die Zeitpräferenz sämtlicher Akteure widerspiegelt und von allen Marktteilnehmern zur Gewichtung zukünftiger Zahlungen verwendet wird. Anders ausgedrückt: Die Annahme einer konstanten Grenzrate der intertemporalen Substitution zwischen sämtlichen Paaren von Zeitpunkten mit einem einzigen, identischen δ setzt den vollkommenen Kapitalmarkt voraus bzw. stellt eine formale Beschreibung dieses Konstruktes dar.[718] Es ergeben sich folgende Implikationen:

Homo oeconomicus	$\Leftrightarrow$	Merksatz 1.18
Vollkommener Kapitalmarkt	$\Leftrightarrow$	Merksatz 1.19

Diese Relation wird im Merksatz 1.20 zusammengefasst.

Merksatz 1.20: *Die Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes impliziert die Erfüllung der wechselseitigen Unabhängigkeit und der Stationarität der Präferenzen durch die Annahme eines einzigen Marktzinssatzes als alleiniger und konstanter Grenzrate der intertemporalen Substitution, die für sämtliche Paare von Perioden identisch ist.*

Damit wird deutlich, dass alle Verfahren, die nicht mit der Annahme des vollkommenen Kapitalmarktes arbeiten, die Erfüllung der entsprechenden Eigenschaften der Präferenzen[719] prüfen müssten. Mit der Annahme des vollkommenen Kapitalmarktes wird impliziert, dass – über die Postulate der Ordnung und der Monotonie hinaus – die exakte Kenntnis der Präferenzen der Marktteilnehmer irrelevant ist. Das ist die Grundaussage des Separationstheorems von Fisher.[720]

Bei der Bewertung von Zahlungsgrößen unter Annahme des vollkommenen Kapitalmarktes wird der additiv ermittelte Gesamtnutzen aus Merksatz 1.19 üblicherweise als **Kapitalwert** und mit dem Symbol C_0 bezeichnet. Bei Annahme dieser Modellwelt kann die Entscheidungsfindung wesentlich vereinfacht und – unter Annahme der Postulate der Ordnung und der Monotonie – das Kriterium der **Kapitalwertdominanz** im Merksatz 1.21 beschrieben werden.[721]

[717] Vgl. 1. Band, Abschn. 3.3.6 auf S. 224.

[718] Vgl. French (1988: 136–137).

[719] Vgl. Merksatz 1.17 auf S. 204 bzw. Merksatz 1.18 auf S. 205.

[720] Vgl. Rudolph (1983: 269–272); Schäfer (2005: 93); Kruschwitz/Lorenz (2019: 73–74).

[721] Vgl. Bitz (1981: 304); Dyckhoff (1988: 997–1000); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 359).

Merksatz 1.21: *Bei Existenz eines vollkommenen Kapitalmarktes mit dem einzigen Zinssatz r bildet das Funktional $C_0(x) = \sum_{t=0}^{N} (1+r)^{-t} \cdot x_t$ die Präferenzen des Akteurs in dem Sinne ab, dass $x \succsim y \Leftrightarrow C_0(x) \geq C_0(y)$.*

1.7.3 Zusammenfassende Kritik

Exponentielles Diskontieren ist die einzige Form der Diskontierung, die zeitkonsistente Entscheidungen sicherstellt.[722] Deshalb impliziert die Annahme des homo oeconomicus exponentielles Diskontieren und vice versa. Für die Modellierung der Zeitpräferenz von Zahlungen bzw. Zahlungsströmen ist diese Form der Diskontierung absolut unkritisch. Sämtliche Verfahren der Finanzmathematik und der Investitionsrechnung sind entsprechend aufgebaut.

Für Entscheidungen, die nicht mit finanziellen Konsequenzen verbunden sind und/oder für Entscheidungen, die nicht von professionellen Akteuren getroffen werden (die der Annahme des homo oeconomicus entsprechen), muss jedoch nach der Realitätsnähe dieser Modellierung gefragt werden. Eine Modellkritik wird anhand der expliziten und auch der impliziten Prämissen entwickelt. Die Axiome, die in den voranstehenden Abschnitten erläutert wurden, bilden – wie bei jedem Modell – die ersten Ansatzpunkte für Kritik der expliziten Annahmen. Die Anforderungen, die sich aus den **Ordnungs-Axiomen** ergeben, dürften unstrittig sein. Auf grundlegende praktische Probleme im Hinblick auf die Vollständigkeit und die Transitivität wurde bereits hingewiesen.[723] Die folgenden Prämissen sind von besonderer Bedeutung:[724]

- **Kompensatorischer Charakter:** Das Präferenzfunktional ist additiver und somit kompensatorischer Natur. Es wird – wie auch im Fall multikriterieller Entscheidungen[725] – angenommen, dass ein geringer Nutzen in einem Zeitpunkt durch einen höheren Nutzen zu einem anderen Zeitpunkt kompensiert werden kann. Damit wird die Existenz bzw. das Auftreten jedes beliebigen Nutzenwertes zu jedem Zeitpunkt zugelassen.[726] Die Stetigkeits-Forderung verhindert unendliche Ausprägungen, weitere Einschränkungen gibt es jedoch nicht.

[722] Vgl. Strotz (1955/56: 172); Beck (2014: 214).

[723] Vgl. Abschn. 1.3.3 auf S. 40.

[724] Vgl. Samuelson (1937); Frederick/Loewenstein/O'Donoghue (2002: 357–359); Streich/Levy (2007: 201–202); Beck (2014: 210–213); Takemura (2021: 210–215).

[725] Vgl. Abschn. 1.4.3 auf S. 54.

[726] Diese Eigenschaft wird auch als *"Nutzenunabhängigkeit"* bezeichnet. Vgl. Frederick/Loewenstein/O'Donoghue (2002: 357); Streich/Levy (2007: 202); Beck (2014: 211). Der Begriff erscheint jedoch nicht sonderlich trennscharf.

- **Stationarität:** Diese Eigenschaft wurde bereits erläutert.[727] Dabei wurde darauf hingewiesen, dass es sich um eine sehr restriktive Annahme handelt.[728] Zusätzlich wurde deutlich,[729] dass eine enge Verbindung von Zeitkonsistenz und Zeitinvarianz existiert. In vielen empirischen Untersuchungen wurden Abweichungen festgestellt, wobei nicht immer so klar zwischen diesen Eigenschaften differenziert wurde, wie in den obigen Darstellungen.
- **Wechselseitige Unabhängigkeit:** Diese Annahme wurde bei den grundlegenden Merkmalen von Präferenzen schon angesprochen.[730] Sie setzt voraus, dass die Präferenzen für die Ergebnisse aller Paare von Zeitpunkten von den Ausprägungen der Präferenzen zu anderen Zeitpunkten unberührt bleiben.[731] Das gewählte Beispiel hatte die Problematik verdeutlicht.[732] Die Eigenschaft müsste für sämtliche Teilmengen der Zeitpunkte gelten, was kaum zutreffen dürfte. Diese Annahme dürfte deshalb nur dann realitätsnah sein, wenn die Attribute keine Bezüge zueinander aufweisen.[733] Dies impliziert möglichst "weit voneinander entfernte" Zeitpunkte.
- **Konstante Diskontrate:**[734] Der Diskontierungsfaktor bleibt über den gesamten Zeitraum konstant. Damit sind Zeitpräferenzen im Betrachtungszeitraum unveränderlich. Dies ist in der Realität jedoch oft nicht der Fall.[735]
- **Einheitliche Diskontrate:** Darüber hinaus erfolgt die Diskontierung unabhängig vom Objekt einheitlich. Die Art des konsumierten Objektes (bzw. des Objektes auf welchem der Zahlungsstrom basiert) ist irrelevant. Der Nutzen aus dem Konsum von Äpfeln wird ebenso diskontiert, wie der Nutzen aus dem Konsum von Öl, Büchern oder Holz.
- **Unveränderliche Alternativen- und Ergebnismenge:** Eine eher implizit getroffene Annahme besteht in der Konstanz der Informationen in Bezug auf Alternativen und Ergebnisse. Diese muss gewährleistet sein, damit heute die optimale Entscheidung getroffen werden kann.

Die Ungeduld[736] ist nicht notwendig oder hinreichend für die Existenz eines der oben erläuterten additiven Präferenzfunktionale, sondern wird als

[727] Vgl. Def. 1.50 auf S.198, Def. 1.7.6 auf S. 203 und Bspl. 1.20 auf S. 199.

[728] *„We know of no persuasive argument for stationarity as a viable psychological assumption..."* Fishburn/Rubinstein (1982: 681). Vgl. ebenfalls Keeney/Raiffa (1993: 484–485) für eine Kritik.

[729] Vgl. Merksatz 1.16 auf S. 203.

[730] Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.

[731] Vgl. Axiom 1.7.5 auf S. 195.

[732] Vgl. Bspl. 1.19 auf S. 195.

[733] Vgl. Honohan/Neary (2003: 199–204).

[734] Vgl. Abschn. 2.4.3.1 auf S. 349 zur Definition der Diskontrate.

[735] Vgl. Strulik/Trimborn (2018); Strulik (2021) sowie Abschn. 2.4.3.3 auf S. 355.

[736] Vgl. Eigenschaft 1.7.7 auf S. 205.

typische Eigenschaft des Akteurs zusätzlich in den Standardmodellen angenommen. Besondere Kritik erfährt die Verwendung dieser Eigenschaft im Zusammenhang mit sozialen bzw. ökologischen Fragestellungen. Es wurde in dem einleitenden Abschnitt[737] jedoch schon einmal auf den Unterschied zwischen **individueller** und **gesellschaftlicher** Zeitpräferenz hingewiesen.

In empirischen Untersuchungen sind vielfältige Abweichungen vom rationalen intertemporalen Verhalten festgestellt worden. Diese werden an anderer Stelle erläutert.[738] Abschließend sei nochmals darauf hingewiesen worden, dass in sämtlichen Erläuterungen von Entscheidungen unter Sicherheit ausgegangen wurde. Auch diese Annahme ist nicht unproblematisch. Für eine Diskussion von Zeitpräferenzen bei Unsicherheit wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.[739]

1.8 Überblick über die Axiome rationalen Handelns

Nach den vorangegangenen Abschnitten erscheint es notwendig, die bisherigen Ergebnisse komprimiert darzustellen. Das erfolgt in der Tabelle 1.59. Bevor die Axiome aus Tab. 1.59 diskutiert werden, soll noch einmal auf deren Einordnung in den entscheidungstheoretischen Kontext eingegangen werden. In den Situationen unter Sicherheit sowie für Entscheidungen bei Risiko sind die Axiome aus **mathematischer Sicht** erforderlich (ob notwendig und/oder hinreichend ist an dieser Stelle unwichtig), um Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionale generieren und einsetzen zu können. Sie entstanden aus dem Bemühen, auf Basis von **Ergebniswerten** (ordinal, kardinal und kardinal messende) Funktionen und Funktionale zu entwickeln. Oftmals werden diese Axiome als Axiome rationalen Handelns bezeichnet.

Diese Einordnung ist dahingehend zu relativieren, dass es sich um mathematisch motivierte Anforderungen handelt, die erfüllt sein müssen, um entsprechende Funktionen und Funktionale einsetzen zu können. Den Axiomen kann selbstverständlich auch eine ökonomische Begründung bzw. Rationalität zugebilligt werden. Das Beispiel der lexikographischen Präferenz[740] zeigte, dass diese durch rational ist, aber nicht mit den hier vorgestellten Methoden abgebildet werden kann. Durch die Stetigkeitsforderung werden lexikografische Präferenzen ausgeschlossen, aber nicht weil sie irrational sind, sondern weil sie mathematisch schlecht abbildbar sind.

[737] Vgl. Abschn. 1.7.1 auf S. 181.

[738] Vgl. Abschn. 2.3.4 auf S. 333.

[739] Vgl. Dyckhoff (2007); Gerber/Rhode (2010); Zuber (2011); Lu/Saito (2018); Rambaud/Sánchez Pérez (2020); Pennesi (2021).

[740] Vgl. Bspl. 1.2 auf S. 43 sowie Bspl. 1.15 auf S. 143.

Tab. 1.59: Überblick über die Axiome rationalen Handelns bei individuellen, einstufigen Entscheidungen. Quelle: Eigene Darstellung.

Merkmal / Situation	Ziel	Axiome und Resultate
Einperiodige Entscheidung bei Sicherheit und einem Ziel	Ordnungstreue Nutzenfunktion(en) (vgl. Def. 1.2) und ordnungstreues Präferenzfunktional (vgl. Def. 1.3) auf Basis von Ergebniswerten	• Ordnung: Axiome 1.3.1 bis 1.3.3, • Stetigkeit: Axiom 1.3.4, • Monotonie: Axiom 1.3.5. } Resultat: Ordinale Nutzenfunktion nach Definition 1.5 Zuzüglich: Konsistenz: Axiom 1.3.8, Äquivalenz: Axiom 1.3.9, Stabilität: Axiom 1.3.10, Lösbarkeit: Axiom 1.3.11. Resultat: Kardinal messende Nutzenfunktion nach Definition 1.8
Einperiodige Entscheidung bei Sicherheit und mehreren Zielen		• Ordnung: Axiome 1.3.1 bis 1.3.3, • Stetigkeit: Axiom 1.3.4, • Monotonie: Axiom 1.3.5, • Wesentlichkeit: Axiom 1.4.1, • Begrenzte Lösbarkeit: Axiom 1.4.2, • wechselseitige Unabhängigkeit: Axiom 1.4.4. Resultat: Nutzenfunktionen und Präferenzfunktional mit Kardinalität nach Definition 1.7 Zuzüglich: Konsistenz: Axiom 1.3.8, Äquivalenz: Axiom 1.3.9, Stabilität: Axiom 1.3.10, Differenzunabhängigkeit: Axiom 1.4.5. Resultat: Nutzenfunktionen und Präferenzfunktional mit kardinaler Messbarkeit nach Definition 1.8
Einperiodige Entscheidung bei Risiko und einem Ziel		• Ordnung: Axiome 1.5.1 bis 1.5.3, • Stetigkeit: Axiom 1.5.4, • Unabhängigkeit: Axiom 1.5.5. Unabhängigkeit impliziert: - Monotonie: Axiom 1.5.6, - Reduktion: Axiom 1.5.7, - Substitution: Axiom 1.5.8, - Homothetie: Axiom 1.5.9, - Betweenness: Axiom 1.5.10. Resultat: Nutzenfunktion und Präferenzfunktional mit Kardinalität nach Definition 1.7
Mehrperiodige Entscheidung bei Sicherheit und einem Ziel		• Ordnung: Axiom 1.7.1, • Stetigkeit: Axiom 1.7.2, • Wesentlichkeit: Axiom 1.7.3, • Begrenzte Lösbarkeit: Axiom 1.7.4, • wechselseitige Unabhängigkeit: Axiom 1.7.5, • Stationarität: Axiom 1.7.6, • Ungeduld: Axiom 1.7.7, • Zeitdominanz: Axiom 1.7.8. Resultat: Nutzenfunktion und Präferenzfunktional mit Kardinalität nach Definition 1.7
Einperiodige Entscheidung bei Ungewissheit und einem Ziel	Ordnungstreues Präferenzfunktional auf Basis von Nutzenwerten	• Ordnung: Axiome 1.6.1 bis 1.6.3, • Stetigkeit: Axiom 1.6.4, • Dominanz: Axiom 1.6.5, • Konvexität: Axiom 1.6.6, • Nutzen-Kardinalität: Axiom 1.6.7, • Unabhängigkeit von der Darstellungsform: Axiom 1.6.8, • Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Axiome 1.6.9 und 1.6.10, • Spalten-Duplikation: Axiom 1.6.11, • Spalten-Linearität: Axiom 1.6.12.

Bei Entscheidungen unter Ungewissheit wird von existierenden **Nutzenwerten** ausgegangen. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu den anderen Situationen. Auf Basis dieser Nutzenwerte soll ein ordnungstreues Funktional entwickelt werden. Die Ausgangssituation ist deshalb ähnlich zur kooperativen Spieltheorie, bei welcher ebenfalls existierende Nutzenwerte angenommen werden.[741]

Aus Tab. 1.59 wird deutlich, dass bestimmte Axiome in allen Situationen verwendet werden. Die Axiome **Ordnung**, **Stetigkeit** und **Monotonie** bzw. **Dominanz** bilden das Grundgerüst rationalen Entscheidens. Diese Basis wird für die jeweilige Situation erweitert. Weiterhin interessant ist die Bedeutung des **Unabhängigkeits-Axioms** für multikriterielle Entscheidungen, für Entscheidungen unter Ungewissheit, für Entscheidungen bei Risiko und auch bei intertemporalen Entscheidungen. Die Präferenzen für mehrere Teilziele, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Alternativen oder Zeitpunkte müssen unabhängig von der jeweiligen Restmenge sein.

Das Unabhängigkeits-Axiom, das in vielen Situationen eingesetzt wird, verdeutlicht die unterstellte Separabilität der Präferenzen, worauf einleitend schon hingewiesen wurde.[742] Interessanterweise ist das Unabhängigkeits-Axiom bei multikriteriellen und bei intertemporalen Entscheidungen weithin akzeptiert, obwohl es in diesen Situationen ähnlich restriktiv ist, wie bei Entscheidungen unter Risiko. Insbesondere bei einer großen Anzahl an Attributen dürfte die Annahme kaum der Realität entsprechen. Bei intertemporalen Entscheidungen kommt die angenommene Stabilität über den Betrachtungszeitraum erschwerend hinzu. Kontrovers diskutiert wird bzw. wurde die Unabhängigkeits-Annahme jedoch vornehmlich im Rahmen der Erwartungsnutzentheorie.

In der Tab. 1.59 sind sämtliche Axiome zusammengefasst, die in diesem Zusammenhang üblicherweise verwendet werden. Es handelt sich **nicht** um eine Zusammenstellung von notwendigen oder hinreichenden Bedingungen für die Existenz der Funktionale. Aus den Erläuterungen wurde deutlich, dass eine Reihe von Axiomen nicht für jedes Funktional notwendig ist.

Ergänzend wird darauf aufmerksam gemacht, dass sich die Darstellungen in Tab. 1.59 ausschließlich auf individuelle Entscheidungen beziehen. Zur Vervollständigung und zum Ausblick wird auf die Axiome **kollektiver Entscheidungen**[743] und auf die Axiome **leistungsgerechter Aufteilung**[744] verwiesen.

[741] Vgl. Abschn. 4.2 auf S. 466.
[742] Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.
[743] Vgl. Tab. 3.3 auf S. 395.
[744] Vgl. Tab. 4.16 auf S. 528.

Darüber hinaus sind die Ähnlichkeiten der Präferenzfunktionale für multikriterielle Entscheidungen, mehrperiodige Entscheidungen und Entscheidungen unter Risiko aufgezeigt worden, die in der Tabelle 1.60 zusammengefasst sind.

Tab. 1.60: Präferenzfunktionale mit additiver Grundstruktur. Quelle: Eigene Darstellung.

Merkmal / Situation	Präferenz-funktional	Parameter
Entscheidung bei Sicherheit und mehreren Zielen	$\sum_{r=1}^{l} u_r(e_r) \cdot \lambda_r$	$r = 1,...,l$ – Anzahl der Teilziele, $u_r(e_r)$ – Nutzenwert u, der dem Ergebnis e durch die Nutzenfunktion für das Teilziel r zugeordnet wird, λ_r – Skalierungskonstante/Gewichtungsfaktor für das Teilziel r, mit $0 < \lambda_r \leq 1$, $\sum_{r=1}^{l} \lambda_r = 1$[745]
Entscheidung bei Risiko	$\sum_{p=1}^{n} u(e_p) \cdot w_p$	$p = 1,...,n$ – Anzahl der Zustände, $u(e_p)$ – Nutzenwert u, der dem Ergebnis e für den Zustand p durch die individuelle Risikonutzenfunktion $u(e)$ zugeordnet wird, w_p – Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Zustandes p, mit $0 \leq w_p \leq 1$, $\sum_{p=1}^{n} w_p = 1$
Mehrperiodige Entscheidung bei Sicherheit	$\sum_{p=1}^{n} u_0(e_p) \cdot \delta^{p-1}$	$p = 1,...,n$ – Anzahl der Perioden, $u_0(e_p)$ – Nutzen, der dem Ergebnis e in Periode p durch die einheitliche Nutzenfunktion u_0 zugeordnet wird, δ^{p-1} – Gewichtungsfaktor für die Nutzenwerte der Periode p, üblicherweise als Diskontierungsfaktor bezeichnet, wobei $0 < \delta \leq 1$, $\delta = \frac{1}{1+r}$, mit r als Kalkulationszinssatz, $\sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} \neq 1$

Neben den Ähnlichkeiten sind aus der Darstellung auch die Unterschiede deutlich geworden. Trotz optischer Ähnlichkeiten bestehen folgende, wesentliche Unterschiede:

- **Multikriterielle Verfahren:** Im Präferenzfunktional wird jedes Teilziel r mit einer eigenen Nutzenfunktion $u_r(e_r)$ gemessen. Es werden $r = 1,...,l$ Nutzenfunktionen additiv zusammengefasst. Das Funktional wird i. d. R so gestaltet,[746] dass es eine lineare Grundstruktur besitzt.

[745] Die Gewichtung wird üblicherweise so festgelegt, dass die Summe der Gewichte den Wert 1 ergibt. Vgl. Klein/Scholl (2011: 115); Obermaier/Saliger (2020: 61).

[746] Zu den Bedingungen vgl. Abschn. 1.4.3.3.2 auf S. 70.

- **Entscheidungen unter Risiko:** Der Akteur besitzt eine einzige Funktion, die sämtlichen Alternativen und Zuständen den Nutzen der Ergebnisse entsprechend seiner Präferenzen zuweist. Diese Nutzenwerte werden anschließend mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtet und summiert. Das Funktional ist linear in den Wahrscheinlichkeiten.
- **Intertemporale Entscheidungen:** Das ursprüngliche Funktional hatte – ohne Annahmen über die zeitliche Struktur der Präferenzen – folgende Form:[747]

$$\Phi(a) = \sum_{p=1}^{n} u_p(e_p)$$

Für jede Periode p existiert eine Funktion, die den Ergebnissen dieser Periode einen Nutzen zuweist. Demzufolge werden $p = 1,...,n$ Nutzenfunktionen – für jede Periode p eine Nutzenfunktion u_p – additiv zusammengefasst. Diese Struktur ist identisch zu dem multikriteriellen Funktional. Um die zeitliche Differenz modellieren zu können, wird eine einzige Nutzenfunktion $u_0(e_p)$ für sämtliche Perioden verwendet. Damit wird unterstellt, dass die **Höhenpräferenz** während des gesamten Zeitraumes konstant bleibt. Die anschließende Gewichtung dieser Nutzengrößen mit δ^{p-1} verkörpert die Berücksichtigung der zeitlichen Differenzen und führt zur bekannten Darstellung:

$$\Phi(a) = \sum_{p=1}^{n} \delta^{p-1} u_0(e_p)$$

Dieses Vorgehen erfordert eine zusätzliche Anforderung an die Präferenzen: die **Stationarität**. Auch dieses Funktional ist linear gestaltet, was in diesem Fall bedeutet, dass die Zeit wird linear wahrgenommen wird.

Da es sich bei mehrperiodigen Problemen immer um zukünftige Zustände handelt, liegt i. d. R. auch immer Unsicherheit vor. Anders herum formuliert: Entscheidungen unter Unsicherheit implizieren immer eine gewisse Wartezeit bzw. einen Zeitraum nach welchem das Ereignis eintritt. *„Future income is always subject to some uncertainty, and this uncertainty must naturally have an influence on the rate of time preference, or degree of impatience, of its possessor.“*[748] Eine getrennte Betrachtung beider Aspekte – wie in den bisherigen Darstellungen – ist demzufolge nicht vollständig. Umfangreichere Modelle sind in der Lage, eine bessere Abbildung zu erreichen.[749]

[747] Vgl. Merksatz 1.15 auf S. 196.
[748] Fisher (1930: 76–77).
[749] Vgl. Rambaud/Sánchez Pérez (2020).

1.9 Zeit- und Risikopräferenz - Mehrstufige, mehrperiodige Entscheidungen

1.9.1 Einführung

In den bisherigen Darstellungen wurde davon ausgegangen, dass der Entscheidungsträger lediglich zu einem Zeitpunkt seine Entscheidung treffen kann. Im Anschluss daran treten die Ergebnisse der Entscheidung ein und die Handlung ist abgeschlossen. In der Realität sind Entscheidungen jedoch häufig sequenzieller Natur. Die heutige Entscheidung ist in diesen Fällen die Basis für darauffolgende weitere Entscheidungen, die wiederum selbst die Basis für Folgeentscheidungen sind. Gesucht wird in diesen Fällen nicht eine einzige optimale Entscheidung, sondern die **Folge** an optimalen Entscheidungen.

Für eine allgemeingültige Darstellung mehrstufiger Entscheidungen bei **Sicherheit** ist folgende Überlegung charakteristisch:[750]

- Die Anzahl der Alternativen und der Zeitpunkte sind bekannt, sicher und endlich.
- Die nichtleere Alternativenmenge $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ wird gebildet durch die endliche Anzahl an Alternativen a_i mit $i = 1, ..., m$.
- Auch die **Unterlassung** einer Investitionsmaßnahme stellt eine zulässige Handlungsalternative a_x dar, so dass gilt $a_x \in A$.
- Es existiert eine endliche Menge, bekannter zukünftiger Perioden $P = \{1,2,3,...,\omega\}$ mit $p \in P$.
- Zeit wird in identische äquidistante Abschnitte unterteilt, d. h. jede Periode ist gleichlang.
- Es existiert eine Menge von Zeitpunkten $\tau = \{0,1,2,3,...,T\}$ mit $t \in \tau$, die endlich und nicht leer ist.
- Jede Periode wird von einem Anfangs- und Endzeitpunkt begrenzt. Der Anfangszeitpunkt einer Periode bildet gleichzeitig den Endzeitpunkt der Vorperiode, so dass ausgehend vom Startzeitpunkt $t = 0$ der Zeitpunkt $t = 1$ den Endzeitpunkt von $p = 1$ und gleichzeitig den Startzeitpunkt von $p = 2$ darstellt usw.
- Der Akteur kann in den Zeitpunkten $t = 0,1,2..,T-1$ jeweils eine Entscheidung d_t bezüglich der Alternativenmenge A treffen.
- Es entsteht die Menge der Entscheidungsstufen $D = \{1,2,3,...,N\}$ mit $i \in D$.
- Der Eingang der Entscheidungsstufe i wird gebildet durch das Ergebnis der Vorstufe x_{i-1} sowie durch die in der Vorstufe getroffenen Entscheidung d_{i-1}.

[750] Zur folgenden Darstellung vgl. Benker (2003: 428–435).

- Die Entscheidung d_t bewirkt in der Folgeperiode ein Ergebnis x_{t+1}. Dieses Ergebnis wiederum ist die Basis für die darauf aufbauende nächste Entscheidung.
- Der Ausgangswert x_0 ist gegeben.
- Die letzte Entscheidungsmöglichkeit besteht in der N-ten Stufe zum Zeitpunkt $t = T - 1$, so dass gilt d_{T-1}.
- Die Parameter x_{t-1} und d_{t-1} bestimmen das Ergebnis x_t. Das Ergebnis in t wird demzufolge definiert durch $x_t = f(x_{t-1}, d_{t-1})$. Diese Ergebnisfunktion muss bekannt sein. Der Akteur muss wissen, welche Kombination von Ausgangswert und Entscheidung zu welchem Ergebnis führt.
- Jedes Ergebnis einer Stufe ist für den Akteur mit einem Nutzen u_t verbunden. Es gilt deshalb: $u_t(x_{t-1}, d_{t-1})$ (vgl. Abbildung 1.34).

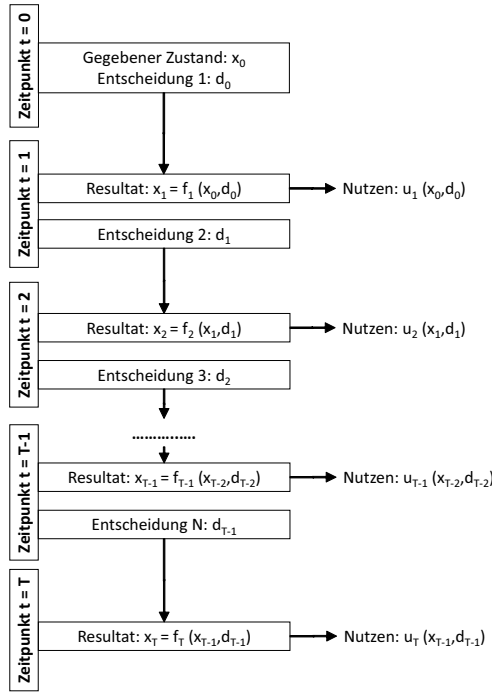


Abb. 1.34: Struktur von N-stufigen Entscheidungen bei Sicherheit. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Benker (2003: 429).

- Sämtliche Informationen bleiben während des Planungszeitraumes konstant, d. h. es treten keine Veränderungen bezüglich der Ergebnisse, Alternativenmenge, Zeitpunkte o. ä. auf.

- Ziel des Akteurs ist die Maximierung der Nutzensumme der gesamten Folge durch seine Entscheidungen bezüglich der Alternativenmenge A, d. h.: $\sum_{t=1}^{T} u_t(x_{t-1},d_{t-1}) \rightarrow \underset{d_0,\ldots,d_{T-1}}{Max}$!
- Diejenige Folge von Entscheidungen wird als **optimale Entscheidungsfolge** bezeichnet, die den Gesamtnutzenwert maximiert.
- Da auch die Unterlassung einer Investitionsmaßnahme eine zulässige Alternative darstellt, ergibt sich die Frage nach dem optimalen **Investitionszeitpunkt**. Der Akteur kann mit der ersten Entscheidung in $t = 0$ festlegen, keine Investitionsmaßnahme zu veranlassen. Zu einem späteren Zeitpunkt kann er dann prüfen, ob es vorteilhaft ist, die Investition durchzuführen.

Die zentrale Frage ist, wie diese optimale Entscheidungsfolge gefunden werden kann.

Zur Bestimmung der optimalen Entscheidungsfolge wurde im Bereich der dynamischen Programmierung schon vor längerer Zeit von Bellman das **Optimalitätsprinzip** entwickelt.[751] Das Prinzip beruht auf der Erkenntnis, dass es für einen Akteur zum Zeitpunkt t mit einem Zustand x_t unerheblich für die zukünftigen Entscheidungen ist, **wie** er zu diesem Zustand gekommen ist. Deshalb genügt es, wenn sich der Akteur auf das - in der Zukunft liegende - Restproblem konzentriert. Die optimale Handlungsfolge entsteht also, wenn zu jedem Entscheidungszeitpunkt die in der Zukunft liegenden Handlungen optimiert werden. Die Menge der optimalen Teillösungen ergibt die optimale Gesamtlösung.[752] Um diese Vorgehensweise zu erläutern, werden nun einzelne Glieder der Summe $\sum_{t=1}^{T} u_t(x_{t-1},d_{t-1})$ analysiert.

Der Wert der optimalen Handlungsfolge zum Zeitpunkt t, der vom Ausgangszustand x_{t-1} abhängig ist, wird mit $W_t(x_{t-1})$ bezeichnet und ergibt sich in allgemeiner Form mit:[753]

$$W_t(x_{t-1}) = \underset{d_t}{max}\,[u_t(x_{t-1},d_{t-1}) + W_{t+1}(x_t)]$$

Dieser Wert ist die Summe aus dem Ergebnis der heutigen Entscheidung, deren Ergebnis wiederum die Grundlage für die optimale Entscheidung in der Folgeperiode ist. Diese allgemeine Darstellung wird als Bellmansche Gleichung bezeichnet. Zwischen den Wertfunktionen von aufeinanderfolgenden Entscheidungsstufen bestehen folgende Beziehungen:

---

[751] Vgl. Bellman (1954); Bellman (1957). Richard Bellman (1920–1984).

[752] „*An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decisions are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decisions.*“ Bellman (1954: 504); Bellman (1957: 83).

[753] Vgl. Benker (2003: 434).

$$
\begin{aligned}
W_1(x_0) &= \max_{d_0}\left[u_1(x_0,d_0) + W_2(x_1)\right] \\
W_2(x_1) &= \max_{d_1}\left[u_2(x_1,d_1) + W_3(x_2)\right] \\
&\vdots \\
W_t(x_{t-1}) &= \max_{d_t}\left[u_t(x_{t-1},d_{t-1}) + W_{t+1}(x_t)\right] \\
&\vdots \\
W_{T-1}(x_{T-2}) &= \max_{d_{T-1}}\left[u_{T-1}(x_{T-2},d_{T-2}) + W_T(x_{T-1})\right] \\
W_T(x_{T-1}) &= u_T(x_{T-1},d_{T-1}).
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist der Wert der letzten Periode nur abhängig von der Entscheidung und dem Ergebnis der Vorperiode. Eine nachfolgende, zukünftige Entscheidungsstufe, die zu berücksichtigen wäre, existiert nicht.

Deshalb besteht die Lösungsmethode in einem **rekursiven Vorgehen**.[754] Der Entscheidungsträger versetzt sich gedanklich in die Zukunft, nämlich in die Situation der **letztmöglichen Entscheidungsstufe** N zum Zeitpunkt $t = T - 1$. Vor ihm liegt die letzte Periode des Planungszeitraumes, die mit dem Ergebnis x_T endet. Der Akteur wird aus der Menge der Alternativen diejenige wählen, welche den **maximalen Nutzen** erwirtschaftet. Alle übrigen Alternativen fallen aus der Betrachtung heraus. Nun begibt sich der Akteur gedanklich eine Stufe zurück in die Vergangenheit, so dass er sich auf der **vorletzten Entscheidungsstufe** $t = T - 2$ befindet. Der Wert dieser Stufe ergibt sich aus dem Maximum der letzten Stufe $t = T - 1$ und dem Maximum der aktuellen Stufe $t = T - 2$. Wird diese Vorgehensweise bis zur ersten Entscheidungsstufe in $t = 0$ fortgeführt, resultiert die optimale – weil nutzenmaximale – Handlungsstrategie.[755] Aufgrund dieser Bearbeitungsstruktur wird das Verfahren auch als **Roll-back-Verfahren** oder **rekursive Bewertung** bezeichnet. Im Anschluss an das rekursive Vorgehen wird durch die Vorwärtsrechnung die optimale Entscheidungsfolge bestimmt. Wird das Rollback-Verfahren bei Entscheidungen unter Risiko eingesetzt, ist die Erfüllung des **Unabhängigkeits-Axioms**[756] eine notwendige Voraussetzung.[757]

Im Fall von **Unsicherheit** bestimmen nicht ausschließlich die Parameter x_{t-1} und d_{t-1} das Ergebnis x_t, sondern auch der Zufall. Dafür müssen die Zustands-Ergebnisfunktionen bekannt sein. Der Akteur muss wissen, welche Kombination von Ausgangswert, Entscheidung und Zustand zu welchem Er-

[754] Vgl. Obermaier/Saliger (2020: 140–144).

[755] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 239–240).

[756] Vgl. Anf. 1.5.5 auf S. 116.

[757] Vgl. LaValle/Wapman (1986); Hammond (1988: 511–513); Seidenfeld (1988: 275–284); Machina (1989: 1626–1628); Gul/Lantto (1990: 165–167); Trost (1991: 167–169); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 287); Hammond/Zank (2014: 70–75).

gebnis führt. Diese Annahme wurde auch bei der Zuordnung von Alternativen und Umweltzuständen zu Ergebnissen verwendet.[758]

Die vorliegende Situation besitzt **intertemporalen** Charakter, da die Ergebnisse in unterschiedlichen Perioden anfallen. Das erfordert folgende zusätzliche Festlegungen:

- Der Akteur legt seine Nutzenfunktion fest und bestimmt damit seine **Höhenpräferenz**.
- Der Akteur muss ein **Präferenzfunktional** auswählen, das seine **Zeitpräferenzen** widerspiegelt. Dazu wird standardmäßig die exponentielle Diskontierung verwendet.[759]
- Damit wird implizit vorausgesetzt, dass die Präferenzen des Akteurs den Anforderungen zur Bildung eines additiven intertemporalen Präferenzfunktionals genügen.[760]
- Zusätzlich muss sichergestellt werden, dass sich die Präferenzen des Akteurs, wie sämtliche anderen Daten, während des Planungszeitraumes nicht ändern. Auf die Intention (z. B. Vermeidung von *„Geldpumpen“*) dieser Forderung und die damit verbundenen Schwierigkeiten im praktischen Entscheidungsverhalten wurde bereits eingegangen.[761]

Es wird deutlich, dass viele Bedingungen erfüllt sein müssen, damit die optimale Handlungsfolge bestimmt werden kann. Eine Kritik der Vorgehensweise erfolgt an anderer Stelle.[762]

1.9.2 Entscheidungen bei Sicherheit

Zur praktischen Lösung mehrstufiger Entscheidungen bei Sicherheit wird i. d. R. das **Entscheidungsbaumverfahren** eingesetzt. Das Verfahren wurde zur Lösung mehrstufiger Entscheidungen unter Unsicherheit entwickelt, kann jedoch auch für Entscheidungen unter Sicherheit verwendet werden. Auf Basis der bisher getroffenen Annahmen kann die Regel für mehrstufige Entscheidungen bei Sicherheit formuliert werden (vgl. E.-regel 1.19).

[758] Vgl. Abschn. 1.5.1 auf S. 98.
[759] Vgl. Götze (2014: 410–413).
[760] Vgl. Abschn. 1.7.2 auf S. 188.
[761] Vgl. Abschn. 1.3.3 auf S. 40.
[762] Vgl. Abschn. 1.9.4 auf S. 238.

Entscheidungsregel 1.19: *Bei Sicherheit ist diejenige Folge von Entscheidungen optimal, die die Summe der diskontierten Nutzenwerte maximiert. Es gilt:*

$$\sum_{t=1}^{T} u_t(x_{t-1}, d_{t-1}) \cdot q^{-t} \rightarrow \underset{d_0,\ldots,d_{T-1}}{Max} !$$

Die generelle Vorgehensweise bei Anwendung dieses Verfahrens ist folgende:

1. Bestimmung der Grundstruktur (Alternativen, Zeitpunkte, Handlungsfolgen, Resultate),
2. Festlegung der Zielgröße und der Höhenpräferenz,
3. Bestimmung der erforderlichen Eingangsdaten,
4. Ermittlung der Werte aller Resultatsknoten,
5. Festlegung des Präferenzfunktionals zur Abbildung der individuellen Zeitpräferenz,
6. Bestimmung der optimalen Handlungsfolge.

Die Umsetzung dieser Schritte geschieht in einem zweistufigen Verfahren. In einem **ersten Schritt** wird die Entscheidungssituation **grafisch dargestellt**. Dazu werden sämtliche Zeitpunkte, zu denen eine Entscheidung getroffen werden kann bzw. muss und sämtliche Handlungsalternativen, die zur Verfügung stehen, abgebildet. Folgende Bestandteile des Entscheidungsbaumes werden für die grafische Darstellung benötigt:

E – Entscheidungsknoten:	Zeitpunkt, zu dem eine Entscheidung über die Nutzungsdauer getroffen werden kann/muss
e – Entscheidungskante:	eine Kante, die die zur Verfügung stehenden Entscheidungsalternativen repräsentiert
R – Resultatsknoten:	bildet das Resultat der Entscheidung der Vorperiode ab
R/E – Resultats-Entscheidungsknoten:	kombinierter Knoten aus dem Resultat der Entscheidung der Vorperiode und der sich anschließenden Entscheidung der aktuellen Periode

Die **grafische Darstellung** dieser Elemente führt zur Struktur des mehrstufigen Entscheidungsbaumes (vgl. Abbildung 1.35).

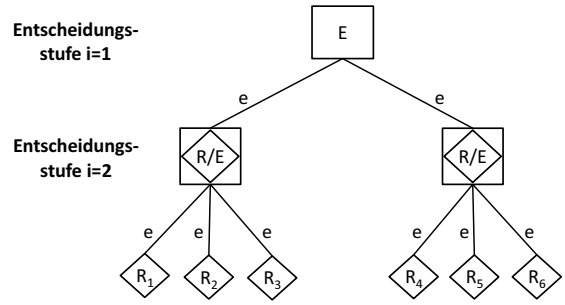


Abb. 1.35: Formalstruktur des Entscheidungsbaumes unter Sicherheit. Quelle: Eigene Darstellung.

Aufbauend auf dieser Struktur kann in dem **zweiten Schritt** die **Bewertung** der Handlungsabfolgen durchgeführt werden. Eine Variante besteht in der vollständigen Berechnung sämtlicher Möglichkeiten. Diese Vorgehensweise – auch als vollständige Enumeration bezeichnet – erfordert bei vielen Entscheidungszeitpunkten und Alternativen einen sehr großen Rechenaufwand. Um dies zu vermeiden, kann auf das BELLMANsche Optimalitätsprinzip zurückgegriffen werden. Dabei befindet sich die erste Entscheidungsstufe $i = 1$ im Zeitpunkt $t = 0$, die Entscheidungsstufe $i = 2$ im Zeitpunkt $t = 1$ und so weiter. Zum Verständnis wird das Beispiel 1.24 diskutiert.

Beispiel 1.24:

Ein Akteur verfügt über einen Planungshorizont von drei Jahren und kann sich heute dazu entscheiden, in eine von zwei Maschinen zu investieren. Diese Entscheidung kann er jährlich revidieren, so dass er die Maschine veräußern kann, die aktuell in seinem Besitz ist und stattdessen die andere Maschine erwerben kann. Die Anlage A ist sofort verfügbar, wohingegen die Anlage B erst in einem Jahr auf den Markt kommt. Die Informationen zu den Zahlungsreihen der Maschinen sind der Tabelle 1.61 zu entnehmen.

Tab. 1.61: Ausgangsdaten des mehrstufigen Entscheidungsproblems

Zeitpunkt	**t=0**	**t=1**	**t=2**	**t=3**
Anlage A:				
Zahlung	−3.000	1.500	1.500	1.500
Restwert	3.000	2.000	1.000	0
Anlage B:				
Zahlung		−2.000	1.615	1.615
Restwert		2.000	1.000	0

Zielkriterium des Akteurs ist die Maximierung des Kapitalwertes.[763] *Bei Verwendung eines Kalkulationszinssatzes von $i = 10\,\%$ erwirtschaftet die Anlage A bei Sofortinstalla-*

[763] Vgl. die Definition des Kapitalwertes im 1. Band, Def. 3.16 auf S. 236.

tion einen Kapitalwert von ca. 730 €. Der Kapitalwert der Handlungsalternative „Warten und Installation der Anlage B in t = 1“ beträgt auf den Zeitpunkt t = 0 bezogen ebenfalls ca. 730 €. In der Abbildung 1.36 ist die Situation abgebildet.

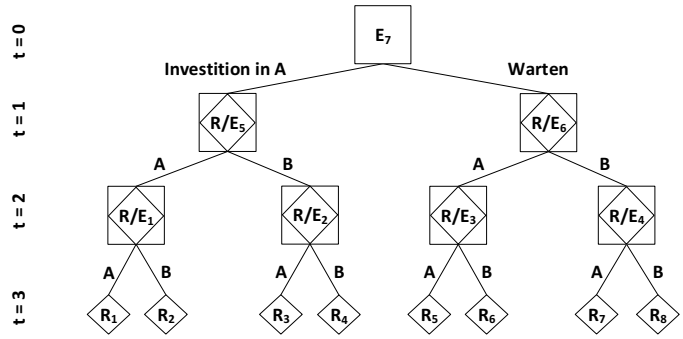


Abb. 1.36: Entscheidungsbaum des Beispiels. Quelle: Eigene Darstellung.

Es stellt sich die Frage, welche Entscheidungsfolge optimal ist. Am Ende des Planungshorizontes werden alle noch im Betrieb stehenden Anlagen rechentechnisch liquidiert. Auf diese Weise wird der Planungshorizont künstlich abgeschlossen.

Die Ermittlung der optimalen Entscheidungsfolge beginnt im ***ersten Schritt*** *im Zeitpunkt der letztmöglichen Entscheidung, also in t = 2. Die Analyse beginnt auf der* ***linken Seite*** *der Grafik. Wenn sich der Akteur im Knoten R/E_1 befindet, stehen ihm zwei Alternativen zur Auswahl:*

- *er betreibt die Anlage A weiter oder*
- *er liquidiert die Anlage A und installiert stattdessen die Anlage B.*

Für diese Alternativen resultieren folgende Ergebnisse:

$$A \to A: \quad 1.500\,€ \cdot 1{,}1^{-1} = 1.363{,}64\,€$$
$$A \to B: \quad 1.000\,€ - 2.000\,€ + (1.615\,€ + 1.000\,€) \cdot 1{,}1^{-1} = 1.377{,}27\,€$$

Die Entscheidung, die im Knoten R/E_1 den Kapitalwert maximiert, ist die Liquidation der Maschine A und die Installation der Maschine B für das letzte Jahr. Wenn sich der Akteur in t = 1 jedoch dazu entschieden hat, die Anlage B zu installieren, gelangt er im Jahr t = 2 zum Knoten R/E_2. In diesem Knoten stehen ihm wiederum die zwei Alternativen zur Auswahl. Der Akteur kann die Anlage B weiter betreiben oder diese liquidieren und an deren Stelle die Anlage A installieren. Die Ergebnisse dieser Alternativen sind folgende:

$$B \to B: \quad 1.615\,€ \cdot 1{,}1^{-1} = 1.468{,}18\,€$$
$$B \to A: \quad 1.000\,€ - 3.000\,€ + (1.500\,€ + 2.000\,€) \cdot 1{,}1^{-1} = 1.181{,}82\,€$$

Die optimale Entscheidung in diesem Knoten ist der Weiterbetrieb der Anlage B. Dieselben Analysen werden für die Knoten R/E_3 und R/E_4 durchgeführt, was zu folgenden Resultaten führt:

Knoten* $\mathbf{R/E_3}$*:

$A \to A$:	$(1.500\,€ + 1.000\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 2.272{,}72\,€$
$A \to B$:	$2.000\,€ - 2.000\,€$	
	$+ (1.615\,€ + 1.000\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 2.377{,}27\,€^*$

Knoten* $\mathbf{R/E_4}$*:

$B \to B$:	$1.615\,€ \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 1.468{,}18\,€^*$
$B \to A$:	$1.000\,€ - 3.000\,€$	
	$+ (1.500\,€ + 2.000\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 1.181{,}82\,€$

Die mit dem Asterisk versehenen Werte stellen die relativ vorteilhafte Entscheidungsalternative des jeweiligen Knotens dar. Nur diese Alternativen werden im weiteren Verfahren berücksichtigt. Nun wird im ***zweiten Schritt*** *die Analyse der Entscheidungen in $t = 1$ durchgeführt. Dazu werden die in dem zweiten Jahr zu erwartenden Zahlungen ermittelt und mit dem Maximum der Werte aus den Entscheidungen des Jahres $t = 2$ verbunden. Es ergeben sich folgende Resultate:*

Knoten* $\mathbf{R/E_5}$*:

$A \to max(R/E_1)$:	$(1.500\,€ + 1.377{,}27\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 2.615{,}70\,€$
$B \to max(R/E_2)$:	$2.000\,€ - 2.000\,€$	
	$+ (1.615\,€ + 1.468{,}18\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 2.802{,}89\,€^*$

Knoten* $\mathbf{R/E_6}$*:

$A \to max(R/E_3)$:	$-3.000\,€ + (1.500\,€ + 2.377{,}27\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 524{,}79\,€$
$B \to max(R/E_4)$:	$-2.000\,€ + (1.615\,€ + 1.468{,}18\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 802{,}89\,€^*$

Als ***letzter Schritt*** *wird die Analyse in $t = 0$ durchgeführt. Die Ergebnisse lauten:*

$A \to max(R/E_5)$:	$-3.000\,€$	
	$+ (1.500\,€ + 2.802{,}89\,€) \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 911{,}72\,€^*$
$Warten \to max(R/E_6)$:	$0 + 802{,}89\,€ \cdot 1{,}1^{-1}$	$= 729{,}90\,€$

Die optimale Handlungsfolge ist demzufolge $A \to B \to B$, da sie zu einem maximalen Kapitalwert führt.

Bei sicheren Rahmenbedingungen ist der Vorteil der mehrstufigen Entscheidung nicht so groß, wie im Fall von unsicheren Daten. Das wird im nächsten Abschnitt demonstriert.

1.9.3 Entscheidungen bei Risiko

Das im vorangegangenen Kapitel beschriebene Verfahren wird oftmals so variiert, dass im Anschluss an eine Entscheidung mehrere Umweltzustände möglich sind. Nach dem Eintritt des jeweiligen Zustands kann der Akteur wiederum eine Entscheidung treffen. Dies erfolgt vor dem Hintergrund von sich daran anschließenden Zufallsereignissen. Für den Akteur ist es bei Entscheidungen unter Risiko oftmals hilfreich, eine Entscheidung in eine Folge von Teilentscheidungen zu zerlegen. Auf diese Weise kann:

- das materielle Risiko[764] der Entscheidung gesenkt und
- der Wissensstand im Zeitablauf verbessert

werden. In Ergänzung zu den bisherigen Erläuterungen[765] gelten für die weiteren Ausführungen folgende Annahmen und Notationen:

- In jedem Zeitpunkt $t = 1,2,...,T$ sind endlich viele Zustände $z = 1,....,n$ möglich. Diese bilden die Zustandsmenge $Z = \{1,2,3,...,n\}$.
- Die Anzahl der Zustände ist bekannt und sicher.
- Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Zustände sind bekannt und genügen den KOLMOGOROV-Axiomen.[766]
- Die zukünftigen Zustände werden nicht vom Akteur selbst und auch nicht von einem bewusst handelnden Gegenspieler beeinflusst. Der tatsächlich eintretende Umweltzustand ist unabhängig von der gewählten Alternative.
- Jeder Alternative kann für jeden Zeitpunkt und für jeden Zustand mit Sicherheit genau ein Ergebnis zugeordnet werden.
- Die Ergebnisse sämtlicher Alternativen in sämtlichen Zuständen und Zeitpunkten sind bekannt und treten mit Sicherheit mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit ein. Es besteht quasi Sicherheit über die Unsicherheit.
- Auf diese Weise entsteht die **intertemporale Ergebnismatrix bei Risiko** (vgl. Tab. 1.62).

[764] Vgl. 1. Band, Abschn. 1.2.2.3 auf S. 25 zum materiellen Risikobegriff.
[765] Vgl. Abschn. 1.9.1 auf S. 221.
[766] Vgl. S. 101.

Tab. 1.62: Grundstruktur der intertemporalen Ergebnismatrix bei Risiko. Quelle: Eigene Darstellung.

Aktion	**Zeitpunkt**	**t = 1**			**t = 2**			⋯	**t = T**		
	Zustand	**z = 1**	**z = 2**	**z = 3**	**z = 1**	**z = 2**	**z = 3**	⋯	**z = 1**	**z = 2**	**z = 3**
$\mathbf{a_1}$		e_{111}	e_{112}	e_{113}	e_{121}	e_{122}	e_{123}		e_{1T1}	e_{1T2}	e_{1T3}
$\mathbf{a_2}$		e_{211}	e_{212}	e_{213}	e_{221}	e_{222}	e_{223}		e_{2T1}	e_{2T2}	e_{2T3}
$\mathbf{a_3}$		e_{311}	e_{312}	e_{313}	e_{321}	e_{322}	e_{323}		e_{3T1}	e_{3T2}	e_{3T3}
$\mathbf{a_x}$		e_{x11}	e_{x12}	e_{x13}	e_{x21}	e_{x22}	e_{x23}		e_{xT1}	e_{xT2}	e_{xT3}
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
$\mathbf{a_m}$		e_{m11}	e_{m12}	e_{m13}	e_{m21}	e_{m22}	e_{m23}		e_{mT1}	e_{mT2}	e_{mT3}

- Alternativen-, Zeitpunkt- und Ergebnismenge sowie sämtliche Präferenzen bleiben während des Betrachtungszeitraumes unverändert.
- Auf dieser Basis muss der Akteur in $t = 0$ die **optimale Reihenfolge** von Entscheidungen zur Maximierung seines Nutzens identifizieren.[767]

Auch diese Entscheidungssituation kann als **„Spiel gegen die Natur“** bezeichnet werden. Der Akteur wird als Spieler interpretiert, dessen Gegenspieler (die Natur) nicht bewusst, sondern zufällig handelt. Im Unterschied zu den bisherigen Darstellungen jedoch erfolgt die Problemlösung – also die Auswahl der Handlungsalternativen – nacheinander.

Die grundsätzliche Vorgehensweise ist folgende:[768]

1. Der Akteur legt seine Nutzenfunktion fest und bestimmt damit seine **Höhenpräferenz**.
2. Auf dieser Basis kann die Alternativenmenge auf ineffiziente Alternativen untersucht werden.
3. Der Akteur wählt ein Präferenzfunktional zur Abbildung seiner individuellen **Risikopräferenz**.[769]
4. Der Akteur wählt ein Präferenzfunktional zur Abbildung seiner individuellen **Zeitpräferenz**.[770]

Ein allgemeingültiger **erster Schritt** besteht in der Umwandlung der Ergebnismatrix in eine Nutzenmatrix bzw. Entscheidungsmatrix. Dabei muss für die Ergebnisgrößen eine Nutzenfunktion bekannt sein oder ermittelt werden, so dass folgt: $u(e_{itz}) = f(e_{itz})$. Mit dieser Funktion wird also die **Höhenpräferenz** des Akteurs abgebildet. Dies ist detailliert an anderer Stelle erläutert.[771] Im weiteren Verlauf wird eine Nutzenfunktion der Form $u(e_{itz}) = e_{itz}$

[767] Prinzipiell ist in dieser Situation auch eine einstufige Entscheidung möglich. Aufgrund des geringen Erkenntniswertes wird diese Konstellation hier nicht betrachtet.

[768] Vgl. Dyckhoff (2007: 986).

[769] Vgl. Abschn. 1.5 auf S. 98.

[770] Vgl. Abschn. 1.7.2 auf S. 188.

[771] Vgl. Abschn. 1.7.2 auf S. 188.

unterstellt. Bei den Ergebnissen in der obigen Matrix handelt es sich deshalb um positiv-ökonomische Absolutwerte, wie z. B. Gewinn, Umsatz, Einzahlungen. Das bedeutet nicht, dass der Zahlenwert positiv sein muss, sondern, dass die verwendete Rechengröße ökonomisch erstrebenswert ist. Dies ist z. B. bei Auszahlungen oder Kosten nicht der Fall.

In Verbindung mit der Annahme einer monotonen Höhenpräferenz des Akteurs kann darauf aufbauend im **zweiten Schritt** die Alternativenmenge auf **Dominanz** untersucht werden. Da in der vorliegenden Konstellation zu mehreren Zeitpunkten mehrere Zustände möglich sind, wird die **Zustandsdominanz**[772] mit der **Zeitdominanz**[773] kombiniert. Dies führt zur **intertemporalen Zustandsdominanz** nach Def. 1.53.

Definition 1.53: *Gegeben ist die Alternativenmenge A, die Zeitpunktmenge $\tau = \{1,2,...,T\}$ und für jeden Zeitpunkt $t \in \tau$ die Zustandsmenge $Z = \{1,2,3,...,n\}$ mit $z \in Z$. Eine Aktion $a_k \in A$ heißt genau dann effizient bezüglich A, Z und τ, wenn es keine Aktion $a_q \in A$ gibt, für welche gilt:*

a) $u_{qtz} \geq u_{ktz}$ $\forall$ $z \in Z$ *in jedem* $t \in \tau$
sowie
b) $u_{qtz} > u_{ktz}$ *für mindestens ein* $z \in Z$ *in irgend einem* $t \in \tau$.

Wenn es eine Aktion $a_q \in A$ gibt, welche diese beiden Kriterien erfüllt, so dominiert a_q die Alternative a_k bzw. es kann formuliert werden: a_k ist ineffizient. Ineffiziente Alternativen können aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden.

Die **nächsten Schritte** bestehen in der Festlegung von Risiko- und Zeitpräferenz. Diese liegen offensichtlich kombiniert vor, was in der Einführung schon erwähnt wurden.[774] Im weiteren Verlauf werden diese Präferenzen **unabhängig** voneinander erfasst und diskutiert.[775] Für die Darstellung von Modellen, die beide Präferenzdimensionen gemeinsam erfassen, wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.[776]

Im Gegensatz zu den bisherigen Betrachtungen muss der Akteur seine Präferenzen zu mehreren Zeitpunkten äußern. Wichtig für die rationale Entscheidungsfindung ist dabei die Stabilität, also die Unveränderbarkeit der Präferenzen. In diesem Zusammenhang können zwei Situationen und Handlungsmaximen unterschieden werden:[777]

---

[772] Vgl. Anf. 1.24 auf S. 100.
[773] Vgl. Anf. 1.7.8 auf S. 211.
[774] Vgl. Abschn. 1.2.1 auf S. 8.
[775] Vgl. Dyckhoff (2007).
[776] Vgl. Gerber/Rhode (2010); Zuber (2011); Lu/Saito (2018); Rambaud/Sánchez Pérez (2020); Pennesi (2021).
[777] Vgl. Hammond (1988: 511–513); Machina (1989: 1639–1641); Gul/Lantto (1990: 167); Fischer (2004: 271–272).

- Die Präferenzen sind separierbar: Wenn die Präferenzen unabhängig voneinander sind, ist es für jeden Zeitpunkt unerheblich, wie die Ergebnisse bis zu diesem Zeitpunkt entstanden sind. Zu jedem Zeitpunkt wird die Entscheidung deshalb so getroffen, als wenn nur der gerade aktuelle Teil des Entscheidungsbaumes – ohne die anderen irrelevanten Verästelungen des Baumes – existieren würde. Dies wird als **Konsequenzialismus** bezeichnet. Für jeden Zeitpunkt und Zustand wird die originale Präferenzordnung, d. h. die ursprüngliche Ordnung verwendet. Erfahrungen (z. B. Enttäuschungen, Lernen) aus der bis dahin erfolgten Entwicklung existieren nicht. Konsequenzialismus wird bei rationaler Entscheidungsfindung in dynamischen Situationen immer (implizit) angenommen.
- Die Präferenzen sind nicht separierbar: Auch wenn die Präferenzen nicht unabhängig sind,[778] kann eine rationale Entscheidung erfolgen, wenn die Präferenzen dynamisch konsistent sind. Dynamische Konsistenz ist inhaltlich identisch mit der Zeitkonsistenz.[779] Das bedeutet, auch unter Berücksichtigung der bisher gemachten Erfahrungen bleiben die originalen Präferenzen erhalten.

Mit Blick auf die Auswahl der Funktionale zur Abbildung der Risiko- und der Zeitpräferenz können folgende Ergänzungen vorgenommen werden:

- **Risikopräferenz:** Häufig wird als Präferenzfunktional zur Abbildung der Risikopräferenz die Bayes-Regel (μ-Regel) verwendet.[780] Der Entscheidungsträger orientiert sich ausschließlich am Erwartungswert μ_i einer Alternative.[781] Damit wird der **Erwartungswert** sämtlicher Handlungsfolgen zum Präferenzfunktional. Statt der Bayes-Regel kann auch **der Erwartungsnutzen** und damit verbunden die verschiedenen Einstellungen zum Risiko (risikoavers, risikoneutral, risikofreudig) zum Einsatz kommen.[782] Das setzt die Erfüllung der entsprechenden Axiome voraus.[783] Aber auch wenn nicht die Erwartungsnutzentheorie, sondern ein anderes Risikopräferenzfunktional in Verbindung mit dem Roll-back-Verfahren angewendet wird, sind folgende Axiome zu erfüllen:[784]
  - Ordnung (Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität) und
  - **Unabhängigkeit**.[785]

[778] Vgl. Bspl. 1.22 auf S. 201.
[779] Vgl. Def. 1.51 auf S. 200.
[780] Vgl. Hax (1993: 174); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 247).
[781] Vgl. Abschn. 1.5.3 auf S. 104.
[782] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 251); Obermaier/Saliger (2020: 153–155).
[783] Vgl. Merksatz 1.9 auf S. 117.
[784] Vgl. LaValle/Wapman (1986); Hammond (1988: 511–513); Seidenfeld (1988: 275–284); Machina (1989: 1626–1628); Trost (1991: 167–169); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 287); Hammond/Zank (2014: 70–75).
[785] Vgl. Axiom 1.5.5 auf S. 116.

Da bei dem Roll-back-Verfahren einzelne Bereiche bzw. Teilbäume durch das damit verbundene bzw. daraus resultierende komprimierte Ergebnis ersetzt werden, ist die Unabhängigkeit eine notwendige Voraussetzung für dieses Verfahren. Das bedeutet, dass bei Einsatz der BAYES-Regel in Verbindung mit der Rückwärtsinduktion implizit das BERNOULLI-Prinzip und ein **risikoneutraler Akteur** angenommen wird. Damit wird die Verwendung der Erwartungsnutzentheorie in Verbindung mit nicht-risikoneutralen Einstellungen in diesem Zusammenhang erschwert. Das Roll-back-Verfahren erfordert in jedem Fall separierbare Präferenzen.[786]

- **Zeitpräferenz:** Es wurde im vorhergehenden Abschnitt bereits darauf hingewiesen, dass Zeitpräferenzen standardmäßig durch exponentielle Diskontierung erfasst werden. Das setzt **entweder** einen vollkommenen Kapitalmarkt voraus **oder** es wird angenommen, dass die Präferenzen des Akteurs den Anforderungen zur Bildung eines additiven intertemporalen Präferenzfunktionals genügen. Diese sind:[787]
  - Ordnung (Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität),
  - Stetigkeit,
  - wechselseitige Unabhängigkeit und
  - Stationarität.

Im Folgenden wird die BAYES-Regel (μ-Regel) eingesetzt bzw. ein Akteur unterstellt, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte und risikoneutral ist. Auf Basis dieser Annahmen (sowie der Prämisse einer monotonen Höhenpräferenz des Akteurs $u(e) = e$) wird die Regel für mehrstufige Entscheidungen bei Risiko formuliert (vgl. E.-regel 1.20).

Entscheidungsregel 1.20: *Bei Verwendung der* BAYES*-Regel als Präferenzfunktional ist diejenige Folge von Entscheidungen optimal, die die Summe der diskontierten Erwartungswerte der Ergebnisse maximiert. Es gilt:*

$$\sum_{t=1}^{T} E\left[e_t(x_{t-1}, d_{t-1})\right] \cdot q^{-t} \rightarrow \underset{d_0,\ldots,d_{T-1}}{Max} !$$

Zusätzlich zu den bisher vorgestellten Bestandteilen des Entscheidungsbaumes sind zwei Elemente erforderlich:

- Z **- Zufallsknoten:** Eintritt des Zufallsereignisses
- z **- Zufallskante:** eine Kante, welche eine Folge des Zufallsereignisses und deren Wahrscheinlichkeit repräsentiert

[786] Vgl. Machina (1989: 1655–1656).

[787] Vgl. Abschn. 1.7.2 auf S. 188. Die Eigenschaften Wesentlichkeit und begrenzte Lösbarkeit sind primär Anforderungen an die Struktur des Problems, weshalb sie hier nicht aufgeführt werden.

Werden diese Bestandteile zusammengefügt, entsteht der Entscheidungsbaum bei Risiko (vgl. Abb. 1.37). Auf diesem basiert der **zweite Hauptbestandteil** des Verfahrens, die Ermittlung der optimalen Handlungsreihenfolge. Dazu werden in einem **ersten Schritt alle möglichen Alternativen** und Ergebnisse (z. B. Kosten, Umsätze, Kapitalwerte oder EVA) ermittelt.

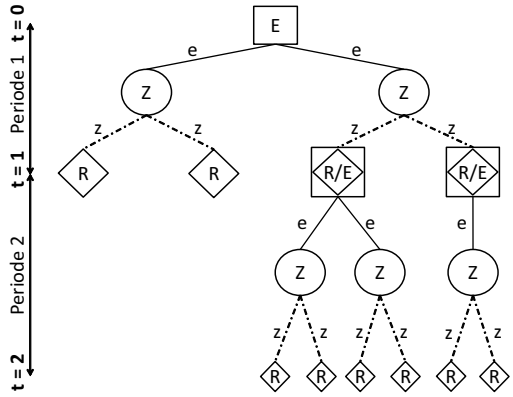


Abb. 1.37: Formalstruktur eines Entscheidungsbaumes bei Risiko. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Götze (2014: 408).

In einem **zweiten Schritt** wird – beginnend mit den zeitlich letzten Entscheidungsmöglichkeiten – die in der Zukunft relativ vorteilhafte Entscheidungsalternative ermittelt. Dies ist, wie bereits dargestellt wurde, mit der vollständigen Enumeration oder dem Optimalitätsprinzip nach Bellman möglich.[788]

Beispiel 1.25 dient der Veranschaulichung.

Beispiel 1.25:

In Ihrem Unternehmen sind die vorhandenen Kapazitäten ausgeschöpft. Deshalb ist die Frage zu entscheiden, ob eine neue Maschine angeschafft werden soll oder stattdessen Überstunden angeordnet werden sollen. Diese Frage stellt sich auch im nächsten Jahr wieder. Das Szenario ist der Abbildung 1.38 zu entnehmen. Die Zahlen am Ende des Jahres 2 stellen den Gewinn dar. Dabei sind jedoch die Kosten der Neuanschaffung der Maschine in Höhe von 100 Geldeinheiten nicht berücksichtigt. Die Stückkosten verändern sich durch den Kauf der Maschine nicht.

Ihre Aufgabe ist die Ermittlung der optimalen Vorgehensweise. Sie orientieren sich dabei am Erwartungswert der Alternativen. Da es sich um eine Überschlagsrechnung handelt, verzichten Sie auf die Diskontierung.

Im ersten Schritt werden für den letzten Zeitpunkt zu dem eine Entscheidung möglich ist - Zeitpunkt $t = 1$ - die Erwartungswerte der Kapitalwerte $EW[\tilde{C}_1]$ ermittelt. Von den Knoten wird der Resultats- und Entscheidungsknoten R/E_1 detailliert betrachtet. In

[788] Vgl. Abschn. 1.9.1 auf S. 221.

diesem Knoten muss sich der Akteur zum Zeitpunkt $t = 1$ entscheiden, ob er Überstunden anordnet oder eine zusätzliche, zweite Maschine installiert. Er muss also zwischen den zwei Erwartungswerten der Kapitalwerte EW_1 und EW_2 entscheiden.

$$EW_1[\tilde{C}_{1;\ddot{U}S}] = 0{,}5 \cdot 1.200 \quad + 0{,}5 \cdot 980 \quad = 1.090$$
$$EW_2[\tilde{C}_{1;ZNM}] = 0{,}5 \cdot 1.350 \quad + 0{,}5 \cdot 1.250 - 100 \quad = 1.200^*$$

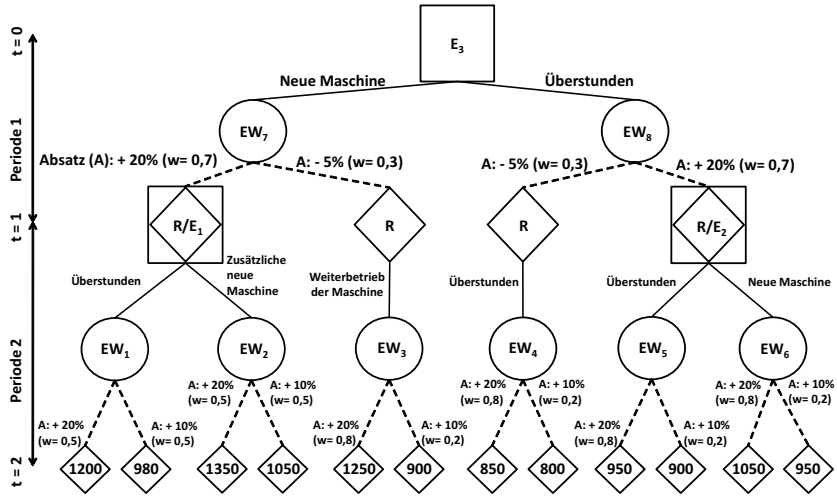


Abb. 1.38: Entscheidungssituation für Beispiel 1.25. Quelle: Eigene Darstellung.

Es zeigt sich, dass der Erwartungswert der Alternative „Zusätzliche Maschine" im Entscheidungsknoten R/E_1 größer ist als der Erwartungswert der Alternative „Überstunden". Diese Betrachtung wird für den Resultats- und Entscheidungsknoten R/E_2 verwendet:

Knoten R/E_2 :

$$EW_5[\tilde{C}_{1;\ddot{U}S}] = 0{,}8 \cdot 950 \quad + 0{,}2 \cdot 900 \quad = 940^*$$
$$EW_6[\tilde{C}_{1;NM}] = 0{,}8 \cdot 1.050 \quad + 0{,}2 \cdot 950 - 100 \quad = 930$$

*Die mit dem *-Zeichen versehenen Werte stellen die relativ vorteilhaften Werte des jeweiligen Knotens dar. Für diese Handlungsalternativen wird sich der rational handelnde Entscheidungsträger in $t = 1$ entscheiden. Befindet er sich im Knoten R/E_1, so ist eine zusätzliche Maschine besser, als Überstunden anzuordnen. Befindet sich der Akteur hingegen im Knoten R/E_2, so wären Überstunden vorteilhafter. In der Ausgangsdarstellung aus Abbildung 1.38 werden nun die ermittelten Erwartungswerte der Kapitalwerte eingetragen und die jeweils relativ nicht-vorteilhafte Alternative wird durch Streichung des Entscheidungskantens aus der weiteren Betrachtung eliminiert (vgl. Abb. 1.39).*

Nun wandert der Entscheidungsträger in der Zeit "ein Jahr zurück" zum Zeitpunkt $t = 0$ in den Entscheidungsknoten E_3. In diesem Knoten muss er sich zwischen den Erwartungswerten EW_7 und EW_8 entscheiden. Zuerst wird der Wert für EW_7 ermittelt:

$$
\begin{aligned}
EW_7[\tilde{C}_{0;NM}] &= 0{,}7 \cdot max(R/E_1) && + \ 0{,}3 \cdot EW_3 && -100 \\
&= 0{,}7 \cdot 1.200 && + \ 0{,}3 \cdot (0{,}8 \cdot 1.050 + 0{,}2 \cdot 900) && -100 \\
&= 1.046
\end{aligned}
$$

Für den Erwartungswert EW_8 gilt:

$$
\begin{aligned}
EW_8[\tilde{C}_{0;\ddot{U}S}] &= 0{,}7 \cdot max(R/E_2) && + \ 0{,}3 \cdot EW_4 \\
&= 0{,}7 \cdot 940 && + \ 0{,}3 \cdot (0{,}8 \cdot 850 + 0{,}2 \cdot 800) \\
&= 910
\end{aligned}
$$

Der Erwartungswert der Installation der neuen Maschine EW_7 ist der größere der beiden und stellt die optimale Handlungsalternative dar. Der Investor sollte also in $t = 0$ eine neue Maschine anschaffen, um den Erwartungswert des Kapitalwertes zu maximieren. Wenn die Absatzzahlen nach einem Jahr sinken, wird diese Anlage weiter betrieben. Sollten die Zahlen steigen, kann eine zusätzliche Maschine installiert werden. Die unterlegene Alternative wird wiederum durch Streichung der Entscheidungskante eliminiert (vgl. Abb. 1.39).

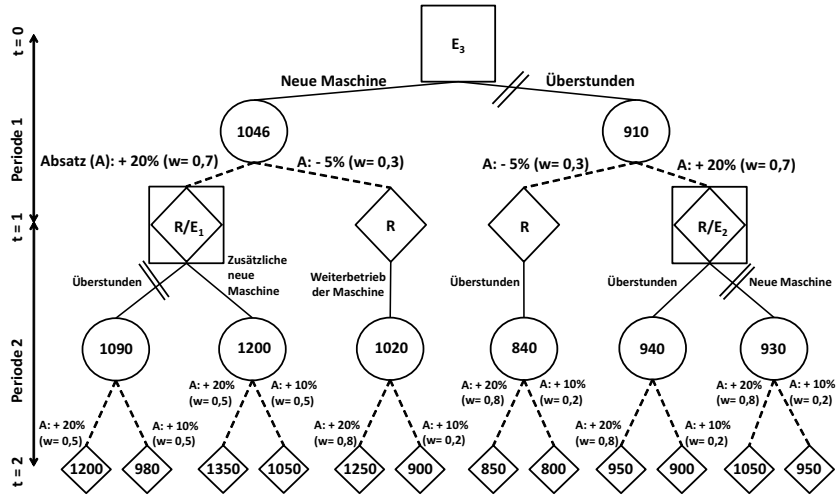


Abb. 1.39: Ergebnisse für Beispiel 1.25. Quelle: Eigene Darstellung.

Mit diesem Verfahren können die Handlungssequenzen detailliert abgebildet werden und eine Entscheidung unter Berücksichtigung von Zufallsereignissen getroffen werden.

1.9.4 Zusammenfassende Kritik

Die Verfahren basieren auf einer Reihe von Annahmen, die im einführenden Abschnitt vorgestellt wurden.[789] Besonderes Augenmerk ist auf folgende Punkte zu richten:[790]

- Die Ergebnisse jeder Handlungsalternative zu jedem Zeitpunkt müssen bekannt sein.
- Im Fall von Risiko müssen die Anzahl der Zustände sowie deren Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt sein.
- Alternativen- und Ergebnismenge sowie Präferenzen bleiben während des Planungszeitraumes unverändert.
- Das Roll-back-Verfahren liefert nur für einen erwartungsnutzen-maximierenden Akteur die optimale Alternative und Vorgehensweise, da es die Erfüllung des **Unabhängigkeits-Axioms** erfordert.[791]
- Das Roll-back-Verfahren erfordert in jedem Fall separierbare Präferenzen.[792]
- Der Abbildungs- und Berechnungsaufwand steigt mit zunehmender Alternativenanzahl und mit wachsendem Betrachtungszeitraum enorm an, so dass die Übersichtlichkeit nur bei wenig komplexen Situationen gewährleistet ist.

Es existieren vielfältige Software-Angebote zur Erstellung von Entscheidungsbäumen, was in Verbindung mit steigender Rechnerleistung und verbesserten Grafikfähigkeiten die Anwenderfreundlichkeit und die Verbreitung im praktischen Einsatz wesentlich erhöht.

Ein grundlegender Kritikpunkt besteht in der Annahme der **Unveränderlichkeit** sämtlicher Informationen, Rahmenbedingungen sowie der Präferenzen. Die mit den Modellen ermittelte optimale Entscheidungsfolge ist aus heutiger Sicht optimal, also auf Basis der heute verfügbaren Informationen. Die Rahmendaten – wie z. B. Zahlungsgrößen, Zeitpunkte, Alternativenmenge – können sich im Zeitverlauf jedoch ebenso ändern, wie die Präferenzen des Akteurs. Offensichtlich wurde das Problem von stabilen Präferenzen bei intertemporalen Entscheidungen anhand der Eigenschaften Stationarität, Zeitinvarianz und Zeitkonsistenz.[793] Bei den jetzt vorgestellten mehrstufigen Prozessen wird für jede Entscheidung in der Zukunft von gleichbleibenden

[789] Vgl. Abschn. 1.9.1 auf S. 221.

[790] Vgl. Blohm/Lüder/Schaefer (2012: 267–268); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 246–251).

[791] Vgl. LaValle/Wapman (1986); Hammond (1988: 511–513); Seidenfeld (1988: 275–284); Machina (1989: 1626–1628); Gul/Lantto (1990: 165–167); Trost (1991: 167–169); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 287).

[792] Vgl. Machina (1989: 1655–1656).

[793] Vgl. Def. 1.50 auf S. 198, Def. 1.51 auf S. 200 sowie Def. 1.52 auf S. 202.

Werten ausgegangen. Das ist ein wesentlicher Kritikpunkt gegenüber dieser Vorgehensweise. Jede Information, die als sicher angenommen wird, kann sich theoretisch im Zeitablauf als unsicher oder unzutreffend erweisen. Bei dem Verfahren der rekursiven Bewertung geht der Akteur jedoch rückwärts durch den Baum, in der Annahme von Sicherheit bzw. von zutreffenden Prognosen. Sind diese jedoch schlussendlich nicht gegeben, stellt sich die Frage nach der Optimalität des Ergebnisses. Es bestehen zwei "Auswege" aus dieser Situation:

- Es wird die Entscheidung getroffen eine Alternative zu realisieren, z. B. ein Investitionsprojekt durchzuführen oder ein bestehendes Projekt zu beenden. Gleichzeitig wird festgelegt, dass und zu welchem Zeitpunkt geprüft wird, ob neue Informationen vorliegen, die eine Revision der Entscheidung erfordern.
- Die Realisierung der Maßnahme wird aufgrund der Unsicherheit über die Informationen aufgeschoben. Die Zeit wird genutzt, um bessere Informationen zu gewinnen. Ebenso ist es denkbar, dass in dieser Zeit heute bekannte Ereignisse eintreten (z. B. Wahlen, Urteile, Hauptversammlungen), von denen neue Informationen erwartet werden. D. h. auch wenn das Modell die Unterlassungsalternative nicht als die in $t = 0$ optimale Alternative identifiziert, wird die Maßnahme aufgeschoben. Dieser Gedanke wird an anderer Stelle ausführlich ausgearbeitet.[794]

1.10 Kritische Würdigung

Die normative Entscheidungstheorie ist zu einer wichtigen Grundlage ökonomischer Theorien geworden, gibt sie doch Hilfestellung bei der möglichst rationalen Verfolgung von Zielen. Damit ist jedoch noch kein Urteil über die ethisch-moralische Zulässigkeit der Ziele getroffen.[795] Zugespitzt formuliert ist die normative Entscheidungstheorie amoralisch, da sie den Akteur bei der Nutzenmaximierung unterstützt, ohne die Art des maximierten Nutzens zu hinterfragen. Die präskriptive Entscheidungstheorie kann durch folgende Merkmale charakterisiert werden:[796]

- **Konzentration auf den Auswahlakt von Entscheidungen:** Es wurde deutlich, dass im Mittelpunkt der Darstellungen die Entscheidung selbst und die Auswahl der besten Alternative steht. Der Weg, welcher bis dahin führte ist nicht relevant. Damit bleibt auch unklar, ob die Alternativenmenge die erfolgversprechendsten Lösungsmöglichkeiten beinhaltet

[794] Vgl. 1. Band, Abschn. 5.4 auf S. 503.
[795] Vgl. Küpper (2018: 60).
[796] Vgl. Wolf (2020: 128–131).

oder ob die besten Favoriten schon vorher aufgrund suboptimaler Verfahren oder aufgrund von unternehmenspolitischen Differenzen eliminiert wurden. Ebenso wenig von Bedeutung ist die Frage, ob und wie die Realisierung der optimalen Alternative durchführbar ist. Deshalb sind diese Aufgaben dem Investitionscontrolling zugeordnet worden.[797]

- **Kontextabhängigkeit und Komplexitätsreduktion:** Die verschiedenen Modelle sind für spezielle Arten von Situationen entwickelt worden, weshalb sie mit spezifischen Eigenschaften versehen sind. Sie können als Prisma interpretiert werden, durch das die reale Welt hindurch betrachtet und analysiert wird. In Abhängigkeit davon, welches Prisma verwendet wird, erscheint ein entsprechendes Abbild der Realwelt. Die Art des Prismas entscheidet darüber, wie die Welt gesehen wird. Dabei wird die reale Komplexität notwendigerweise reduziert, um das Problem handhabbar und lösbar zu machen. Die Modelle sind als Konstruktionen der Realität zu interpretieren.[798]
- **Normative Intention und homo oeconomicus:** Die Bezeichnung als präskriptive Theorie beinhaltet den Anspruch und gleichzeitig die Einschränkung auf die Entwicklung von normativen Vorgaben. Dazu zählt ebenfalls, dass sämtliche menschliche Facetten ausgeblendet werden. Der Entscheidungsträger ähnelt mehr einer technokratischen Instanz denn einem menschlichen Wesen. Diese Reduktion ist jedoch in einem ersten Schritt zur Problemlösung erforderlich. Mit den menschlichen Eigenschaften der Akteure beschäftigt sich der komplementäre Teil bzw. der nächste Schritt, die deskriptive Entscheidungstheorie.[799]
- **Formalwissenschaftlicher Charakter:** Die vorstehend diskutierten Eigenschaften sichern eine formale Sprache und eine Art der Modellierung die – für die jeweilige Situation – so exakt wie möglich ist. Durch diese strenge formal-logische Methodik ist die Entscheidungstheorie durch eine hohe Klarheit gekennzeichnet.[800] Um allgemeingültig sein zu können, ist eine gewisse Abstraktion erforderlich. Neben dem Ergebnis selbst steht die Art der Modellierung im Zentrum. Deshalb wurde in sämtlichen Abschnitten auch versucht, den Zusammenhang zwischen den verwendeten Annahmen und den Modellen herzustellen. Die verwendeten Axiome und Anforderungen an die Präferenzen stellen den Anschluss an die reale Welt dar und verhindern die Klassifikation als reine Formaltheorie.

Die präskriptive Entscheidungstheorie zeigt auf, wie sich der Akteur verhalten sollte, wenn er rational handeln wöllte. Sie beansprucht keinen empirischen Wahrheitsgehalt, d. h. sie enthält keine empirisch prüfbaren Aussagen. Selbstverständlich können die verwendeten Axiome auf Realitätsnähe

[797] Vgl. 1. Band, Abschn. 2.1.3.1 auf S. 93.
[798] Vgl. 1. Band, Abb. 2.20 auf S. 131.
[799] Vgl. Kapitel 2 auf S. 287 sowie Abschn. 3.3 auf S. 425.
[800] Vgl. Küpper (2018: 60).

geprüft werden. Prüfbar sind die darauf basierenden Aussagen und Theoreme lediglich auf logische Wahrheit, nicht jedoch auf faktische Wahrheit. Dies ist ein gemeinsames Merkmal der Formalwissenschaften.[801] Die präskriptive Entscheidungstheorie bietet ein reichhaltiges Instrumentarium zur Problemlösung. Wie auch in anderen Bereichen des Lebens und der Ökonomie liegt es am Entscheidungsträger, für die vorliegende Situation das passende Instrument auszuwählen. Die vorstehenden Abschnitte können als Richtschnur bei dieser Auswahl dienen. Es sei jedoch schon an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass trotz aller Bemühungen zur Identifikation der einen rationalen Entscheidung aus ein und derselben Situation völlig unterschiedliche, sich sogar widersprechende Schlussfolgerungen gezogen werden können, die jede für sich betrachtet rational sind. Das wird an anderer Stelle erläutert.[802]

1.11 Aufgaben und Lösungen

1.11.1 Aufgaben

Aufgabe 1.1:

Gegeben ist in den Tabellen 1.63 und 1.64 jeweils eine Wertfunktion für zwei unterschiedliche multikriterielle Problemstellungen mit jeweils zwei Attributen X und Y.

Tab. 1.63: Problem N° 1.

		Y			
	v (x,y)	y_1	y_2	y_3	y_4
X	x_1	8	10	9	12
	x_2	2	11	9	14
	x_3	1	3	2	4

Tab. 1.64: Problem N° 2.

		Y			
	v (x,y)	y_1	y_2	y_3	y_4
X	x_1	12	9	8	5
	x_2	13	11	10	9
	x_3	10	8	7	4
	x_4	7	6	5	2

[801] Zur Unterscheidung von logischer und empirischer Wahrheit vgl. Chmielewicz (1994: 90–95).

[802] Vgl. Abschn. 2.3 auf S. 301.

Untersuchen Sie beide Relationen auf Präferenzunabhängigkeit!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 254.

Aufgabe 1.2:

Gegeben ist die folgende Entscheidungsmatrix:

Teilziel / Teilziel	k_1	k_2	k_3
a_1	10	30	80
a_2	50	50	90
a_3	50	110	50
a_4	70	30	80
a_5	60	90	120

a) Prüfen Sie die Alternativen auf Dominanz!

b) Ihnen ist Ziel 1 halb so wichtig wie Ziel 2. Gleichzeitig wissen Sie, dass Ihnen Ziel 2 doppelt so wichtig ist wie Ziel 3.

   1. Ermitteln Sie die fehlende Relation durch einen konsistenten Paarvergleich!
   2. Ermitteln Sie die daraus resultierenden Gewichtungsfaktoren!
   3. Ermitteln Sie die optimale Alternative durch Zielgewichtung unter Verwendung der ermittelten Gewichtungsfaktoren!

c) Ermitteln Sie die optimale Alternative mit:

   1. der KÖRTH-Regel,
   2. dem Goal-Programming, wobei folgende Wunschzielwerte angenommen werden: $u_1^* = 50$, $u_2^* = 100$, $u_3^* = 100$,
   3. der Methode der lexikografischen Ordnung bei Verwendung einer Zielordnung $k_2 \succ k_3 \succ k_1$!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 254.

Aufgabe 1.3:

Im Rahmen der Weihnachtsvorbereitung möchte Bäcker BRÄSEL sein Sortiment an Weihnachtsgebäck erweitern. Nach umfangreicher Durchsicht seines Familienarchivs hat er vier Rezepte in die engere Auswahl genommen. Diese Rezepte unterscheiden sich hinsichtlich folgender Punkte:

- Reifezeit der Gesamtmenge Teig,
- Gewinn je Kilogramm verkauften Produkts,
- Belegungszeit des Backofens je Kilogramm.

Die Detailinformationen zu den Ausprägungen dieser Bewertungsdimensionen bei den vier Rezepten ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Teilziel / Rezept	Reifezeit[Tage]	Gewinn[€/kg]	Belegungszeit [Stunden/kg]
$\mathbf{R_1}$	20	50	6
$\mathbf{R_2}$	10	50	7
$\mathbf{R_3}$	20	40	5
$\mathbf{R_4}$	15	45	8

Dem Bäcker ist es wichtig, dass er einen möglichst hohen Gewinn erzielt und dass sowohl die Reife- als auch die Belegungszeit möglichst gering sind. Die Nutzenmessung des Gewinns stellt für den Bäcker kein Problem dar – er verwendet die Kilogramm-Gewinn-Margen. In Bezug auf die erforderlichen Zeitdimensionen ist dem Bäcker noch nicht richtig klar, wie er die Nutzenmessung durchführen soll. Er entscheidet sich schlussendlich dazu, den jeweils höchsten Wert in der Dimension mit dem Nutzenwert null zu belegen und die Abstände der anderen Rezepte zu diesem Wert als Nutzenwerte zu verwenden.

a) Erstellen Sie mit diesen Informationen eine Entscheidungsmatrix!

b) Prüfen Sie die Rezepte auf Dominanz!

c) Welche Präferenzordnung der Rezepte ergibt sich, wenn Sie das Gewinnziel mit 75 % gewichten und die verbleibenden Ziele gleich wichtig einschätzen?

d) Zu welcher Präferenzordnung der Rezepte gelangen Sie mit der KÖRTH-Regel?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 256.

Aufgabe 1.4:

Ein Akteur möchte ein Auto erwerben. Als für ihn wichtige Kriterien definiert er folgende Eigenschaften:

- Ästhetik (b_1),
- Platzangebot (b_2),
- Zuverlässigkeit (b_3),
- Umweltfreundlichkeit (b_4).

Bevor sich der Akteur auf die Suche begibt, muss er diese Kriterien gewichten. Dies geschieht mit der Paarvergleichsmatrix aus folgender Tabelle:

Teilziel / Teilziel	$\mathbf{b_1}$ (Ä)	$\mathbf{b_2}$ (P)	$\mathbf{b_3}$ (Z)	$\mathbf{b_4}$ (U)
$\mathbf{b_1}$ (Ä)	1	7	5	1/4
$\mathbf{b_2}$ (P)		1	1	1/8
$\mathbf{b_3}$ (Z)			1	1/5
$\mathbf{b_4}$ (U)				1

a) Ermitteln Sie die Gewichte der einzelnen Teilkriterien mittels Eigenwertverfahren!

b) Beurteilen Sie die Konsistenz der Matrix auf Basis der Konsistenzrelationen!

c) Beurteilen Sie die Kriterien im Hinblick auf die Präferenzunabhängigkeit!

Nach der Ermittlung der vier Kriteriengewichte hat sich der Akteur einen Überblick über das verfügbare Angebot verschafft. Aus der Menge der Angebote hat er vier Alternativen A, B, C und D herausgesucht. Diese bewertet er mittels der Paarvergleichsmatrizen, die in folgender Tabelle zu sehen sind:

Alternativenbewertung hinsichtlich b_1

	A	B	C	D
A	1	1/9	1	1/8
B		1	8	5
C			1	1/4
D				1

Alternativenbewertung hinsichtlich b_2

	A	B	C	D
A	1	7	9	5
B		1	1	1/2
C			1	1/5
D				1

Alternativenbewertung hinsichtlich b_3

	A	B	C	D
A	1	2	5	1
B		1	3	2
C			1	1/4
D				1

Alternativenbewertung hinsichtlich b_4

	A	B	C	D
A	1	5	1/5	1/3
B		1	1/9	1/4
C			1	4
D				1

d) Ermitteln Sie die AHP-Nutzwerte der Alternativen!

e) Beurteilen Sie die Konsistenz der Matrizen auf Basis der Konsistenzrelationen!

f) Begründen Sie das Ergebnis mit Blick auf die Zielgewichte!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 257.

Aufgabe 1.5:

Im Vorstand der Stadtwerke Berlin ist über die Zukunft der Energieversorgung der Stadt zu entscheiden. Im Zentrum steht die Festlegung der grundsätzlichen Ausrichtung, also der strategischen Planung. Aus den herrschenden Rahmenbedingungen und dem Zielsystem des Unternehmens ergeben sich die folgenden Fundamentalziele:

- Versorgungssicherheit (b_1),
- Umweltverträglichkeit (b_2) sowie
- Wirtschaftlichkeit (b_3).

In mehreren Arbeitskreisen und Vorstandsmeetings wurden die Relationen zwischen diesen Zielen so festgelegt, wie es in folgender Tabelle zu sehen ist:

Teilziel / Teilziel	b_1 (V)	b_2 (U)	b_3 (W)
b_1 (V)	1	5	1
b_2 (U)	1/5	1	1/9
b_3 (W)	1	9	1

Für die strategische Neupositionierung wurden drei Alternativen erarbeitet. Deren Bewertung hinsichtlich der Erfüllung der drei Zielstellungen wurde bereits vorgenommen und ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

Alternativenbewertung hinsichtlich b_1	Alternativenbewertung hinsichtlich b_2	Alternativenbewertung hinsichtlich b_3
A B C A 1 5 1/3 B 1/5 1 1/9 C 3 9 1	A B C A 1 1/3 3 B 3 1 5 C 1/3 1/5 1	A B C A 1 1/3 1/5 B 3 1 1 C 5 1 1

a) Ermitteln Sie die optimale Alternative auf Basis der AHP-Nutzwerte!
b) Beurteilen Sie die Konsistenz der Matrizen auf Basis der Konsistenzrelationen!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 258.

Aufgabe 1.6:

Gegeben ist die folgende Entscheidungsmatrix:

Zustand / Aktion	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	90	10	0	0
a_2	30	10	20	30
a_3	85	3	3	4
a_4	110	10	-10	5
a_5	30	8	12	8
a_6	30	20	10	20

a) Prüfen Sie die Alternativen auf Dominanz!
b) Ermitteln Sie die optimale Alternative mit:
   1. der Mini-Max-Regel,
   2. der Maxi-Max-Regel,
   3. dem HURWICZ-Prinzip bei einem Wert von $\lambda = 0{,}25$ für den Optimismus-Parameter,
   4. der LAPLACE-Regel,
   5. der Regel des geringsten Bedauerns!

c) Wie könnte anstelle der entwickelten Regel des Bedauerns eine Regel des Frohlockens gestaltet sein? Verwenden Sie bei Ihren Überlegungen den Gedanken, dass dieses Frohlocken die Freude darüber ausdrückt, dass es nicht ganz so schlimm gekommen ist, wie es schlimmstenfalls hätte kommen können! Formulieren Sie auf Basis dieser Überlegungen:

   a. Eine der Mini-Max-Regel analoge Regel, die das minimale Frohlocken maximiert,
   b. Eine der Maxi-Max-Regel analoge Regel, die das maximale Frohlocken maximiert!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 259.

Aufgabe 1.7:

Entnehmen Sie der folgenden Tabelle die prognostizierten Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände für die oben verwendete Entscheidungsmatrix:

Zustand	z_1	z_2	z_3	z_4
Wahrscheinlichkeit	0,20	0,40	0,25	0,15

Ermitteln Sie die optimale Alternative gemäß:

a) Der BAYES-Regel!
b) Dem Erwartungswert-Standardabweichungs-Prinzip! Verwenden Sie für den Risikopräferenzfaktor einen Wert von $\gamma = 0{,}50$!
c) Dem Erwartungswert-Semistandardabweichungs-Prinzip! Verwenden Sie für den Risikopräferenzfaktor einmal einen Wert von $\gamma = 0{,}50$ und einmal von $\gamma = -0{,}50$!
d) Dem HODGES-LEHMANN-Prinzip! Verwenden Sie für den Vertrauensfaktor einen Wert von $\varepsilon = 0{,}25$!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 260.

Aufgabe 1.8:

Ein Entscheidungsträger hat bei der BERNOULLI-Befragung zu seiner Einschätzung der Geldwerte eines unsicheren Investitionsprojektes Angaben gemacht, die in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind.

Vorgegebene Verteilung			Einschätzung des Akteurs
e	1000	600	$\sim$ 640
w_p	0,2	0,8	
e	1000	600	$\sim$ 680
w_p	0,4	0,6	
e	1000	600	$\sim$ 720
w_p	0,6	0,4	
e	1000	600	$\sim$ 800
w_p	0,8	0,2	

a) Ermitteln Sie die Risikonutzenfunktion des Akteurs! Normieren Sie dazu die RNF so, dass $RN(e_{max}) = 1$ und $RN(e_{min}) = 0$!

b) Stellen Sie den Zusammenhang der Werte grafisch dar!

c) Durch welche Risikoeinstellung ist der Akteur gekennzeichnet?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 261.

Aufgabe 1.9:

Das Land Brandenburg verfügt seit mehreren Jahrzehnten über die Information, dass im südlichen Teil des Bundeslandes Kupfervorkommen lagern. Die Untersuchungsergebnisse sind jedoch schon ca. 30 Jahre alt. Da der Kupferpreis in den letzten Jahren gestiegen ist und gleichzeitig die technologischen Möglichkeiten verbessert wurden, reifen in dem zuständigen Ministerium Überlegungen zur weiteren Vorgehensweise. Das Land ist Eigentümer einer Bergbaugesellschaft, die die Ausbeutung durchführen soll. Die Kosten der Ausbeutung belaufen sich auf 2 Mio. €. Es stehen die folgenden zwei Handlungsmöglichkeiten zur Auswahl:

- **Variante A:** Es werden keine weiteren Untersuchungen vorgenommen, da die vorliegenden Ergebnisse als ausreichend eingestuft werden. Deshalb wird sofort (in t=0) mit der Ausbeutung begonnen. Dies verspricht mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % in t=1 den Barwert einer langjährigen Zahlungsreihe von 5 Mio. €. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % ist jedoch lediglich mit einem Barwert in Höhe von 1 Mio. € zu rechnen.
- **Variante B:** Es werden in t=0 weitere Untersuchungen durchgeführt. Diese verursachen Kosten in Höhe von 500.000 €. Mit jeweils einer 50 %igen Wahrscheinlichkeit liegt im Zeitpunkt t=1 entweder ein günstiges oder ein ungünstiges Ergebnis vor. Das ungünstige Ergebnis ist so zu interpretieren, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % in t=2 ein Barwert der Zahlungsreihe in Höhe von 1 Mio. € erwirtschaftet wird und mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ein Barwert von 5 Mio. € erzielt werden kann. Im Fall des günstigen Ergebnisses wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % in t=2 ein Barwert der Zahlungsreihe in Höhe von 5 Mio. € erreicht und mit einer 10 %igen Wahrscheinlichkeit wird in t=2 lediglich

ein Barwert von 1 Mio. € erwirtschaftet. In jeder Stufe besteht die Möglichkeit zum Abbruch des Verfahrens.

Ermitteln Sie die optimale Vorgehensweise bei einem Kalkulationszinssatz von 10 % jährlich! Entwerfen Sie dazu den Entscheidungsbaum und ermitteln Sie die Alternative mit dem maximalen Erwartungswert des Kapitalwertes!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 262.

Aufgabe 1.10:

Ein Unternehmen verfügt über die Möglichkeit, für ein neu patentiertes und auf dem Markt einzuführendes Produkt in $t = 0$ entweder:

- eine große Produktionsanlage (MA_0) zu errichten und diese über 2 Jahre zu betreiben, oder
- eine kleine Produktionsanlage zu errichten (MB_0), die zum Zeitpunkt t=1 je nach Marktlage entweder:
  - ohne Ersatz liquidiert wird, oder
  - durch eine Folgeanlage für eine weitere Periode ersetzt wird.

Aus heutiger Sicht stehen als Folgeanlage zwei Varianten zur Auswahl: die Anlage MC_1 und die Anlage MD_1. Die Entwicklung des Absatzes ist unsicher. Das Unternehmen plant mit zwei Szenarien: im Fall einer guten Absatzentwicklung werden die Anlagen auf Höchstlast betrieben, wohingegen im Fall einer ungünstigen Entwicklung eine verschleißarme Nutzung der Anlagen möglich ist. Daraus resultierende Unterschiede in den Stückkosten werden durch unterschiedliche Stückerlöse kompensiert. Es gelten weitere Eingangsgrößen aus folgender Tabelle:

Anlage / Kenngrößen	MA_0	MB_0	MC_1	MD_1
I_0 [€]	1.000.000	500.000		
I_1 [€]			500.000	550.000
K_{Fix} [€/Jahr]	120.000	50.000	50.000	40.000
db [€/Stück]	40	50	50	60
L_N [€]	100.000	50.000	50.000	50.000
Produktionsmengen [Stück/Jahr]				
Große Menge	20.000	10.000	25.000	20.000
Geringe Menge	10.000	10.000	15.000	12.000

Die Wahrscheinlichkeiten für die Entwicklung der Nachfrage nach den Produkten sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

In der 1. Periode		In der 2. Periode	
niedrig	$\varpi(N) = 0{,}5$	niedrig	$\varpi(N,N) = 0{,}6$
		hoch	$\varpi(N,H) = 0{,}4$
hoch	$\varpi(H) = 0{,}5$	niedrig	$\varpi(H,N) = 0{,}3$
		hoch	$\varpi(H,H) = 0{,}7$

Ermitteln Sie die kapitalwertmaximale Investitionsvariante bei einem Kalkulationszinssatz von i= 10% mit dem Entscheidungsbaumverfahren! Verwenden und vervollständigen Sie die Abbildung 1.40!

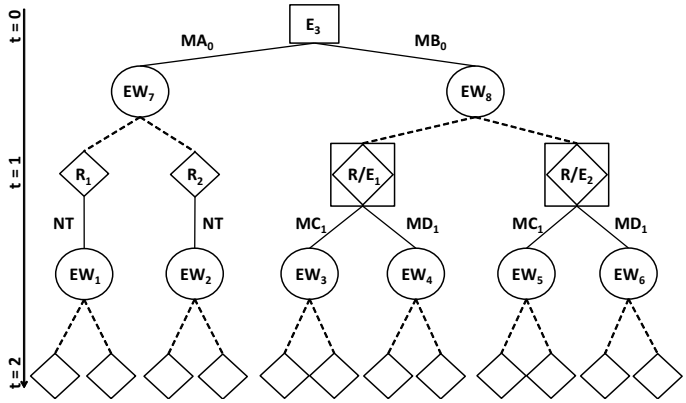


Abb. 1.40: Struktur des Entscheidungsproblems.

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 264.

Aufgabe 1.11:

Ein Akteur arbeitet an einem Forschungsprojekt beim Pharmaunternehmen „Wizer“ GmbH. Gemäß Tarifvertrag beträgt sein Nettoeinkommen 5,5 Tsd. € pro Monat. In den nächsten Jahren ist keine Tarifanpassung zu erwarten. Vor kurzem erhielt er ein attraktives Jobangebot für eine ähnliche Position beim Pharmaunternehmen „Meyer“ GmbH. Soll er das Angebot annehmen, wenn sein neues Jahresnettoeinkommen 69.000 € betrüge, jedoch folgende zusätzliche Kosten entstünden: 2.000 € für den Umzug zum neuen Arbeitsort sowie 100 € für die Monatsfahrkarte im öffentlichen Nahverkehr? Der Akteur handelt streng rational und strebt nach Maximierung des jährlichen Einkommens.

a) Formulieren Sie ein Entscheidungsmodell und lösen Sie es!
b) Wie wirkt sich die Änderung des Verkehrsmittels auf die Lösung des Problems aus, falls der Akteur am liebsten mit einem Fahrrad zur Arbeit fährt? Dieses muss er für 500 € erwerben.

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 266.

Aufgabe 1.12:

Welche Skalen liegen folgenden Messvorgängen zugrunde:

a) Klassifizierung des Einkommens (1. Klasse: 0 € bis 799 €, 2. Klasse: bis 1499 €, 3. Klasse: bis 2.999 €, 4. Klasse: bis 4.999 €, 5. Klasse: über 5.000 €),
b) Gewichtsmessung in kg,
c) Temperaturmessung auf der Fahrenheit-Skala,
d) Vergleich der Preisangaben von Elektrozahnbürsten in €.

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 266.

Aufgabe 1.13:

Ein Venture Capital Investor steht vor dem Problem, zwischen fünf Investitionsalternativen die beste Alternative zu identifizieren. Anhand von vier Umweltzuständen, die er für möglich hält, lässt sich der Erfolg vergleichen. Leider können die Eintrittswahrscheinlichkeiten dieser Zustände nicht näher spezifiziert werden. Für die endgültige Auswahl wurde folgende Entscheidungsmatrix gestaltet:

Zustand / Aktion	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	15	6	12	9
a_2	16	5	16	8
a_3	11	4	15	7
a_4	14	8	11	9
a_5	10	3	10	4

a) Welche Alternative wird von den anderen stark dominiert?
b) Ermitteln Sie die optimale Alternative mit:
   1) der Wald-Regel,
   2) der Maxi-Max-Regel,
   3) der Savage-Niehans-Regel
   4) dem Hurwicz-Prinzip bei λ=0,25 für den Optimismus-Parameter!
c) Damit eine Entscheidung unter Ungewissheit als rational bezeichnet werden kann, muss sie bestimmten Anforderungen genügen. Zeigen Sie anhand der oben aufgeführter Entscheidungsmatrix, ob das Hurwicz-Prinzip und die Savage-Niehans-Regel die Anforderung an Spalten-Linearität erfüllen!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 266.

Aufgabe 1.14:

Betrachten Sie folgende Risikonutzenfunktion:

$$u(e) = e - \frac{1}{35}e^2$$

Im Zuge der Bernoulli-Befragung stehen einem Entscheidungsträger zwei einfache Alternativen zur Auswahl. Durch die Teilnahme an einer Lotterie könnte der Entscheidungsträger mit 50%-ger Wahrscheinlichkeit 15 € gewinnen. Er könnte sich auch entscheiden, an einer anderen Lotterie teilzunehmen, bei der sein Gewinn mit derselben Wahrscheinlichkeit 25 € beträge. In beiden Fällen besteht wiederum eine 50%-ge Wahrscheinlichkeit, nichts zu gewinnen. Somit lassen sich folgende Alternativen formulieren:

$$a_1 = (15; \tfrac{1}{2}; 0) \quad \text{oder} \quad a_2 = (25; \tfrac{1}{2}; 0)$$

a) Welche Alternative wäre nach dem Wahrscheinlichkeitsdominanzprinzip vorzuziehen?

b) Beantworten Sie diese Frage mittels Bernoulli-Prinzip und interpretieren Sie kurz Ihre Ergebnisse!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 267.

Aufgabe 1.15:

Ihre Oma hat ein spannendes Geburtstagsgeschenk für Sie und möchte Ihnen eines der drei Aktienpakete der Unternehmen Outdoor Services AG, Motorsport Services AG oder FTU AG schenken. Die Auswahl des Geschenkes möchte Sie nicht nur Ihnen, sondern auch einem Spiel überlassen. Sie schlug zwei Spielkonstellationen vor:

a) In einem schwarzen Beutel befinden sich 10 Kugeln, welche von 1 bis 10 durchnummeriert sind. Beim Zug einer Kugel mit der Nummer 3 oder 5 aus diesem Beutel erhalten Sie das Aktienpaket von Outdoor Services AG, ansonsten FTU AG;

b) Alternativ nimmt sie den gelben Beutel, in dem auch 10 von 1 bis 10 nummerierte Kugeln liegen. Sollte sie aus gelbem Beutel eine Kugel mit der Nummer 3 oder 5 ziehen, erhalten Sie wiederum die Aktien von Outdoor Services AG, ansonsten Motorsport Services GbmH.

Aus welchem Beutel die Kugel gezogen werden, dürfen Sie selbst entscheiden. Angenommen, Sie ziehen die Aktien von Outdoor Motosport Services AG den Aktien von FTU AG vor, wenn diese isoliert vom angebotenen Spiel betrachtet werden. Für welche Spielkonstellation werden Sie sich mit der Berücksichtigung des Substitutionsaxioms entscheiden?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 268.

Aufgabe 1.16:

Mick überlegt, ob er einen Lottoschein kaufen soll. Jeder Einzelschein kostet 2€ und die Wahrscheinlichkeit der Gewinnauszahlungen wird, wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Wahrscheinlichkeit	**Auszahlung in €**
0,15	4
0,20	2
0,25	1
0,40	0,5

a) Angenommen, Mick hat einen Lottoschein gekauft. Wie hoch wäre dann der Erwartungswert der Gewinnauszahlung? Wie hoch wäre die Varianz?

b) Micks Spitzname ist „No-Risk-Mick". Angenommen, seine Nutzenfunktion sei von der Höhe seines Vermögens v abhängig. Welche der folgenden Nutzenfunktionen entspricht der Annahme über Micks Risikoaversion?

$$\mathbf{1)}\ \mathbf{u(v) = v^2}; \qquad \mathbf{2)}\ \mathbf{u(v) = 3v}; \qquad \mathbf{3)}\ \mathbf{u(v) = \sqrt{v}}$$

c) Würde Mick einen Lottoschein kaufen, wenn man die Nutzenfunktion und die aktuelle Höhe seines Vermögens v=200€ berücksichtigt?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 268.

Aufgabe 1.17:

Als Ausgangsdaten für ein Entscheidungsproblem bei Risiko ist folgende Tabelle gegeben:

Aktion	**Zustände**		
	$\mathbf{z_1}$ **mit** $\mathbf{w_1 = 0{,}20}$	$\mathbf{z_2}$ **mit** $\mathbf{w_2 = 0{,}50}$	$\mathbf{z_3}$ **mit** $\mathbf{w_3 = 0{,}30}$
$\mathbf{a_1}$	150	–250	600
$\mathbf{a_2}$	300	0	300
$\mathbf{a_3}$	100	–150	400

a) Anhand der in der folgenden Tabelle aufgeführten Einschätzungen eines Entscheidungsträgers sollen Sie die entsprechende Risikonutzenfunktion ermitteln und diese Funktion grafisch darstellen!

Vorgegebene Verteilung			Einschätzung des Entscheidungsträgers
e	600	-250	$\sim$ -80
w_p	0,2	0,8	
e	600	-250	$\sim$ 150
w_p	0,4	0,6	
e	600	-250	$\sim$ 350
w_p	0,6	0,4	
e	600	-250	$\sim$ 500
w_p	0,8	0,2	

b) Welche Aktion würde der Entscheidungsträger präferieren?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 269.

Aufgabe 1.18:

Sie sind für die Auftragsplanung des Transportunternehmens „Cargomax“ AG zuständig. Auf der Position sind Sie erst einen Monat tätig und haben den Einsatzplan eines bestimmten LKWs noch nicht erstellt. Der LKW steht derzeit in Berlin (Startpunkt) und kann pro Periode genau einmal die Strecke Berlin-Moskau oder umgekehrt bewältigen, inkl. der Ein- und Ausladezeit. Die Anfänge der Perioden $t = 0,...,5$ werden als Entscheidungszeitpunkte festgelegt. Das Ziel Ihrer Planung besteht in der Gewinnmaximierung, die mit dem Ausführen der Aufträge verbunden ist. Wichtig ist, dass der LKW am Anfang der Periode 6 wieder in Berlin ist. Wenn der LKW in einer Periode nicht fährt, entstehen Kosten in Höhe von 15 Geldeinheiten. Die folgende Tabelle listet die möglichen Gewinne auf, die mit Sicherheit zu erzielen sind, falls in dem angegebenen Zeitpunkt die angegebene Tour beendet wird.

t	Berlin-Moskau	Moskau-Berlin
0	35	-
1	60	25
2	70	40
3	25	55
4	60	65
5	-	100

Erstellen Sie den Entscheidungsbaum und geben Sie an, welcher Routenplan den Gewinn maximiert!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 270.

1.11.2 Lösungen

Lösung zur Aufgabe 1.1 auf S. 241:

In Tabelle 1.63 ist Y wechselseitig unabhängig von X, aber X ist nicht präferenzunabhängig von Y. In Tabelle 1.64 sind X und Y wechselseitig unabhängig.

Lösung zur Aufgabe 1.2 auf S. 242:

a) In dem Beispiel wird die Alternative a_1 dominiert:

- durch a_2, da $u_{1r} < u_{2r}$ $für$ $r = 1,2,3$;
- durch a_4, da $u_{1r} < u_{4r}$ $für$ $r = 1$ sowie $u_{1r} = u_{4r}$ $für$ $r = 2,3$;
- durch a_5, da $u_{1r} < u_{5r}$ $für$ $r = 1,2,3$;

Weiterhin wird die Alternative a_2 durch a_5 dominiert, da $u_{2r} < u_{5r}$ $für$ $r = 1,2,3$.

b) 1. Die Informationen aus der Aufgabenstellung liefern folgende Relationen: $\alpha_{12} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{1}{2}$ sowie $\alpha_{23} = \frac{g_2}{g_3} = \frac{2}{1}$. Aus den Anforderungen an die konsistente Zielgewichtung ist bekannt, dass $\alpha_{12} = \frac{1}{\alpha_{21}}$. Demzufolge muss $\alpha_{21} = 2$ sowie $\alpha_{32} = \frac{1}{2}$ gelten.

Aus $\alpha_{12} \cdot \alpha_{23} = \alpha_{13}$ folgt $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, woraus sich die Relation $\alpha_{31} = 1$ ergibt.

2. Mit diesen Werten kann die Paarvergleichsmatrix aufgestellt werden, die in der folgenden Tabelle zu sehen ist:

Teilziel / Teilziel	k_1	k_2	k_3
k_1	1	1/2	1
k_2	2	1	2
k_3	1	1/2	1

3. Nun ist noch die Frage nach den Gewichtungsfaktoren zu beantworten. Dazu werden folgende Relationen verwendet:

$$g_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{21}+\alpha_{31}} = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4};$$
$$g_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}+\alpha_{21}+\alpha_{31}} = \frac{2}{1+2+1} = \frac{1}{2};$$
$$g_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}+\alpha_{21}+\alpha_{31}} = \frac{1}{1+2+1} = \frac{1}{4}$$

Alternativ könnten auch die folgenden Relationen verwendet werden:

$$g_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}+\alpha_{22}+\alpha_{32}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4};$$

$g_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}+\alpha_{22}+\alpha_{32}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$;

$g_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{12}+\alpha_{22}+\alpha_{32}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

Diese Gewichte werden auf die Aufgabenstellung angewendet. Die optimale Alternative resultiert aus:

$$a_{opt} = \max_i \left(\sum_{r=1}^{l} g_r \cdot u_{ir} \right) \; mit \; 0 \le g_r \le 1, sowie \; \sum_{r=1}^{l} g_r = 1$$

Das führt zu folgender Tabelle:

Aktion \ Teilziel	k_1	k_2	k_3	Summe	
a_3	$50 \cdot 0{,}25$	$110 \cdot 0{,}50$	$50 \cdot 0{,}25$	80,00	
a_4	$70 \cdot 0{,}25$	$30 \cdot 0{,}50$	$80 \cdot 0{,}25$	52,50	
a_5	$60 \cdot 0{,}25$	$90 \cdot 0{,}50$	$120 \cdot 0{,}25$	90,00	$\Leftarrow$ **max**

Alternative a_5 ist demzufolge optimal.

c) 1. Die optimale Alternative a_{opt} gemäß der KÖRTH-Regel ergibt sich aus:

$$a_{opt} = \max_i \left(\min_r \frac{u_{ir}}{\max_i u_{ir}} \right)$$

Das führt zu folgender Tabelle:

Aktion \ Teilziel	k_1	k_2	k_3	$\min_r \left(\frac{u_{ir}}{\max_h u_{hr}} \right)$	
a_3	$\frac{50}{70}$	$\frac{110}{110}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{50}{120}$	
a_4	$\frac{70}{70}$	$\frac{30}{110}$	$\frac{80}{120}$	$\frac{30}{110}$	
a_5	$\frac{60}{70}$	$\frac{90}{110}$	$\frac{120}{120}$	$\frac{90}{110}$	$\Leftarrow$ **max**

Alternative a_5 ist demzufolge optimal.

2. Die optimale Alternative a_{opt} gemäß des Goal-Programming ergibt sich aus:

$$a_{opt} = \min_i \left(\sum_{r=1}^{l} |u_{ir} - u_r^*| \right)$$

Bei Verwendung der Wunschzielwerte $u_1^* = 50$, $u_2^* = 100$ sowie $u_3^* = 100$ ergibt folgende Tabelle

Aktion	$\lvert u_{i1} - u_1^* \rvert$	$\lvert u_{i2} - u_2^* \rvert$	$\lvert u_{i3} - u_3^* \rvert$	$\sum_{r=1}^{1} \lvert u_{ir} - u_r^* \rvert$	
a_3	0	10	50	60	
a_4	20	70	20	110	
a_5	10	10	20	40	$\Leftarrow$ **min**

Alternative a_5 ist optimal.

3. Da die Alternative a_3 beim wichtigsten Ziel k_2 den höchsten Wert aufweist, ist diese Alternative optimal.

Lösung zur Aufgabe 1.3 auf S. 242:

a) Mit den Eingangsdaten ergibt sich folgende Entscheidungsmatrix

Rezept \ Teilziel	Reifezeit[Tage]	Gewinn[€/kg]	Belegungszeit [Stunden/kg]
$\mathbf{R_1}$	0	50	2
$\mathbf{R_2}$	10	50	1
$\mathbf{R_3}$	0	40	3
$\mathbf{R_4}$	5	45	0

b) Das Rezept R_4 braucht nicht weiter betrachtet zu werden, da es von Rezept R_2 dominiert wird. Es gilt: $u_{4r} < u_{2r}$ *für* $r = 1{,}2{,}3$

c) Die Zielgewichtung erfolgt für jedes a_i mittels $\sum_{r=1}^{l} g_r \cdot u_{ir}$.

Für das Gewinnziel gilt $g_{Gewinn} = 0{,}75$. Für die übrigen Teilziele gilt: $g_{Reife} = g_{Belegung} = 0{,}125$. Es ergeben sich folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned} \textit{Rezept 1}: \sum_{r=1}^{3} g_r \cdot u_{1r} &= 37{,}75 \\ \textit{Rezept 2}: \sum_{r=1}^{3} g_r \cdot u_{2r} &= 38{,}875 \\ \textit{Rezept 3}: \sum_{r=1}^{3} g_r \cdot u_{3r} &= 30{,}375 \end{aligned}\right\} \quad \text{Rezept 2} \succ \text{Rezept 1} \succ \text{Rezept 3}$$

d) Die Lösung entsprechend der KÖRTH-Regel ergibt sich aus folgender Tabelle:

Rezept \ Teilziel	Reifezeit	Gewinn	Belegungszeit	$\min_r \frac{u_{ir}}{\max_i u_{ir}}$	
$\mathbf{R_1}$	0	1	$^2/_3$	0	
$\mathbf{R_2}$	1	1	$^1/_3$	$^1/_3$	$\Leftarrow$ **max**
$\mathbf{R_3}$	0	$^4/_5$	1	0	

Rezept 2 ist wiederum optimal.

Lösung zur Aufgabe 1.4 auf S. 243:

Die Werte der Zielgewichte sind in folgender Tabelle zu sehen:

Ermittlung der Zielgewichte

Ausgangsmatrix

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_1	1	7	5	1/4
Z_2		1	1	1/8
Z_3			1	1/5
Z_4				1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}2784 \\ 0{,}0570 \\ 0{,}0713 \\ 0{,}5933 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_b$$

$\lambda_{max} = 4{,}4268$
$KI = 0{,}0823$
$KR = 0{,}0914$

Der Wert KR weist auf eine ausreichende Konsistenz der Ergebnisse hin. Damit gelten für die Zielgewichte folgende Werte: $\omega_1 = 0{,}2784$, $\omega_2 = 0{,}0570$, $\omega_3 = 0{,}0713$ und $\omega_4 = 0{,}5933$.

Im nächsten Schritt sind die Beiträge der vier Alternativen zu diesen vier Teilzielen zu ermitteln. Die dabei resultierenden Werte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels 1

Ausgangsmatrix

	A	B	C	D
A	1	1/9	1	1/8
B		1	8	5
C			1	1/4
D				1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}0500 \\ 0{,}6534 \\ 0{,}0591 \\ 0{,}2375 \end{pmatrix} = \vec{p}_1$$

$\lambda_{max} = 4{,}2300$
$KI = 0{,}0767$
$KR = 0{,}0852$

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels 2

Ausgangsmatrix

	A	B	C	D
A	1	7	9	5
B		1	1	1/2
C			1	1/5
D				1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}6651 \\ 0{,}0808 \\ 0{,}0617 \\ 0{,}1925 \end{pmatrix} = \vec{p}_2$$

$\lambda_{max} = 4{,}1319$
$KI = 0{,}0440$
$KR = 0{,}0489$

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels 3

Ausgangsmatrix

	A	B	C	D
A	1	2	5	1
B		1	3	2
C			1	1/4
D				1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}3786 \\ 0{,}2902 \\ 0{,}0742 \\ 0{,}2571 \end{pmatrix} = \vec{p}_3$$

$\lambda_{max} = 4{,}1913$
$KI = 0{,}0638$
$KR = 0{,}0708$

Bewertung der Alternativen hinsichtlich des Teilziels 4

Ausgangsmatrix

	A	B	C	D
A	1	5	1/5	1/3
B		1	1/9	1/4
C			1	4
D				1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}1302 \\ 0{,}0457 \\ 0{,}6013 \\ 0{,}2228 \end{pmatrix} = \vec{p}_4$$

$\lambda_{max} = 4{,}2492$
$KI = 0{,}0831$
$KR = 0{,}0923$

Auf dieser Grundlage werden die AHP-Nutzwerte der Alternativen ermittelt. Es resultieren:

- $NW(AHP)_A = 0{,}1561$
- $NW(AHP)_B = 0{,}2343$
- $NW(AHP)_C = 0{,}3820$
- $NW(AHP)_D = 0{,}2276$

Die relative Vorteilhaftigkeit ist demzufolge: $C \succ B \succ D \succ A$.

Lösung zur Aufgabe 1.5 auf S. 244:

Im ersten Schritt sind die Gewichte der Teilziele zu ermitteln. Die ermittelten Werte sind in der folgenden Tabelle zu sehen:

Ermittlung der Zielgewichte

Ausgangsmatrix

	U	V	W
U	1	5	1
V	1/5	1	1/9
W	1	9	1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}4200 \\ 0{,}0691 \\ 0{,}5109 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_b$$

$\lambda_{max} = 3{,}0385$
$KI = 0{,}0193$
$KR = 0{,}0332$

Der Wert KR weist auf eine ausreichende Konsistenz der Ergebnisse hin. Damit gelten für die Teilziele folgende Gewichte: $\omega_1 = 0{,}4200$, $\omega_2 = 0{,}0691$ und $\omega_3 = 0{,}5109$.

Im nächsten Schritt sind die Beiträge der drei Alternativen zu diesen drei Teilzielen zu ermitteln. Die dabei resultierenden Werte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Alternativenbewertung hinsichtlich des Teilziels 1

Ausgangsmatrix

	A	B	C
A	1	5	1/3
B	1/5	1	1/9
C	3	9	1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}2654 \\ 0{,}0629 \\ 0{,}6716 \end{pmatrix} = \vec{p}_1$$

$\lambda_{max} = 3{,}0290$
$KI = 0{,}0145$
$KR = 0{,}0251$

Alternativenbewertung hinsichtlich des Teilziels 2

Ausgangsmatrix

	A	B	C
A	1	1/3	3
B	3	1	5
C	1/3	1/5	1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}2583 \\ 0{,}6370 \\ 0{,}1047 \end{pmatrix} = \vec{p}_2$$

$\lambda_{max} = 3{,}0385$
$KI = 0{,}0193$
$KR = 0{,}0332$

Alternativenbewertung hinsichtlich des Teilziels 3

Ausgangsmatrix

	A	B	C
A	1	1/3	1/5
B	3	1	1
C	5	1	1

Ergebnisse:

$$\vec{a}_{max} = \begin{pmatrix} 0{,}1140 \\ 0{,}4054 \\ 0{,}4806 \end{pmatrix} = \vec{p}_3$$

$\lambda_{max} = 3{,}0291$
$KI = 0{,}0145$
$KR = 0{,}0251$

Auf dieser Grundlage werden die AHP-Nutzwerte der Alternativen ermittelt: $NW(AHP)_A = 0{,}1876$; $NW(AHP)_B = 0{,}2775$; $NW(AHP)_C = 0{,}5349$. Daraus folgt: $C \succ B \succ A$.

Lösung zur Aufgabe 1.6 auf S. 245:

a) Für das Beispiel ist festzustellen, dass die Alternative a_5 durch a_2 dominiert wird, da: $u_{5p} < u_{2p}$ für p=2,3,4 sowie $u_{5p} = u_{2p}$ für p=1.

b) Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle dargestellt:

	Minimax-Regel	**Maximax-Regel**	**Hurwicz-Prinzip**	**Laplace-Regel**
	$\min\limits_p u_{ip}$	$\max\limits_p u_{ip}$	$0{,}25\left(\max\limits_p u_{ip}\right) + 0{,}75\left(\min\limits_p u_{ip}\right)$	$\frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} u_{ip}$
$\mathbf{a_1}$	0	90	22,50	25,00
$\mathbf{a_2}$	10	30	15,00	22,50
$\mathbf{a_3}$	3	85	23,50	23,75
$\mathbf{a_4}$	-10	110	20,00	28,75
$\mathbf{a_6}$	10	30	15,00	20,00
$\mathbf{a_{opt}}$	$\mathbf{a_2}$ und $\mathbf{a_6}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_3}$	$\mathbf{a_4}$

Im Fall der Regel des geringsten Bedauerns muss zuerst aus der Ergebnismatrix die Matrix der Opportunitätskosten ermittelt werden. Die Opportunitätskosten entsprechen dem entgehenden Nutzen bei Wahl der nicht-optimalen Alternative und sind in folgender Tabelle zu sehen:

Aktion \ Zustand	z_1	z_2	z_3	z_4	$\max_p b_{ip}$
a_1	20	10	20	30	30
a_2	80	10	0	0	80
a_3	25	17	17	26	26
a_4	0	10	30	25	30
a_6	80	0	10	10	80

Aus den ermittelten maximalen Opportunitätskosten wird das Minimum gewählt. Dieses wird mit der Alternative a_3 erreicht, weshalb diese Alternative optimal ist.

c) Der Akteur freut sich darüber, dass es nicht ganz so schlimm gekommen ist, wie es schlimmstenfalls hätte kommen können. Im ersten Schritt sind die Ursprungswerte aus der Entscheidungsmatrix umzuwandeln in eine Matrix des Frohlockens. Die Werte für die Alternativen sind in folgender Tabelle zu sehen:

Aktion \ Zustand	z_1	z_2	z_3	z_4	$\max_p f_{ip}$	$\min_p f_{ip}$
a_1	60	7	10	0	60	0
a_2	0	7	30	30	30	0
a_3	55	0	13	4	55	0
a_4	80	7	0	5	80	0
a_6	0	17	20	20	20	0

Bei einer Maximierung des maximalen Frohlockens ist Alternative a_4 optimal. Im Fall der Minimierung des maximalen Frohlockens hingegen ist Alternative a_6 optimal. Eine Minimierung oder Maximierung des minimalen Frohlockens ist in dem Beispiel nicht zweckdienlich, da sämtliche Alternativen denselben Wert aufweisen und keine optimale Alternative identifiziert werden kann.

Lösung zur Aufgabe 1.7 auf S. 246:

Zur Ermittlung der optimalen Alternative entsprechend der vier Entscheidungsregeln bzw. Entscheidungsprinzipien werden im ersten Schritt die erforderlichen Zwischenergebnisse Erwartungswert, Standardabweichung und Semistandardabweichung ermittelt (vgl. Tabelle 1.65).

Tab. 1.65: Zwischenwerte für Aufgabe 1.7

	$\mu_i = \sum_{p=1}^{n} u_{ip} \cdot w_p$	$\sigma_i = \sqrt{\sum_{p=1}^{n} w_p \cdot (\mu_i - u_{ip})^2}$	$\rho_i = \sqrt{\sum_{p=1}^{n} w_p \cdot (\max\ [0; \mu_i - u_{ip}])^2}$
a_1	22,00	34,29	15,85
a_2	19,50	8,65	6,01
a_3	19,55	32,73	14,64
a_4	24,25	43,60	20,74
a_6	19,50	6,69	4,75

Die optimale Alternative bei Anwendung der BAYES-Regel kann direkt aus der Tabelle 1.65 abgelesen werden. Es ist die Alternative a_4, da diese den höchsten Erwartungswert aufweist. Für die verbleibenden drei Entscheidungsprinzipien müssen die Zwischenwerte in die Definitionsgleichungen eingesetzt werden. Auf diese Weise ergeben sich die Resultate der Entscheidungsprinzipien und die jeweilige optimale Alternative (vgl. Tabelle 1.66).

Tab. 1.66: Ergebnisse für Aufgabe 1.7

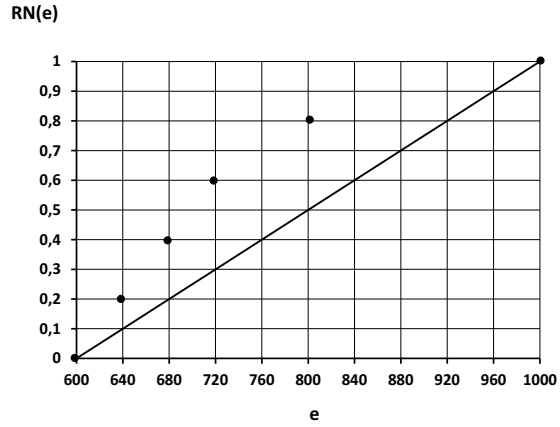
	$\mu_i - 0{,}50 \cdot \sigma_i$	$\mu_i + 0{,}50 \cdot \sigma_i$	$\mu_i - 0{,}50 \cdot \rho_i$	$0{,}25\ \mu_i + 0{,}75 \left(\min_p u_{ip}\right)$
a_1	4,85	39,15	14,08	5,50
a_2	15.18	23,82	16,50	12,38
a_3	3,19	35,91	12,23	7,14
a_4	2,45	46,05	13,88	-1,44
a_6	16,16	22,84	17,13	12,38
a_{opt}	a_6	a_4	a_6	a_6 und a_2

Lösung zur Aufgabe 1.8 auf S. 246:

a) Aus den Daten ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}
RN(600) &= 0 \cdot RN(1000) + 1 \cdot RN(600) &&= 0\\
RN(640) &= 0{,}2 \cdot RN(1000) + 0{,}8 \cdot RN(600) &&= 0{,}2\\
RN(680) &= 0{,}4 \cdot RN(1000) + 0{,}6 \cdot RN(600) &&= 0{,}4\\
RN(720) &= 0{,}6 \cdot RN(1000) + 0{,}4 \cdot RN(600) &&= 0{,}6\\
RN(800) &= 0{,}8 \cdot RN(1000) + 0{,}2 \cdot RN(600) &&= 0{,}8\\
RN(1000) &= 1 \cdot RN(1000) + 0 \cdot RN(600) &&= 1
\end{aligned}$$

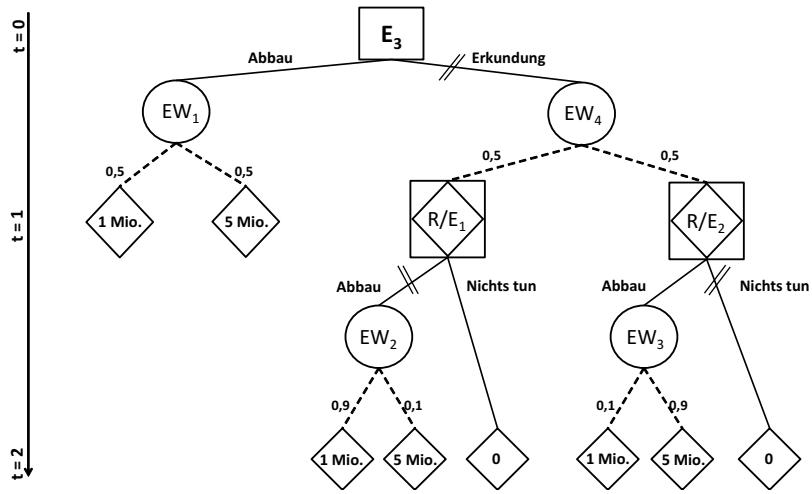
b) Die Darstellung der Werte ist folgender Abbildung zu entnehmen.



c) Der Akteur ist risikoscheu, da die Sicherheitsäquivalente jeweils geringer sind als die korrespondierenden Erwartungswerte.

Lösung zur Aufgabe 1.9 auf S. 247:

Die Struktur der Entscheidungssituation mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten und den Ergebniswerten ist in folgender Abbildung zu sehen:



Als erstes wird der Erwartungswert der Handlungsalternative A ermittelt, welche der Sofortabbau ist. Der Erwartungswert des Kapitalwertes zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich aus:

$$EW_1[\tilde{C}_{0;Abbau}] = -2\,Mio.€ + 3\,Mio.€ \cdot 1{,}1^{-1} = 727.272{,}73€$$

Alternative B besteht aus der Handlungssequenz, bei welcher zuerst eine Erkundung durchgeführt wird und in Abhängigkeit von den – zu einem späteren Zeitpunkt vorliegenden – Ergebnissen über das weitere Vorgehen entschieden wird. Die Bewertung beginnt zu dem spätesten Zeitpunkt, zu dem eine Entscheidung getroffen werden kann. Dies ist der Zeitpunkt $t = 1$. Zuerst wird die Situation untersucht, bei der im Zeitpunkt $t = 1$ ein ungünstiges Ergebnis vorliegt. Das bedeutet, dass sich der Entscheidungsträger im Knoten R/E_1 befindet.

Der Erwartungswert des Kapitalwertes der Alternative „Abbau“ folgt in $t = 1$ mit:

$$EW_2[\tilde{C}_{1;Abbau}] = -2\,Mio.€ + 1{,}4\,Mio.€ \cdot 1{,}1^{-1} = -727.272{,}73€$$

Es kann jedoch auch in $t = 1$ entschieden werden, nicht mit dem Abbau zu beginnen. Der Kapitalwert dieser Möglichkeit beträgt $EW[\tilde{C}_{1;Nichts\,tun}] = 0$.

Für die Entscheidung im Knoten R/E_1 ist demzufolge die Variante „Nichts tun“ vorteilhaft im Vergleich zur Alternative „Abbau“. Die Kante zu der Alternative „Abbau“ wird deshalb gestrichen.

Wird nun jedoch der Fall untersucht, dass zum Zeitpunkt $t = 1$ ein günstiges Ergebnis vorliegt, so befindet sich der Entscheidungsträger im Knoten R/E_2. Der Erwartungswert des Kapitalwertes der Alternative „Abbau“ folgt in diesem Fall in $t = 1$ mit:

$$EW_3[\tilde{C}_{1;Abbau}] = -2\,Mio.€ + 4{,}6\,Mio.€ \cdot 1{,}1^{-1} = 2.181.818{,}18€$$

Wie auch im Knoten R/E_1 kann jedoch auch in diesem Knoten entschieden werden, nicht mit dem Abbau zu beginnen. Der Kapitalwert dieser Möglichkeit beträgt $EW[\tilde{C}_{1;Nichts\,tun}] = 0$. Für die Entscheidung im Knoten R/E_2 ist demzufolge die Variante „Abbau“ relativ vorteilhaft. Die Kante zu der Alternative „Nichts tun“ wird deshalb gestrichen. Als letztes ist der Erwartungswert des Kapitalwertes der Handlungsalternative „Erkundung und anschließende Entscheidung“ im Zeitpunkt $t = 0$ zu ermitteln. Dieser Wert ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} EW_4[\tilde{C}_{0;Erkundung}] &= -500.000€ \\ &\quad + [0{,}5 \cdot 0€ + (0{,}5 \cdot 2.181.818{,}18€) \cdot 1{,}1^{-1}] \\ &= 491.735{,}54€ \end{aligned}$$

Dieser Erwartungswert ist geringer als der Erwartungswert des sofortigen Abbaus. Deshalb ist der sofortige Beginn des Abbaus die vorteilhafte Vorgehensweise.

Lösung zur Aufgabe 1.10 auf S. 248:

Im Folgenden werden die Ergebnisse für die einzelnen Knoten ermittelt. Im ersten Schritt werden die Erwartungswerte der Kapitalwerte $EW[\tilde{C}_1]$ für die verschiedenen Zustände in $t = 1$ berechnet.

Zeitpunkt t=1:

Knoten R_1:

$$\begin{aligned} EW_1[\tilde{C}_{1;R_1}] = &[(0{,}7 \cdot 20.000 + 0{,}3 \cdot 10.000) \cdot 40\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ &+ (100.000\text{€} - 120.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} = \underline{600.000, -\text{€}} \end{aligned}$$

Knoten R_2:

$$\begin{aligned} EW_2[\tilde{C}_{1;R_2}] = &[(0{,}4 \cdot 20.000 + 0{,}6 \cdot 10.000) \cdot 40\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ &+ (100.000\text{€} - 120.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} = \underline{490.909{,}09\text{€}} \end{aligned}$$

Da in $t = 1$ auf diesem Ast des Baumes keine Entscheidung mehr getroffen werden kann, ist auch keine Auswahl vorzunehmen.

Knoten R/E_1:

$$\begin{aligned} EW_3[\tilde{C}_{1;MC_1}] = &[(0{,}7 \cdot 25.000 + 0{,}3 \cdot 15.000) \cdot 50\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ &+ (50.000\text{€} - 50.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} - 500.000\text{€} = \underline{500.000, -\text{€}} \\ EW_4[\tilde{C}_{1;MD_1}] = &[(0{,}7 \cdot 20.000 + 0{,}3 \cdot 12.000) \cdot 60\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ &+ (50.000\text{€} - 40.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} - 550.000\text{€} = \underline{419.090{,}91\text{€}} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass im Knoten R/E_1 die Alternative MC_1 relativ vorteilhaft in Bezug auf MD_1 ist. Deshalb wird die Kante zu MD_1 gestrichen.

Knoten R/E_2:

$$\begin{aligned} EW_5[\tilde{C}_{1;MC_1}] = &[(0{,}4 \cdot 25.000 + 0{,}6 \cdot 15.000) \cdot 50\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ &+ (50.000\text{€} - 50.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} - 500.000\text{€} = \underline{363.636{,}36\text{€}} \\ EW_6[\tilde{C}_{1;MD_1}] = &[(0{,}4 \cdot 20.000 + 0{,}6 \cdot 12.000) \cdot 60\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ &+ (50.000\text{€} - 40.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} - 550.000\text{€} = \underline{288.181{,}82\text{€}} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass im Knoten R/E_2 die Alternative MC_1 wiederum relativ vorteilhaft in Bezug auf MD_1 ist. Auch in diesem Fall wird die Kante zu MD_1 gestrichen.

Zeitpunkt t=0:

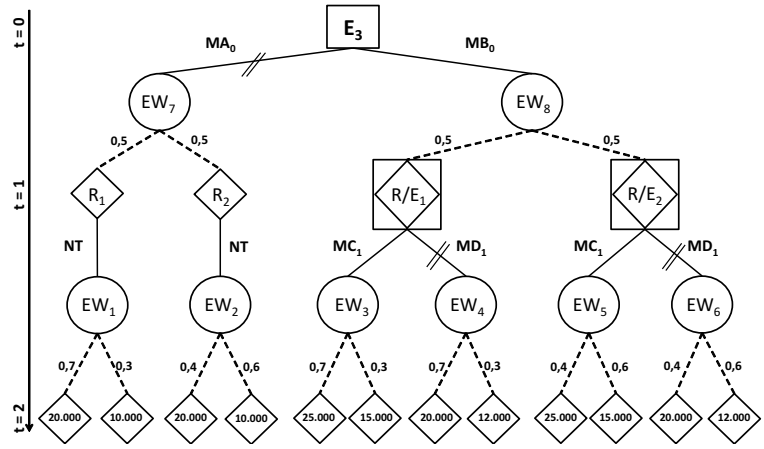
Im letzten Schritt sind die Ergebnisse für den Zeitpunkt $t = 0$ zu ermitteln. Dies erfolgt im Knoten E_3. Für die Anlage MA_0 ergibt sich der Erwartungswert:

$$\begin{aligned} EW_7[\tilde{C}_{0;MA_0}] = & -1.000.000\text{€} \\ & + [(0{,}5 \cdot 20.000 + 0{,}5 \cdot 10.000) \cdot 40\text{€/St} - 120.000\text{€}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ & + (0{,}5 \cdot 490.909{,}09\text{€} + 0{,}5 \cdot 600.000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} \\ & = \underline{-67.768{,}60\text{€}} \end{aligned}$$

Für die Anlage MB_0 ergibt sich der Erwartungswert des Kapitalwertes der Handlungsalternative:

$$\begin{aligned} EW_8[\tilde{C}_{0;MB_0}] = & -500.000\text{€} \\ & + [(0{,}5 \cdot 10.000 + 0{,}5 \cdot 10.000) \cdot 50\text{€/St}] \cdot 1{,}1^{-1} \\ & + (50.0000\text{€} - 50.0000\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} \\ & + (0{,}5 \cdot 500.000, -\text{€} + 0{,}5 \cdot 363.636{,}36\text{€}) \cdot 1{,}1^{-1} \\ & = \underline{347.107{,}44\text{€}} \end{aligned}$$

Die Installation der Maschine MB_0 in Kombination mit der anschließenden Installation der Anlage MC_1 ist die vorteilhafte Strategie. Der Erwartungswert dieser Handlungsfolge ist positiv und darüber hinaus größer als der Erwartungswert der Installation der Anlage MA_0. Die Grundstruktur sowie die Bezeichnungen und darstellbaren Lösungsinformationen sind in folgender Abbildung dargestellt.



Lösung zur Aufgabe 1.11 auf S. 249:

a) In dem Fall geht es um ein Entscheidungsproblem bei Sicherheit und einem Ziel. Hier ist diejenige Alternative zu wählen, welche den höchsten Nutzen (jährliches Nettoeinkommen) gewährleistet. Folgende Alternativen stehen zur Auswahl:

a_1 = das Angebot akzeptieren
a_2 = das Angebot nicht akzeptieren

Mit den Eingangsdaten ergeben sich folgende Resultate:

Alternative	Jährliches Einkommen in €
a_1	$e_1 = 5{,}5 \cdot 12 = 66.000$
a_2	$e_2 = 69.000 - 2.000 - (100 \cdot 12) = 65.800$

Die Schlussfolgerung lautet: $e_1 > e_2 \Rightarrow a_1 \succ a_2$, was bedeutet: das Angebot sollte nicht angenommen werden.

b) Falls die Fahrkartenkosten ausgeschlossen und die Fahrradbeschaffungskosten hinzuaddiert würden, ergibt sich folgende Reihung: $e_2 > e_1 \Rightarrow a_2 \succ a_1$. In diesem Fall sollte das Angebot akzeptiert werden.

Lösung zur Aufgabe 1.12 auf S. 250:

a) Ordinalskala; b) Verhältnisskala; c) Intervallskala; d) Verhältnisskala

---

Lösung zur Aufgabe 1.13 auf S. 250:

a) Für das Beispiel ist festzustellen, dass die Alternative a_5 durch alle anderen Alternativen stark dominiert wird, da: $u_{5p} < u_{ip}$ für $p = 1,...,4$.

b) Die Alternative a_5 wird nicht weiter betrachtet. Mit den Entscheidungsverfahren ergeben sich die in der folgenden Tabelle abgebildeten Ergebnisse.

	Wald-Regel	**Maximax-Regel**	**Savage-Niehans-Regel**	**Hurwicz-Prinzip**
Aktion	$\mathbf{max_i(min_p u_{ip})}$	$\mathbf{max_i(max_p u_{ip})}$	$\mathbf{min_i(max_p b_{ip})}$	$\mathbf{max_i[0{,}25(max_p u_{ip}) + 0{,}75(min_p u_{ip})]}$
$\mathbf{a_1}$	6	15	4	8,25
$\mathbf{a_2}$	5	16	3	7,75
$\mathbf{a_3}$	4	15	5	6,75
$\mathbf{a_4}$	8	14	5	9,5
$\mathbf{a_{opt}}$	$\mathbf{a_4}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_4}$

c) Um die Entscheidungsverfahren auf die Spalten-Linearität zu prüfen, werden die Werte des Zustandes z_2 um den Betrag 4 erhöht. Die Präferenzordnungen sind damit:
   1) bei der SAVAGE-NIEHANS-Regel unverändert $a_2 \succ a_1 \succ a_3 \sim a_4$;
   2) bei dem HURWICZ-Prinzip bei λ=0,25 verändert von $a_4 \succ a_1 \succ a_2 \succ a_3$ zu $a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_3$.

Das HURWICZ-Prinzip verletzt das Axiom der Spalten-Linearität. In dem Beispiel führt die Erhöhung der Werte von z_2 sogar zur Veränderung der optimalen Alternative.

Lösung zur Aufgabe 1.14 auf S. 251:

1) Intuitiv ist schon auf den ersten Blick die Alternative a_2 als die beste identifizierbar. Nach der Wahrscheinlichkeitsdominanz wird die Alternative a_1 somit dominiert.
2) Die Anwendung des BERNOULLI-Prinzips erfolgt auf Basis der Risikonutzenfunktion. Die Erwartungswerte des Risikonutzens lassen sich folgendermaßen ermitteln:

$$\begin{aligned}\Phi(a_1) &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \left(15 - \frac{225}{35}\right) \\ &= 4{,}286 \\ \Phi(a_2) &= 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \left(25 - \frac{625}{35}\right) \\ &= 3{,}571\end{aligned}$$

   Somit wäre die Alternative a_1 zu präferieren. Der Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse liegt in der nicht erfüllten Bedingung an die RNF und zwar, dass die verwendete Funktion **durchgängig monoton** steigt, also $\frac{du}{de} > 0$. In dem Beispiel gilt:

$$\begin{aligned}\frac{du}{de} &= 1 - \tfrac{2}{35}e \\ 1 - \tfrac{2}{35}e &> 0\end{aligned}$$

   Die Bedingung ist erfüllt, wenn $e < 17{,}5$. Die RNF verläuft also für die Beträge, die über den Wert hinausgehen, fallend.

Lösung zur Aufgabe 1.15 auf S. 251:

Das Substitutionsaxiom oder Unabhängigkeitsaxiom ist eine grundlegende Annahme des rationalen Entscheidens in der Erwartungsnutzentheorie. Diese fordert, dass ein Akteur die Präferenzrelationen für irgend zwei Lotterien L_1 und L_2 beibehält, auch wenn diese im Zusammenhang mit irgendeiner dritten Lotterie betrachtet werden (vgl. **Anforderung 1.5.5** auf S. 116). Laut dem Axiom müssen Sie zwingend den gelben Beutel präferieren, wenn die Aktien von Motorsport Services AG separat betrachtet die beste Alternative für Sie sind.

Lösung zur Aufgabe 1.16 auf S. 252:

1) Mit den Eingangsdaten ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}\mu &= 0{,}15 \cdot 4\,€ + 0{,}2 \cdot 2\,€ + 0{,}25 \cdot 1\,€ + 0{,}4 \cdot 0{,}5\,€ \\ &= 1{,}45\,€ \\ \sigma^2 &= [0{,}15 \cdot (4\,€ - 1{,}45)^2] + [0{,}2 \cdot (2\,€ - 1{,}45)^2] \\ &\quad + [0{,}25 \cdot (1\,€ - 1{,}45)^2] + [0{,}4 \cdot (0{,}5\,€ - 1{,}45)^2] \\ &= 1{,}4475\,€\end{aligned}$$

2) Bei der Risikoaversion ist das Sicherheitsäquivalent der subjektiven Nutzenfunktion geringer als der Erwartungswert der Zufallsverteilung. Von den aufgeführten Funktionen spiegelt nur die Funktion im Punkt 3: $u(v) = \sqrt{v}$ die risikoaverse Einstellung Micks wider.
3) Die erwartete Gewinnauszahlung beträgt 1,45 €, welche nicht ausreicht, um Mick für das Risiko zu entschädigen (1,45 € < 2 €). Rein hypothetisch nehmen wir an, er hat doch einen Lottoschein gekauft. Diese Entscheidung könnte folgende Auswirkung auf sein Vermögen haben:

   a) $(200 - 2 + 4)\,€ = 202\,€$
   b) 200 €
   c) 199 €
   d) 198,5 €

   Der Erwartungsnutzen aus dem Lottospiel ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{N} &= u(v_p) \cdot (w_p) \\ &= \left(\sqrt{202\,€} \cdot 0{,}4\right) + \left(\sqrt{200\,€} \cdot 0{,}25\right) \\ &\quad + \left(\sqrt{199\,€} \cdot 0{,}2\right) + \left(\sqrt{198{,}5\,€} \cdot 0{,}15\right)\end{aligned}$$

$$= 14{,}122 €$$

Sollte er den Lottoschein nicht kaufen, beträgt u(200)=14,12€. Somit würde Mick es bevorzugen, keinen Lottoschein zu kaufen.

Lösung zur Aufgabe 1.17 auf S. 252:

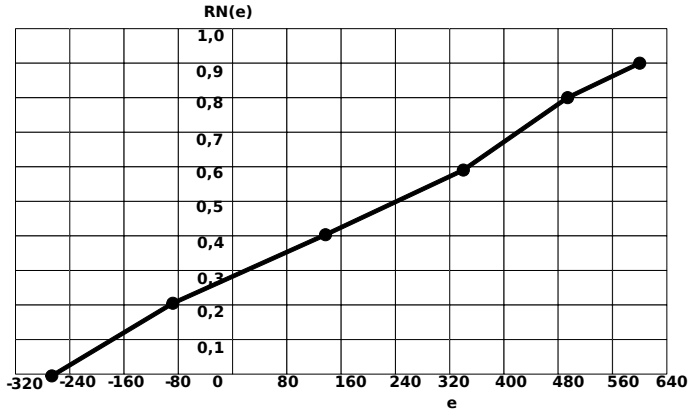
a) Der Akteur musste angeben, bei welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung er das unsichere Ereignis für ebenso nutzenstiftend einschätzt wie ein Sicherheitsäquivalent. Somit ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} RN(-80) &= 0{,}2 \cdot RN(600) + 0{,}8 \cdot RN(-250) = 0{,}2 \\ RN(150) &= 0{,}4 \cdot RN(600) + 0{,}6 \cdot RN(-250) = 0{,}4 \\ RN(350) &= 0{,}6 \cdot RN(600) + 0{,}4 \cdot RN(-250) = 0{,}6 \\ RN(500) &= 0{,}8 \cdot RN(600) + 0{,}2 \cdot RN(-250) = 0{,}8 \end{aligned}$$

Ex definitione gilt:

$$\begin{aligned} RN(-250) &= 0 \cdot RN(600) + 1 \cdot RN(-250) = 0 \\ RN(600) &= 1 \cdot RN(600) + 0 \cdot RN(-250) = 1 \end{aligned}$$

Die Risikonutzenfunktion lässt sich deshalb wie in der folgenden Abbildung darstellen:



b) Die Erwartungswerte des Risikonutzens können nun basierend auf der Approximation der RNF ermittelt werden:

$$u(600) = 1$$

$$
\begin{aligned}
u(400) &= 0{,}68\\
u(300) &= 0{,}57\\
u(150) &= 0{,}43\\
u(100) &= 0{,}38\\
u(0) &= 0{,}29\\
u(-150) &= 0{,}17\\
u(-250) &= 0\\
\Phi(a_1) &= 0{,}43 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}386\\
\Phi(a_2) &= 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 0{,}29 \cdot 0{,}5 + 0{,}57 \cdot 0{,}3 = 0{,}43\\
\Phi(a_3) &= 0{,}38 \cdot 0{,}2 + 0{,}17 \cdot 0{,}5 + 0{,}68 \cdot 0{,}3 = 0{,}365
\end{aligned}
$$

Somit wird die Alternative a_2 präferiert.

Lösung zur Aufgabe 1.18 auf S. 253:

Folgender Plan wäre für den LKW optimal:

t=0:	Route Berlin–Moskau;	t=3:	Route Moskau–Berlin;
t=1:	Route Moskau–Berlin;	t=4:	Route Berlin–Moskau;
t=2:	Route Berlin–Moskau;	t=5:	Route Moskau–Berlin.

Somit ergäbe sich der Gewinn in Höhe von 345 Geldeinheiten. Dies ist in der Abb. 1.41 dargestellt.

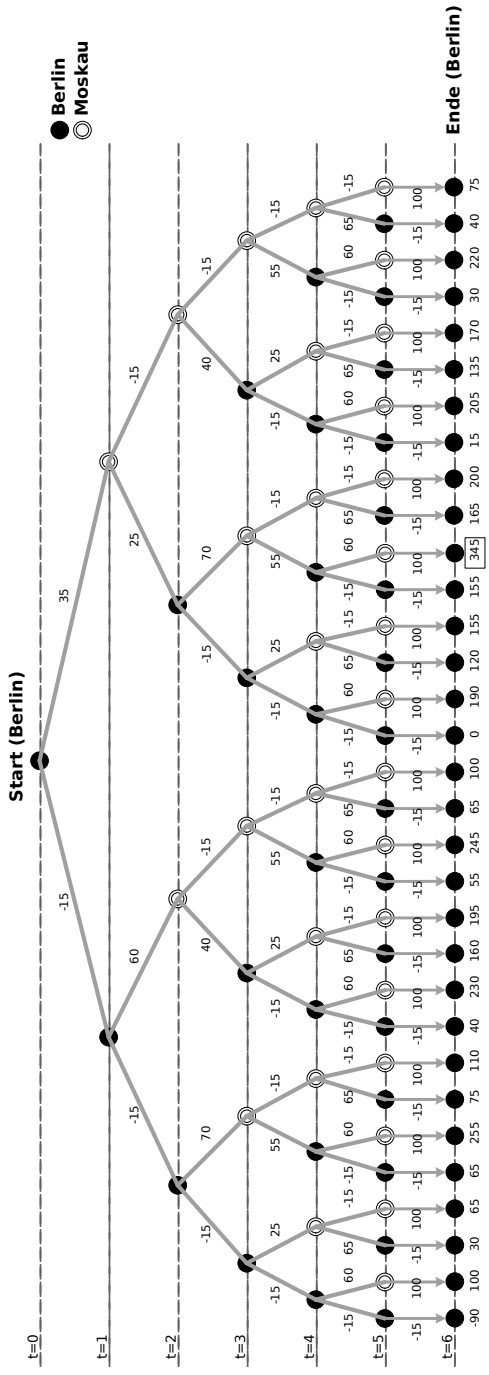


Abb. 1.41: Lösung zur Aufgabe 1.18.

1.12 Literaturverzeichnis

Adam, D. (1997): Planung und Entscheidung: Modelle – Ziele – Methoden. Mit Fallstudien und Lösungen. 4. Aufl., Wiesbaden: Gabler.

Allais, M. (1953): Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine. In: Econometrica, 21 (4): 503–546.

Alt, F. (1936): Über die Meßbarkeit des Nutzens. In: Zeitschrift für Nationalökonomie, 7 (2): 161–169.

Anchugina, N. (2017): A simple framework for the axiomatization of exponential and quasi-hyperbolic discounting. In: Theory and Decision, 82 (2): 185–210.

Anderson, R. (1995): Recent criticisms and defenses of Pascal's Wager. In: International Journal for Philosophy of Religion, 37 (1): 45–56.

Arrow, K. J. (1951): Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations. In: Econometrica, 19 (4): 404–437.

Arrow, K. J./Hurwicz, L. (1972): An optimality criterion for decision-making under ignorance. In: Carter, C. F./Ford, J. L. (Hg.): Uncertainty and expectations in economics. Oxford: Blackwell, S. 1–11.

Aumann, R. J. (1962): Utility theory without the completeness axiom. In: Econometrica, 30, (3): 445–462.

Ballestero, E./Romero, C. (1998): Multiple criteria decision making and its applications to economic problems. New York: Springer.

Bamberg, G./Coenenberg, A. G./Krapp, M. (2019): Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre. 16. Aufl., München: Vahlen.

Bamberg, G./Trost, R. (1996): Entscheidungen unter Risiko: Empirische Evidenz und Praktikabilität. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 48 (6): 640–662.

Bär, C. (2018): Lineare Algebra und analytische Geometrie. Wiesbaden u. a.: Springer Spektrum.

Barten, A./Böhm, V. (1982): Consumer theory. In: Arrow, K. J./Intriligator, M. D. (Hg.): Handbook of mathematical economics - vol. II. Amsterdam, u. a.: North-Holland, S. 381–429.

Barro, R. J./King, R. G. (1984): Time-separable preferences and intertemporal-substitution models of business cycles. In: The Quarterly Journal of Economics, 99 (4): 817–839.

Baumol, W. J. (1958): The cardinal utility wich is ordinal. In: The Economic Journal, 68 (272): 665–672.

Bawa, V. S. (1975): Optimal rules for ordering uncertain prospects. In: Journal of Financial Economics, 2 (1): 95–121.

Beck, H. (2014): Behavioral Economics. Wiesbaden: Springer Gabler.

Bellman, R. (1954): The theory of dynamic programming. In: Bulletin of the American Mathematical Society, 60 (November): 503–515.

Bellman, R. (1957): Dynamic Programming. Princeton: University Press.

Benker, H. (2003): Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen: Einführung für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Wirtschaftswissenschaftler unter Anwendung von MATHEMATICA, MAPLE, MATHCAD, MATLAB und EXCEL. Berlin u. a.: Springer.

Binmore, K. (2011): Rational decisions. Princeton u. a.: University Press.

Bitz, M. (1981): Entscheidungstheorie. München: Vahlen.

Blackwell, D./Girshick, M. A. (1954): Theory of games and statistical decisions. New York, u. a.: Wiley & Sons.

Bleichrodt, H./Keskin, U./Rohde, K. I. M./Spinu, V./Wakker, P. (2015): Discounted utility and present value - a close relation. In: Operations Research, 63 (6): 1420–1430.

Bleichrodt, H./Rohde, K. I. M./Wakker, P. (2008): Koopmans' constant discounting for intertemporal choice: A simplification and a generalization. In: Journal of Mathematical Psychology, 52 (6): 341–347.

Bleichrodt, H./Quiggin, J. (1999): Life-cycle preferences over consumption and health: when is cost-effectiveness analysis equivalent to cost–benefit analysis? In: Journal of Health Economics, 18 (6): 681–708.

Blohm, H./Lüder, K./Schaefer, C. (2012): Investition. 10. Aufl., München: Vahlen.

Böhm-Bawerk, Eugen v. (1921): Kapital und Kapitalzins. Zweite Abteilung. Positive Theorie des Kapitales. Zweiter Band, 4. Aufl., Jena: Gustav Fischer.

Bouyssou, D./Pirlot, M. (2016): Conjoint measurement tools for MCDM. In: Figueira, J./Greco, S./Ehrgott, M. (Hg.): Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. 2. Aufl., New York: Springer, S. 97–151.

Bouyssou, D./Pirlot, M./Marchant, T./Tsoukias, A./Vincke, P. (2006): Evaluation and decision with multiple criteria. New York: Springer.

Brachinger, H. W. (1988): Das Bernoulli-Paradigma und Allais' Parodox: Anmerkungen zum Nobelpreis 1988 für Maurice Allais. In: Wirtschaftsdienst, 68 (11): 587–592.

Brandtner, M. (2012): Risikomessung mit kohärenten, spektralen und konvexen Risikomaßen. Wiesbaden: Springer Gabler.

Breyer, F. (2020): Mikroökonomik - Eine Einführung. 7. Aufl., Berlin u. a.: Springer Gabler.

Burghart, D. R. (2020): The two faces of independence: betweenness and homotheticity. In: Theory and Decision, 88 (4): 567–593.

Bühlmann, H./Loeffel, H./Nievergelt, E. (1975): Entscheidungs- und Spieltheorie. Berlin u. a.: Springer.

Camerer, C. F./Ho, T.-H. (1994): Violations of the betweenness axiom and nonlinearity in probability. In: Journal of Risk and Uncertainty, 8 (2): 167–196.

Chankong, V./Haimes, Y. Y. (1983): Multiobjective decision making - theory and methodology. New York: Dover Publications.

Charnes, A./Cooper, W. W./Ferguson, R. O. (1955): Optimal estimation of executive compensation by linear programming. In: Management Science, 1 (2): 138–151.

Chernoff, H. (1954): Rational selection of decision functions. In: Econometrica, 22 (4): 422–443.

Chmielewicz, K. (1994): Forschungskonzeptionen der Wirtschaftswissenschaft. 3. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Coombs, C. H./Huang, L. C. (1976): Tests of the betweenness property of expected utility. In: Journal of Mathematical Psychology, 13 (3): 323–337.

Cubitt, R. P./Sugden, R. (2001): On money pumps. In: Games and Economic Behavior, 37 (1): 121–160.

Debreu, G. (1954): Representation of a preference ordering by a numerical function. In: Thrall, R. M./Coombs, C. H./Davis, R. L. (Hg.): Decision processes. New York: Wiley & Sons, S. 159–165.

Debreu, G. (1960): Topological methods in cardinal utility theory. In: Arrow, K. J./Karlin, S./Suppes, P. (Hg.): Mathematical methods in the social sciences, 1959: proceedings of the first Stanford symposium. Stanford: University Press, S. 16–26.

Donegan, H. A./Dodd, F. J. (1991): A note on Saaty's random indexes. In: Mathematical and Coumputer Modelling, 15 (10): 135–137.

Drukarczyk, J. (1970): Investitionstheorie und Konsumpräferenz. Berlin: Duncker & Humblot.

Dubra, J./Maccheroni, F./Ok, E. A. (2004): Expected utility theory without the completeness axiom. In: Journal of Economic Theory 115 (1): 118–133.

Dyckhoff, H. (1988): Zeitpräferenz. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 40 (11): 990–1008.

Dyckhoff, H. (1993): Ordinale versus kardinale Messung beim Bernoulli-Prinzip. In: OR-Spektrum, 15 (3): 139–146.

Dyckhoff, H. (2007): Quasilineare Mittel von Periodensicherheitswerten als intertemporale Nutzenfunktionen. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 59 (8): 982–1001.

Dyer, J. S. (2016): MAUT – Multiattribute utility theory. In: Figueira, J./Greco, S./Ehrgott, M. (Hg.): Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. 2. Aufl., New York: Springer, S. 285–314.

Dyer, J. S./Sarin, R. K. (1979): Measurable multiattribute functions. In: Operations Research, 27 (4): 810–822.

Dyer, J. S./Sarin, R. K. (1981): Multicriteria decision making. In: Holzmann, A. G. (Hg.): Mathematical programming for operations researchers and computer scientists. New York: Dekker, S. 123–148.

Eisenführ, F./Weber, M./Langer, T. (2010): Rationales Entscheiden. 5. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Esser, J. (2001): Vollständigkeit, Konsistenz und Kompatibilität von Präferenzrelationen. In: OR-Spektrum, 23 (2): 183–201.

Ferejohn, J./Page, T. (1978): On the foundations of intertemporal choice. In: American Journal of Agricultural Economics, 60 (2): 269–275.

Fine, T. L. (2008): Evaluating the Pasadena, Altadena, and St Petersburg Gambles. In: Mind, 117 (467): 613–632.

Fink, S. B. (2018): Progress by Paradox - Paradoxien als Katalysator intellektuellen Fortschritts. In: Engel, K. (Hg.): Von Schildkröten und Lügnern - Paradoxien und Antinomien in den Wissenschaften. Münster: mentis, S. 13–34.

Fischer, K. (2003): Normative vs. Deskriptive Präferenztheorien. In: Jahnke, H./Brüggemann, W. (Hg.): Betriebswirtschaftslehre und betriebliche Praxis - Festschrift für Horst Seelbach zum 65. Geburtstag. Wiesbaden: DUV, S. 161–190.

Fischer, K. (2004): Aspekte einer empirisch fundierten betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Wiesbaden: DUV.

Fishburn, P. C. (1965): Independence in utility theory with whole product sets. In: Operations Research, 13 (1): 28–45.

Fishburn, P. C. (1966): A note on recent developments in additive utility theories for multiple-factor situations. In: Operations Research, 14 (6): 1143–1148.

Fishburn, P. C. (1968): Utility theory. In: Management Science, 14 (5): 335–378.

Fishburn, P. C. (1971): On the foundations of game theory: The case of non-Archimedean utilities. In: International Journal of Game Theory, 1 (1): 65–71.

Fishburn, P. C. (1979): Utility theory for decision making. New York: Wiley.

Fishburn, P. C. (1982): The foundations of expected utility. Dordrecht: Springer.

Fishburn, P. C. (1988): Expected utility: An anniversary and a new era. In: Journal of Risk and Uncertainty, 1 (3): 267–283.

Fishburn, P. C. (1989a): Retrospective on the utility theory of von Neumann and Morgenstern. In: Journal of Risk and Uncertainty, 2 (2): 127–158.

Fishburn, P. C. (1989b): Stochastic dominance in nonlinear utility theory. In: Fomby, T. B./Seo, T. K. (Hg.): Studies in the economics of uncertainty in honor of Josef Hadar. New York: Springer, S. 3–20.

Fishburn, P. C. (1991): Nontransitive preferences in decision theory. In: Journal of Risk and Uncertainty, 4 (2): 113–134.

Fishburn, P. C./Edwards, W. (1997): Discount-neutral utility models for denumerable time streams. In: Theory and Decision, 43 (2): 139–166.

Fishburn, P. C./Rubinstein, A. (1982): Time preference. In: International Economic Review, 23 (3): 677–694.

Fishburn, P. C./Wakker, P. (1995): The invention of the independence condition for preferences. In: Management Science, 41 (7): 1130–1144.

Fisher, I. (1930): The theory of interest. New York: MacMillan.

Föllmer, H./Schied, A. (2016): Stochastic finance. 4. Aufl., Berlin: De Gruyter Oldenbourg.

Frederick, S./Loewenstein, G./O'Donoghue, T. (2002): Time discounting and time preference: A critical review. In: Journal of Economic Literature, 40 (2): 351–401.

French, S. (1988): Decision theory: An introduction to the mathematics of rationality. New York: Horwood.

Frisch, R. (1926): Sur un problème d'économie pure. In: Norsk Matematisk Forenings Skrifter, 1 (16): 1–40.

Frisch, R. (1957): Sur un problème d'économie pure. In: Metroeconomica, 9 (Agosto): 79–111.

Gäfgen, G. (1974): Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung: Untersuchung zur Logik und Bedeutung des rationalen Handelns. 3. Aufl., Tübingen: J. C. B. Mohr.

Gerber, A./Rhode, K. I. M.(2010): Risk and preference reversals in intertemporal choice. In: Journal of Economic Behavior & Organization, 76 (3): 654–668.

González-Díaz, J./García-Jurado, I./Fiestras-Janeiro, M. G. (2010): An introductory course on mathematical game theory. Providence: American Mathematical Society.

Götze, U. (2014): Investitionsrechnung. 7. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Gorman, W. M. (1959): Separable utility and aggregation. In: Econometrica, 27 (3): 469–481.

Gorman, W. M. (1968): Conditions for additive separability. In: Econometrica, 36 (3/4): 605–609.

Gottinger, H. W. (1969): Beiträge zur funktionalen Separabilität bei Nutzenfunktionen (Teil I). In: Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 125 (3): 406–436.

Gottinger, H. W. (1970): Über die Existenz einer stetigen, reellen Nutzenfunktion. In: Zeitschrift für Nationalökonomie, 30 (3/4): 283–290.

Grant, S./Van Zandt, T. (2008): Expected utility theory. In: Anand, P./Pattanaik, P./ Puppe, C. (Hg.): Handbook of rational and social choice. Cambridge: University Press, S. 21–68.

Gul, F./Lantto, O. (1990): Betweenness satisfying preferences and dynamic choice. In: Journal of Economic Theory, 52 (1): 162–177.

Hadar, J./Russell, W. R. (1969): Rules for ordering uncertain prospects. In: The American Economic Review, 59 (1): 25–34.

Halevy, Y. (2015): Time consistency: stationarity and time invariance. In: Econometrica, 83 (1): 335–352.

Hammond, P. J. (1988): Consequentialism and the independence axiom. In: Munier, B. R. (Hg.): Risk, decision, and rationality. Dordrecht: Kluwer, S. 503–516.

Hammond, P. J./Zank, H. (2014): Rationality and dynamic consistency under risk and uncertainty. In: Machina, M. J./Viscusi, W. K. (Hg.): Handbook of the Economics of Risk and Uncertainty - vol. I. Oxford u. a.: North-Holland, S. 41–97.

Hampton, J. (1994): The failure of expected-utility theory as a theory of reason. In: Economics and Philosophy, 10 (2): 195–242.

Hanoch, G./Levy, H. (1969): The efficiency analysis of choices involving risk. In: The Review of Economic Studies, 36 (3): 335–346.

Hansson, S. O. (2018): Money-Pumps. In: Hansson, S. O./Hendricks, V. F./Kjeldahl, E. M. (Hg.): Introduction to formal philosophy. Cham: Springer Nature, S. 567–576.

Harrison, G. W./Martínez-Correa, J./Swarthout, J. T. (2015): Reduction of compound lotteries with objective probabilities: Theory and evidence. In: Journal of Economic Behavior & Organization, 119 (Nov.): 32–55.

Hausner, M. (1954): Multidimensional utilities. In: Thrall, R. M./Coombs, C. H./Davis, R. L. (Hg.): Decision processes. New York: Wiley & Sons, S. 167–186.

Hax, H. (1993): Investitionstheorie. 5. Aufl., Heidelberg: Physica.

Hens, T./Pamini, P. (2008): Grundzüge der analytischen Mikroökonomie. Berlin u. a.: Springer.

Henze, N./Last, G. (2005): Mathematik für Wirtschaftsingenieure und für naturwissenschaftlich-technische Studiengänge. Bd. 1: Grundlagen, Analysis, Stochastik, lineare Gleichungssysteme. Wiesbaden: Vieweg.

Hering, T. (2017): Investitionstheorie. 5. Aufl., München u. a.: De Gruyter Oldenbourg.

Herstein, I. N./Milnor, J. (1953): An axiomatic approach to measurable utility. In: Econometrica, 21 (2): 291–297.

Hilbert, D. (1987): Grundlagen der Geometrie. 13. Aufl., Stuttgart: Teubner.

Hodges, J. L./Lehmann, E. L. (1952): The use of previous experience in reaching statistical decisions. In: Annals of Mathematical Statistics, 23 (3): 396–407.

Holler, M. J./Illing, G./Napel, S. (2019): Einführung in die Spieltheorie. 8. Aufl., Berlin u. a.: Springer Gabler.

Honohan, P./Neary, J. P. (2003): W. M. Gorman (1923–2003). In: The Economic and Social Review, 34 (2): 195–209.

Honohan, P./Neary, J. P. (2021): W. M. Gorman (1923–2003). In: Cord, R. A. (Hg.): The Palgrave Companion to Oxford Economics. Cham: Palgrave Macmillan, S. 503–519.

Hülsmann, J./Gamerith, W./Leopold-Wildburger, U./Steindl, W. (2005): Einführung in die Wirtschaftsmathematik. 4. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Hurwicz, L. (1951): Optimality criteria for decision making under ignorance. Cowles Commission Discussion Paper: Statistics No. 370.

Jarrow, R. A. (1988): Finance theory. London u. a.: Prentice-Hall.

Jensen, N. E. (1967a): An introduction to Bernoullian utility theory: Part I - utility functions. In: The Swedish Journal of Economics, 69 (3): 163–183.

Jensen, N. E. (1967b): An introduction to Bernoullian utility theory: Part II - interpretation, evaluation and application; a critical survey. In: The Swedish Journal of Economics, 69 (4): 229–247.

Johansen, L. (1969): Ragnar Frisch's contributions to economics. In: The Swedish Journal of Economics, 71 (4): 302–324.

Jordan, J. (1993): Pascal's Wager and the problem of infinite utilities. In: Faith and Philosophy, 10 (1): 49–59.

Kahneman, D./Tversky, A. (1979): Prospect theory: an analysis of decision under risk. In: Econometrica, 47 (2): 263–292.

Kalveram, T. (1977): Das Wachstumsziel des Unternehmens. Wiesbaden: Gabler.

Kamenetzky, R. D. (1982): The relationship between the Analytic Hierarchy Process and the additive value function. In: Decision Sciences, 13 (4): 702–713.

Kannetzky, F. (2000): Paradoxes Denken. Paderborn: mentis.

Karni, E. (2014): Axiomatic foundations of expected utility and subjective probability. In: Machina, M. J./Viscusi, W. K. (Hg.): Handbook of the economics of risk and uncertainty - vol. I. Oxford u. a.: North-Holland, S. 1–39.

Karni, E./Safra, Z. (2015): Continuity, completeness, betweenness and cone-monotonicity. In: Mathematical Social Sciences, 74 (March): 68–72.

Keeney, R. L./Raiffa, H. (1976): Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs. New York: Wiley & Sons.

Keeney, R. L./Raiffa, H. (1993): Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs. Cambridge: University Press.

Keller, L. R./Simon, J. (2019): Preference functions for spatial risk analysis. In: Risk Analysis, 39 (1): 244–256.

Keren, G./Roelofsma, P. H. M. P. (1995): Immediacy and certainty in intertemporal choice. In: Organizational Behavior and Human Decision Processes, 63 (3): 287–297.

Klein, R./Scholl, A. (2011): Planung und Entscheidung. 2. Aufl., München: Vahlen.

Kolmar, M. (2021): Grundlagen der Mikroökonomik. 2. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Koopmans, T. C. (1960): Stationary ordinal utility and impatience. In: Econometrica, 28 (2): 287–309.

Koopmans, T. C. (1972a): Representation of preference orderings with independent components of consumption. In: McGuire, C. B./Radner, R. (Hg.): Decision and organization - a volume in honor of Jacob Marschak. Amsterdam u. a.: North-Holland, S. 57–78.

Koopmans, T. C. (1972b): Representation of preference orderings over time. In: McGuire, C. B./Radner, R. (Hg.): Decision and organization - a volume in honor of Jacob Marschak. Amsterdam u. a.: North-Holland, S. 79–100.

Koopmans, T. C./Diamond, P. A./Williamson, R. E. (1964): Stationary utility and time perspective. In: Econometrica, 32 (1/2): 82–100.

Krantz, D. H./Luce, R. D./Suppes, P./Tversky, A. (1971): Foundations of measurement - vol. I: Additive and polynomial representations. New York: Dover.

Krelle, W. (1968): Präferenz- und Entscheidungstheorie. Tübingen: J. C. B. Mohr.

Kreps, D. M. (2013): Microeconomic foundations - I: Choice and competitive markets. Princeton: University Press.

Kruschwitz, L./Husmann, S. (2012): Finanzierung und Investition. 7. Aufl., München: Oldenbourg.

Kruschwitz, L./Lorenz, D. (2019): Investitionsrechnung. 15. Aufl., München u. a.: De Gruyter Oldenbourg.

Küpper, H.-U. (2018): Unternehmensethik – ein umstrittener Gegenstand betriebswirtschaftlicher Forschung und Lehre. In: Matiaske, W./Weber, W. (Hg.): Ideengeschichte der BWL – ABWL, Organisation, Personal, Rechnungswesen und Steuern. Wiesbaden: Springer Gabler, S. 49–70.

Küpper, H.-U./Friedl, G./Hofmann, C./Hofmann, Y./Pedell, B. (2013): Controlling: Konzeption – Aufgaben – Instrumente. 6. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Kürsten, W. (1992): Präferenzmessung, Kardinalität und sinnmachende Aussagen - Enttäuschung über die Kardinalität des Bernoulli-Nutzens. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 62 (4): 459–477.

Lancaster, K. (1963): An axiomatic theory of consumer time preference. In: International Economic Review, 4 (2): 221–231.

Laux, H./Gillenkirch, R. M./Schenk-Mathes, H. Y. (2018): Entscheidungstheorie. 10. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

LaValle, I. H./Wapman, K. R. (1986): Note – Rolling back decision trees requires the independence axiom! In: Management Science, 32 (3): 382–385.

Lehmann, M. (1973): Zur Theorie der Zeitpräferenz. Berlin: Duncker & Humblot.

Lengwiler, Y. (2009): The origins of expected utility theory. In: Hafner, W./Zimmermann, H. (Hg.): Vinzenz Bronzin's option pricing models - exposition and appraisal. Berlin u. a.: Springer, S. 535–545.

Leonard, R. J. (1995): From parlor games to social science: Von Neumann, Morgenstern, and the creation of game theory 1928–1944. In: Journal of Economic Literature, 33 (2): 730–761.

Levy, H. (1992): Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis. In: Management Science, 38 (4): 555–593.

Levy, H. (2016): Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty. 3. Aufl., New York u. a.: Springer.

Lichtenstein, S./Slovic P. (1971): Reversals of preference between bids and choices in gambling decisions. In: Journal of Experimental Psychology, 89 (1): 46–55.

Loewenstein, G./Prelec, D. (1992): Anomalies in intertemporal choice: evidence and an interpretation. In: The Quarterly Journal of Economics, 107 (2): 573–597.

Löffler, A. (2001): Ein Paradox der Portfoliotheorie und vermögensabhängige Nutzenfunktionen. Wiesbaden: DUV.

Lu, J./Saito, K. (2018): Random intertemporal choice. In: Journal of Economic Theory, 177 (Sep.): 780–815.

Luce, R. D./Raiffa, H. (1957): Games and decisions – introduction and critical survey. New York: Dover Publication.

Machina, M. J. (1982): "Expected utility" analysis without the independence axiom. In: Econometrica, 50, (2): 277–323.

Machina, M. J. (1987): Choice under uncertainty: problems solved and unsolved. In: Journal of Economic Perspectives, 1 (1): 121–154.

Machina, M. J. (1989): Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty. In: Journal of Economic Literature, 27 (4): 1622–1668.

Malinvaud, E. (1952): Note on von Neumann-Morgenstern's strong independence axiom. In: Econometrica, 20 (4): 679.

Marschak, J. (1950): Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility. In: Econometrica, 18 (2): 111–141.

Martin, G. E. (1975): The foundations of geometry and the non-Euclidean plane. New York u. a.: Springer.

Maschler, M./Solan, E./Zamir, S. (2020): Game theory. 2. Aufl., Cambridge: University Press.

Mas-Colell, A./Whinston, M./Green, J. R. (1995): Microeconomic theory. Oxford: University Press.

Maskin, E. (1979): Decision making under ignorance with implications for social choice. In: Theory and Decision, 11 (3): 319–337.

Matschke, M. J. (1993): Investitionsplanung und Investitionskontrolle. Herne/Berlin: Neue Wirtschafts-Briefe.

Menges, G. (1974): Grundmodelle wirtschaftlicher Entscheidungen. 2. Aufl., Wiesbaden: Springer.

Meyer, J. (2014): The theory of risk and risk aversion. In: Machina, M. J./Viscusi, W. K. (Hg.): Handbook of the economics of risk and uncertainty - vol. I. Oxford u. a.: North-Holland, S. 99–133.

Millner, A./Heal, G. (2018): Time consistency and time invariance in collective intertemporal choice. In: Journal of Economic Theory, 176 (July): 158–169.

Milnor, J. W. (1954): Games against nature. In: Thrall, R. M./Coombs, C. H./Davis, R. L. (Hg.): Decision processes. New York: Wiley & Sons, S. 49–59.

Morgenstern, O. (1976): The collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. In: Journal of Economic Literature, 14 (3): 805–816.

Moscati, I. (2013): How cardinal utility entered economic analysis: 1909–1944. In: The European Journal of the History of Economic Thought, 20 (6): 906–939.

Moscati, I. (2016): How economists came to accept expected utility theory: The case of Samuelson and Savage. In: Journal of Economic Perspectives, 30 (2): 219–236.

Mosler, K. C. (1982): Entscheidungsregeln bei Risiko: Multivariate stochastische Dominanz. Berlin u. a.: Springer.

Moxter, A. (1964): Präferenzstruktur und Aktivitätsfunktion des Unternehmers. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 16 (1): 6–35.

Müller, D. (2020): Betriebswirtschaftslehre für Ingenieure. 3. Aufl., Berlin: Springer.

Mus, G. (1988): Das Prinzip der Zeitdominanz. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 40 (6): 504–516.

Neumann, J. M. von (1928): Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. In: Mathematische Annalen, 100 (o. A.): 295–320.

Neumann, J. M. von/Morgenstern, O. (1953): Theory of games and economic behavior. 3. Aufl., Princeton: University Press.

Niehans, J. (1948): Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen. In: Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 84 (5): 433–456.

Nitzsch, R. von (1992): Entscheidung bei Zielkonflikten. Wiesbaden: Gabler.

Nitzsch, R. von (2021): Entscheidungslehre. 11. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Obermaier, R./Saliger, E. (2020): Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie: Einführung in die Logik individueller und kollektiver Entscheidungen. 7. Aufl., München: De Gruyter Oldenbourg.

Ortmann, K. M. (2017): Praktische Finanzmathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ossadnik, W. (1998): Mehrziel-orientiertes strategisches Controlling. Heidelberg: Physica.

Ossadnik, W. (2009): Controlling. 4. Aufl., München: Oldenbourg.

Pennesi, D. (2021): Intertemporal discrete choice. In: Journal of Economic Behavior and Organization, 186 (June): 690–706.

Pérez, J./Jimeno, J. L./Mokotoff, E. (2006): Another potential shortcoming of AHP. In: Top, 14 (1): 99–111.

Peters, H. (2015): Game theory - a multi-leveled approach. 2. Aufl., New York u. a.: Springer.

Peters, M./Zelewski, S. (2004): Möglichkeiten und Grenzen des „Analytic Hierarchy Process“ (AHP) als Verfahren der Wirtschaftlichkeitsanalyse. In: Zeitschrift für Planung & Unternehmenssteuerung, 15 (3): 295–324.

Pfister, H.-R./Jungermann, H./Fischer, K. (2017): Die Psychologie der Entscheidung. 4. Aufl., Heidelberg u. a.: Spektrum, Akademie Verlag.

Pomerol, J.-C./Barba-Romero, S. (2000): Multicriterion decision in management: principles and practise. Norwell: Kluwer.

Prelec, D./Loewenstein, G. (1991): Decision making over time and under uncertainty: A common approach. In: Management Science, 37 (7): 770–786.

Rambaud, S. C./Sánchez Pérez, A. M. (2020): Discounted and expected utility from the probability and time trade-off model. In: Mathematics, 8 (4): 601. https://doi.org/10.3390/math8040601.

Ramsey, F. P. (1928): A mathematical theory of saving. In: The Economic Journal, 38 (152): 543–559.

Riedl, R. (2006): Analytischer Hierarchieprozess vs. Nutzwertanalyse: Eine vergleichende Gegenüberstellung zweier multiattributiver Auswahlverfahren am Beispiel Application Service Providing. In: Fink, K./Ploder, C. (Hg.): Wirtschaftsinformatik als Schlüssel zum Unternehmenserfolg. Wiesbaden: Gabler, S. 99–127.

Roberts, F. S. (1985): Measurement theory: with applications to decisionmaking, utility, and the social sciences. Cambridge: University Press.

Rudolph, B. (1983): Zur Bedeutung der kapitaltheoretischen Separationstheoreme für die Investitionsplanung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 53 (3): 261–287.

Russell, J. S. (2020): Non-Archimedean preferences over countable lotteries. In: Journal of Mathematical Economics, 88 (May): 180–186.

Saaty, T. L. (1977a): A scaling method for priorities in hierarchical strutures. In: Journal of Mathematical Psychology, 15 (3): 234–281.

Saaty, T. L. (1977b): The Sudan transport study. In: Interfaces, 8 (1/2): 37–57.

Saaty, T. L. (1980): The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation. New York u. a.: McGraw-Hill.

Saaty, T. L. (1986): Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process. In: Management Science, 32 (7): 841–855.

Saaty, R. W. (1987): The analytic hierarchy process - what it is and how it is used. In: Mathematical Modelling, 9 (3–5): 161–176.

Saaty, T. L. (1990): How to make a decision: the analytic hierarchy process. In: European Journal of Operational Research, 48 (1): 9–26.

Saaty, T. L./Vargas, L. G. (2012): Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process. 2. Aufl., New York u. a.: Springer.

Samuelson, P. A. (1937): A note on measurement of utility. In: The Review of Economic Studies, 4 (2): 155–161.

Samuelson, P. A. (1938): The numerical representation of ordered classifications and the concept of utility. In: The Review of Economic Studies, 6 (1): 65–70.

Samuelson, P. A. (1948): Foundations of economic analysis. Cambridge: Harvard University Press.

Samuelson, P. A. (1952): Probability, utility, and the independence axiom. In: Econometrica, 20 (4): 670–678.

Savage, L. J. (1951): The theory of statistical decision. In: Journal of the American Statistical Association, 46 (o. A.): 55–67.

Schäfer, H. (2005): Unternehmensinvestitionen. 2. Aufl., Heidelberg: Physica.

Schauenberg, B. (1990): Dreiecksdiagramme in der Diskussion um die Erwartungsnutzentheorie. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 42 (2): 135–151.

Schenkerman, S. (1997): Inducement of nonexistent order by the Analytic Hierarchy Process. In: Decision Science, 28 (2): 475–482.

Schiel, S. (2006): Entwicklung einer Bilderskala zur Messung markenrelevanter Emotionen. In: Bosch, C./Schiel, S./Winder, T. (Hg.): Emotionen im Marketing. Wiesbaden: Gabler, S. 157–320.

Schindler, K. (2002): Mathematik für Ökonomen: Grundlagen für Betriebswirte, Volkswirte und Wirtschaftsingenieure. 4. Aufl., Wiesbaden: DUV.

Schmid, F./Trede, M. (2006): Finanzmarktstatistik. Berlin u. a.: Springer.

Schmidt, U. (2004): Alternatives to expected utility: formal theories. In: Barberà, S./Hammond, P. J./Seidl, C. (Hg.): Handbook of utility theory - vol. II - Extensions. Boston u. a.: Kluwer, S. 757–837.

Schneeweiß, C. (1991): Planung. Bd. 1: Systemanalytische und entscheidungstheoretische Grundlagen. Berlin u. a.: Springer.

Schneeweiß, H. (1962): Ein allgemeines Schema des stochastischen Programmierens. In: Statistische Hefte, 3 (2): 131–157.

Schneeweiß, H. (1963): Nutzenaxiomatik und Theorie des Messens. In: Statistische Hefte 4 (2): 178–220.

Schneeweiß, H. (1966): Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin u. a.: Springer.

Schneider, D. (1997): Betriebswirtschaftslehre. Bd. 3: Theorie der Unternehmung. München u. a.: Oldenbourg.

Schneider, D. (2011): Betriebswirtschaftslehre als Einzelwirtschaftstheorie der Institutionen. Wiesbaden: Gabler.

Seidenfeld, T. (1988): Decision theory without “independence” or without “ordering”: what is the difference? In: Economics & Philosophy, 4 (2): 267–290.

Sieben, G. (1976): Investitionskalküle unter Berücksichtigung pluralistischer Interessen. In: Albach, H./Simon, H. (Hg.): Investitionstheorie und Investitionspolitik privater und öffentlicher Unternehmen: Bericht von der wissenschaftlichen Tagung des Verbandes der Hochschullehrer für Betriebswirtschaft e. V. vom 20. bis 24. Mai 1975 in Bonn. Wiesbaden: Gabler, S. 195–217.

Sieben, G./Schildbach, T. (1994): Betriebswirtschaftliche Entscheidungstheorie. 4. Aufl, Düsseldorf: Werner.

Streich, P./Levy, J. S. (2007): Time horizons, discounting, and intertemporal choice. In: Journal of Conflict Resolution, 51 (2): 199–226.

Streitferdt, L. (1973): Grundlagen und Probleme der betriebswirtschaftlichen Risikotheorie. Wiesbaden: Gabler.

Strotz, R. H. (1955/56): Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. In: The Review of Economic Studies, 23 (3): 165–180.

Strotz, R. H. (1957): The empirical implications of a utility tree. In: Econometrica, 25 (2): 269–280.

Strotz, R. H. (1959): The utility tree – A correction and further appraisal. In: Econometrica, 27 (3): 482–488.

Strulik, H./Trimborn, T. (2018): Hyperbolic discounting can be good for your health. In: Journal of Economic Psychology, 69 (Dez.): 44–57.

Strulik, H. (2021): Intertemporal choice with health-dependent discounting. In: Mathematical Social Sciences, 111 (May): 19–25.

Sugden, R. (2004): Alternatives to expected utility: foundations. In: Barberà, S./Hammond, P. J./Seidl, C. (Hg.): Handbook of utility theory - vol. II - Extensions. Boston u. a.: Kluwer, S. 685–756.

Takemura, K. (2019): Foundations of economic psychology. Singapore: Springer.

Takemura, K. (2021): Behavioral decision theory. 2. Aufl., Singapore: Springer.

Thaler, R. H. (1981): Some empirical evidence on dynamic inconsistency. In: Economic Letters, 8 (3): 201–207.

Thrall, R. M. (1954): Applications of multidimensional utility theory. In: Thrall, R. M./Coombs, C. H./Davis, R. L. (Hg.): Decision processes. New York: Wiley & Sons, S. 181–186.

Tintner, G. (1941): The theory of choice under subjective risk and uncertainty. In: Econometrica, 9 (3/4): 298–304.

Tintner, G. (1942): A contribution to the nonstatic theory of production. In: Lange, O./McIntyre, F./Yntema, T. O. (Hg.): Studies in mathematical economics and econometrics. Chicago: University Press, S. 92–109.

Trautmann, S. (2007): Investitionen. 2. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Trost, R. (1991): Entscheidungen unter Risiko: Bernoulliprinzip und duale Theorie. Frankfurt/M. u. a.: Peter Lang.

Tversky, A. (1969): Intransitivity of preferences. In: Psychological Review, 76 (1): 31–48.

Tversky, A./Kahneman, D. (1992): Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. In: Journal of Risk and Uncertainty, 5(4): 297–323.

Tversky, A./Thaler, R. H. (1990): Anomalies: preference reversals. In: The Journal of Economic Perspectives, 4 (2): 201–211.

U. S. Department of Energy (1986): A multiattribute utility analysis of sites nominated for characterization for the first radioactive waste-repository - a decision-aiding methodology. o. A.

Vaidya, O. S./Kumar, S. (2006): Analytic hierarchy process: an overview of applications. In: European Journal of Operational Research, 169 (1): 1–29.

Varian, H. R. (1992): Microeconomic analysis. 3. Aufl., New York u. a.: Norton & Company.

Voigt, K.-I. (1992): Strategische Planung und Unsicherheit. Wiesbaden: Gabler.

Wakker, P. (1988): The algebraic versus the topological approach to additive representations. In: Journal of Mathematical Psychology, 32 (4): 421–435.

Wakker, P. (1989): Additive representations of preferences - a new foundation of decision analyses. Dordrecht: Springer.

Wakker, P. (1991): Additive representations on rank-ordered sets: I. The algebraic approach In: Journal of Mathematical Psychology, 35 (4): 501–531.

Wald, A. (1945): Sequential tests of statistical hypotheses. In: The Annals of Mathematical Statistics, 16 (2): 117–186.

Wald, A. (1950): Statistical decision functions. New York: John Wiley & Sons.

Wallenius, J./Dyer, J. D./Fishburn, P. C./Steuer, R. E./Zionts, S./Deb, K. (2008): Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: Recent accomplishments and what lies ahead. In: Management Science, 54 (7): 1336–1349.

Webb, C. S. (2016): Continuous quasi-hyperbolic discounting. In: Journal of Mathematical Economics, 64 (Mai): 99–106.

Weikard, H.-P. (2001): Zeitpräferenz und Zeitkonsistenz: Zur Rationalität sequenzieller Entscheidungen. In: Agrarwirtschaft, 50 (8): 490–497.

Werners, B. (2013): Grundlagen des Operations Research. 3. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Wied-Nebbeling, S./Schott, H. (2005): Einführung in die Mikroökonomik. 3. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Wiese, H. (2021): Advanced microeconomics. Wiesbaden: Springer Gabler.

Wild, J. (1974): Grundlagen der Unternehmungsplanung. Köln u. a.: Westdt. Verlag.

Wilhelm, J. (1986): Zum Verhältnis von Höhenpräferenz und Risikopräferenz - Eine theoretische Analyse. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 38 (6): 467–491.

Williams, A. C./Nassar, J. I. (1966): Financial measurement of capital investments. In: Management Science, 12 (11): 851–864.

Wolf, J. (2020): Organisation, Management, Unternehmensführung: Theorien, Praxisbeispiele und Kritik. 6. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Yager, R. R. (2004): Decision making using minimization of regret. In: International Journal of Approximate Reasoning, 36 (2): 109–128.

Zangemeister, C. (1976): Nutzwertanalyse in der Systemtechnik: Eine Methodik zur multidimensionalen Bewertung und Auswahl von Projektalternativen. 4. Aufl., München: Wittemann.

Zelewski, S. (2008): Grundlagen. In: Corsten, H./Reiß, M. (Hg.): Betriebswirtschaftslehre. Bd. 1: Grundlagen, internes Rechnungswesen, externes Rechnungswesen, Beschaffung, Produktion und Logistik, Marketing, Investition und Finanzierung. 4. Aufl., München u. a.: Oldenbourg.

Zimmermann, H.-J. (2008): Operations Research - Methoden und Modelle. 2. Aufl., Wiesbaden: Vieweg.

Zimmermann, H.-J./Gutsche, L. (1991): Multi-Criteria Analyse: Einführung in die Theorie der Entscheidungen bei Mehrfachzielsetzungen. Berlin u. a.: Springer.

Zuber, S. (2011): The aggregation of preferences: can we ignore the past? In: Theory and Decision, 70 (3): 367–384.

Kapitel 2

Deskriptive Theorie individueller Entscheidungen

2.1 Einführung

Ausgehend von den bisherigen Darstellungen sind die Modelle und Prämissen der präskriptiven Entscheidungstheorie auf ihre Realitätsnähe hin und damit auf ihren Erklärungs-, Gestaltungs- und Prognosewert hin zu hinterfragen. In vielen empirischen Untersuchungen wurde gezeigt, dass Handlungsträger sich in der Realität nicht so verhalten, wie es dieser Theoriebereich vorschreibt und wie es zu fordern wäre.

Diese Erkenntnis ist nicht verwunderlich, da es sich immer um reale Personen in realen Situationen handelt, und eine entscheidungstheoretisch korrekte Vorgehensweise selten idealtypisch umgesetzt werden kann. Aus dieser Tatsache lassen sich zwei wesentliche Schlussfolgerungen ziehen: einerseits kann weiterhin eine entscheidungstheoretisch korrekte Vorgehensweise – zumindest – angestrebt werden. Andererseits kann untersucht werden, ob die Abweichungen vom Rationalitätspostulat nicht vielleicht selbst wiederum einer Systematik unterworfen sind. Wenn diese Abweichungssystematik offengelegt wird, können auch die entscheidungstheoretischen Modelle daraufhin ausgerichtet bzw. angepasst werden.

Der zweite Weg wird in den folgenden Abschnitten beschritten, indem ein Ausschnitt aus den umfangreichen Erkenntnissen der deskriptiven Entscheidungs- und Organisationstheorie dargestellt wird. Ziel der Ausführungen ist es nicht, jede Abweichung von der entscheidungslogischen Vorgehensweise zu rechtfertigen. Vielmehr soll durch die Darstellung der häufigsten Abweichungsformen das Augenmerk auf die wesentlichen Schwachstellen der entscheidungslogischen Modelle gelenkt werden. Damit wird ein erster Ansatzpunkt zur Verbesserung des tatsächlichen Problemlösungshandelns geliefert.

Grundlage und Ausgangspunkt deskriptiver Betrachtungen sind die bisher verwendeten Annahmen in Bezug auf den Prozess und den Akteur[1], von denen in der Realität nur wenige als erfüllt angesehen werden. Diese Anforderungen beschreiben einen idealtypischen „homo oeconomicus“, der jedoch in der Realität nicht – bzw. äußerst selten – anzutreffen ist. Simon, der Begründer der Sichtweise der begrenzten Rationalität, fundiert dies folgendermaßen: *„The capacity of the human mind for formulating and solving complex problems is very small compared with the size of the problems whose solutions is required for objectively rational behaviour in the real world – or even for*

[1] Vgl. Abschn. 1.1 auf S. 3.

© Der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

D. Müller, *Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36597-4_2

a reasonable approximation to such objective rationality.“[2] Besondere Kritik erfahren die folgenden Annahmen:[3]

- Der Akteur verfügt über vollständige Informationen in Bezug auf die zukünftigen Konsequenzen der gewählten Alternative.
- Der Akteur ist in der Lage, zum heutigen Zeitpunkt zukünftige Ergebnisse und Eintrittswahrscheinlichkeiten zu kennen und auch bewerten zu können.
- Die Präferenzen des Akteurs erfüllen die entsprechenden Anforderungen.[4]
- Der Akteur sucht die optimale Alternative aus der Menge aller Alternativen.
- Der Akteur verfügt über den Willen und über das Können, die aufwendigen Verfahren der Problemanalyse und Problemlösung sachgerecht durchzuführen.
- Der Akteur verfügt über eine unbegrenzte Informationsverarbeitungs- und Speicherkapazität.
- Es existieren keinerlei kognitiven, emotionalen und/oder physiologischen Einschränkungen.
- Der Akteur entscheidet und handelt allein, ohne auf andere Akteure Rücksicht nehmen zu müssen.
- Die Bewältigung des Entscheidungsproblems erfolgt ohne Zeitbedarf und ohne Kosten.

Schon bei der Vorstellung der erforderlichen Annahmen über die Präferenzen bei den verschiedenen präskriptiven Modellen ist auf die restriktive Natur hingewiesen worden. So verdeutlichte:

- Beispiel 1.1 auf S. 41 die Schwierigkeiten bei Erfüllung der Transitivitäts-Annahme,
- Beispiel 1.5 auf S. 60 die oftmals nicht erfüllte einfache Unabhängigkeit bei multikriteriellen Problemen,
- Beispiel 1.15 auf S. 143 nicht-stetige Präferenzen bei Unsicherheit sowie
- Beispiel 1.19 auf S. 195 die Probleme mit der wechselseitigen Unabhängigkeit bei intertemporalen Entscheidungen.

Der reale Entscheidungsträger bewegt sich nicht in dem bisher dargestellten Raum, der durch die Primärdeterminanten der Entscheidung aufgespannt

[2] Simon (1957: 198). Herbert A. Simon (1916–2001) erhielt 1978 den „Wirtschaftsnobelpreis“ (Offizielle Bezeichnung: Preis für Wirtschaftswissenschaften der schwedischen Reichsbank im Gedenken an Alfred Nobel).

[3] Vgl. March/Simon (1958: 138-142); Kirsch (1970: 64–65). Wolf beschreibt den „homo oeconomicus“ folgendermaßen: *„Er ist weder groß noch klein, dick noch dünn, verheiratet noch ledig. Man weiß nicht, ob er seinen Hund liebt, seine Frau prügelt oder Spielautomaten der Poesie vorzieht. Wir wissen nicht, was er will. Aber wir wissen, dass er, was es auch sein mag, skrupellos maximieren wird.“* Wolf (2020: 155).

[4] Vgl. Tab. 1.59 auf S. 217.

wird, sondern unterliegt dem Einfluss von Sekundärdeterminanten (vgl. Abbildung 2.1).

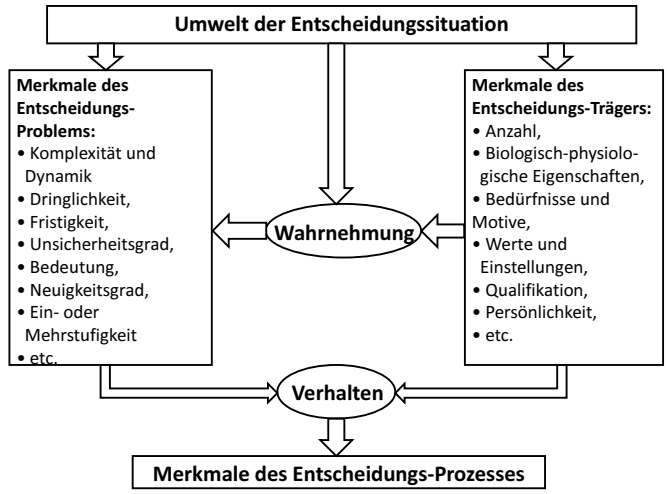


Abb. 2.1: Sekundärdeterminanten des Entscheidungsverhaltens. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Lachhammer (1977: 51); Bronner (1993: 715); Laux/Liermann (2005: 67).

Die Ideen, Methoden und Erkenntnisse, welche die Abweichungen des tatsächlichen Entscheidungsverhaltens von den präskriptiven Modellen feststellen, systematisieren und erklären, werden unter dem Begriff der **Verhaltensökonomie** bzw. **Behavioural Economics** zusammengefasst. Diese Forschungsrichtung erhielt in den letzten Jahren steigende Aufmerksamkeit. So erhielt z. B. Daniel Kahneman (geb. 1934) im Jahr 2002 den „Wirtschaftsnobelpreis“ für die Entwicklung der Prospect Theory.[5] Im Jahr 2017 wurde Richard Thaler (geb. 1945) mit demselben Preis für seine Beiträge zur Entwicklung verhaltensökonomischer Modelle geehrt. Er wies ebenfalls frühzeitig abweichendes Verhalten – z. B. bei intertemporalen Entscheidungen – nach.[6] Er „identifizierte“ den Besitztums-Effekt (*endowment effect*)[7] und beschäftigte sich mit dem Versunkene-Kosten-Effekt (*sunk-cost-effect*).[8] Der Besitztums-Effekt beschreibt ein Entscheidungsverhalten, bei dem der Nutzen eines Gutes davon beeinflusst wird, ob der Akteur ihn besitzt oder nicht. Wenn der Akteur das Gut besitzt, schätzt er dessen Nutzen als höher ein.

[5] Vgl. Abschn. 2.4.1 auf S. 337.

[6] Vgl. Abschn. 2.3.4 auf S. 333.

[7] Vgl. Thaler (1980); Kahneman/Knetsch/Thaler (1990).

[8] Vgl. Earl (2018) für einen Überblick über die Forschungsleistung von Thaler.

Als eine Konsequenz seiner empirischen Beobachtungen entwickelte er das sog. **Nudging**. Dieses Konzept entstand aufgrund von Beobachtungen THALERS von inkonsistenten intertemporalen Entscheidungen. Bei vielen Personen besteht durchaus der Wille zu rationalem Verhalten, jedoch liegt die Schwierigkeit darin, gute Vorsätze auch langfristig zu befolgen. Geeignete Anreize bzw. Stupser (sog. *nudges*) können diesen Personen das rationale Handeln erleichtern.

In diesem Kapitel können nicht sämtliche Erkenntnisse und Bereiche der Verhaltensökonomie abgedeckt werden. Dafür wird auf die umfangreiche Literatur verwiesen.[9] Im Folgenden werden ausgewählte Aspekte präsentiert, die einen besonderen Bezug zu den präsentierten präskriptiven Modellen haben. Um einige der Gründe für die Abweichungen vom Rationalitätspostulat wenigstens ansatzweise zu erklären, werden im folgenden Abschnitt die Eigenschaften bzw. Eigenarten von Personen etwas näher beleuchtet.

2.2 Aspekte und Wahrnehmung von Individualakteuren

2.2.1 Eigenschaften von Individuen

Das Verhalten von Personen hängt von den Aspekten der Person, von der Wahrnehmung der Situation sowie von der Motivation der Person ab. Im Folgenden wird lediglich auf die Aspekte der Person und auf die Wahrnehmung eingegangen. Für die Darstellung und Diskussion der Motivation wird auf die Literatur verwiesen.[10] Wesentliche Eigenschaften einer Person, die für die Problemlösung relevant sind, werden durch folgende Aspekte beschrieben:[11]

- Bedürfnisse/Motive,
- Werte,
- Einstellungen,
- Qualifikationen und
- Persönlichkeit.

[9] Vgl. Beck (2014); Ghisellini/Chang (2018).

[10] Vgl. Staehle (1999: 204–228); Wiswede (2012: 58–78).

[11] Neben diesen Aspekten beeinflussen weitere Faktoren (wie z. B. biologisch-genetische oder physiologische Faktoren) das reale Entscheidungsverhalten, werden hier jedoch nicht betrachtet.

Bedürfnisse und Motive

Grundlage menschlichen Handelns sind angeborene Instinkte und Triebe, die jedoch durch individuelle Erfahrung verändert werden. Bedürfnisse und Motive hingegen sind stärker kulturell beeinflusst und sozial gestaltet. Ausgangspunkt des immer an Zielen ausgerichteten menschlichen Verhaltens ist ein Bedürfnis. Ein **Bedürfnis** beschreibt ein Mangelempfinden, das angeboren oder durch Sozialisation erworben wurde. Als **Motiv** wird eine latent vorhandene Verhaltensbereitschaft bezeichnet, die noch nicht aktiviert ist. Im Gegensatz zu den Bedürfnissen werden Motive während der Sozialisation erworben und durch Motivation aktualisiert. Durch einen internen oder externen Anreiz wird ein Motiv aktiviert und bis zur Zielerreichung oder zur Erreichung eines als befriedigend eingeschätzten Anspruchsniveaus beibehalten. Die Aktivierung des Motivs löst ein Verhalten aus, dessen Ziel die Bedürfnisbefriedigung ist. Mit der Zielerreichung ist ein Erfolgserlebnis verbunden, das wiederum zu einem erhöhten künftigen Anspruchsniveau führt.[12]

Werte und Einstellungen

Werte und Einstellungen eines Individuums prägen die **Wahrnehmung** der Umwelt und die Verhaltensweisen in hohem Maße.[13] Werte als die Auffassung vom Gewünschten beschreiben die von einer Gesellschaft erwarteten bzw. hoch angesehenen Sicht- und Verhaltensweisen.[14] In Abhängigkeit von der Ausformung der einzelnen Werte sind Gesellschaften und deren Individuen charakteristisch geprägt. Als wesentlich erweist sich im Zusammenhang mit Investitionsprozessen die Einstellung zu Planungsaktivitäten und zum Risiko. Die Einstellung zu diesen Faktoren ist sehr stark durch die nationale Kultur geprägt und differiert selbst zwischen Nachbarstaaten erheblich.[15]

Werte erfüllen eine verhaltensbeeinflussende und -legitimierende Funktion bei der Wahl von Zielen und Mitteln. Werte prägen die Erwartungen der Mitarbeiter an das Unternehmen und die Ansprüche der Unternehmensleitung an Leistung und Verhalten der Mitarbeiter. Werte bestimmen, welche Denk- und Verhaltensweisen als wünschenswert gelten, und üben so einen starken Einfluss auf das Verhalten von Personen aus.

Im Gegensatz zu Werten sind **Einstellungen** konkret auf bestimmte Objekte, Personen und Situationen gerichtet. Einstellungen können aus Vorurteilen, Stereotypen und Überzeugungen bestehen und stellen ein relativ stabiles System von Gedanken, Gefühlen und Handlungsprädispositionen dar, durch das das menschliche Verhalten beeinflusst wird. Einstellungen werden durch

[12] Vgl. Staehle (1999: 167).

[13] Vgl. Winkler/Hofbauer (2010: 144–154).

[14] Vgl. Hirsch (2002: 10–13).

[15] Für einen Vergleich zwischen französischer und deutscher Kultur mit Blick auf Planungsaktivitäten vgl. Boucoiran (2010: 130–139).

Lernprozesse im Zuge langjähriger Erfahrung gebildet, woraus folgt, dass diese in Abhängigkeit vom Individuum veränderlich sind.[16]

Grundlage von Normen und Werten ist die Kultur. In diesem Zusammenhang sind zwei Kulturebenen relevant: die **nationale Kultur** und die **Unternehmenskultur**. Kultur von Nationen und Unternehmen existiert auf zwei Ebenen: auf der Concepta-Ebene und auf der Percepta-Ebene. Auf der Concepta-Ebene wird die Gesamtheit von Normen, Wertvorstellungen und Denkhaltungen eingeordnet, wohingegen auf der Percepta-Ebene die physischen, quasi-materialisierten Elemente einer Kultur (z. B. Gebäude, Kleidung, Frisuren, aber auch sprachliche Elemente) zu finden sind. Kultur:[17]

- ist den Trägern teilweise sowohl bewusst als auch unbewusst,
- gilt als überliefert, verweist also auf die Vergangenheit,
- ist jedoch nicht statisch, sondern dynamisch,
- drückt sich in einer Vielzahl von Verhaltensweisen und Artefakten aus.

Die nationale Kultur wird von frühester Kindheit an die Mitglieder tradiert und ermöglicht auf diese Weise ein möglichst reibungsfreies Miteinander, da den Mitgliedern eine Orientierung dessen vermittelt wird, was als erstrebenswertes Verhalten und was als nicht erstrebenswertes Verhalten erwartet wird. Auf diese Weise dient Kultur der Komplexitätsreduktion im Alltagsleben, indem bestimmte Handlungen, die komplexe Ursachen und Wirkungen besitzen, durch einen kulturellen Filter besser verstanden und verarbeitet werden. Diese Ausführungen verdeutlichen, dass sich die Kultur von Nationen schlecht bzw. nur unzureichend erfassen und beschreiben lässt. Der elaborierteste Ansatz stammt von Hofstede und beschreibt bzw. differenziert nationale Kulturen durch folgende Dimensionen:[18]

- **Machtdistanz:**[19] Diese Dimension beschreibt das Ausmaß, bis zu dem die weniger mächtigen Mitglieder von Institutionen und Organisationen eines Landes erwarten und akzeptieren, dass Macht ungleich verteilt ist. Für Entscheidungsprozesse wird in Organisationen mit großer Machtdistanz erwartet, dass nur der Vorgesetzte Anweisungen und Rückmeldungen gibt und dass die Initiative zur Problemlösung ebenfalls vom Vorgesetzten ausgeht. Eigeninitiative ohne Autorisierung ist nicht zu erwarten, da die Individuen im Unternehmen stark durch formelle Autoritäten beeinflusst sind und auf das richtige Problemlösungsverhalten der Vorgesetzten vertrauen.

[16] Vgl. Jost (2008: 49–51).

[17] Vgl. Kutschker/Schmid (2011: 674–676).

[18] Vgl. Hofstede (1994: 2–6); Duelfer/Joestingmeier (2011: 260); Haller/Naegele (2013: 29–38). Zu weiteren Ansätzen vgl. Boucoiran (2010: 44–64).

[19] Vgl. Ybema/Byun (2009); Elele/Fields (2010); Haller/Naegele/Berger (2019: 23–28).

- **Individualismus vs. Kollektivismus:**[20] In individualistischen Gesellschaften sind die Bindungen zwischen den Individuen eher locker. Es wird von jedem erwartet, dass er für sich selbst und seine unmittelbare Familie sorgt. Kollektivistische Gesellschaften hingegen zeichnen sich dadurch aus, dass der Mensch von Geburt an in starke, geschlossene Wir-Gruppen integriert ist, die das Individuum ein Leben lang schützen und dafür bedingungslose Loyalität erwarten. Die gesamte Gruppe steht für das Fehlverhalten Einzelner ein, weshalb Entscheidungen nur im Konsens getroffen werden. Vergütungen und Beförderungsentscheidungen werden in der Gruppe geregelt.
- **Maskulinität vs. Femininität:**[21] In maskulin orientierten Gesellschaften sind die Rollen der Geschlechter klar gegeneinander abgegrenzt. Männer haben bestimmt, hart und materiell orientiert zu sein. Frauen hingegen müssen bescheidener und sensibler sein und Wert auf Lebensqualität legen. Gesellschaften, in denen sich die Rollen der Geschlechter überschneiden, sind eher feminin geprägt, und sowohl Frauen als auch Männer sollen die femininen Werte leben. Diese Dimension ist auch für den Einsatz und die Akzeptanz von Anreizsystemen im Hinblick auf die Wahl des Beurteilungsmaßstabes und der Vergütungsart bestimmend.
- **Langfristige vs. kurzfristige Orientierung:**[22] Das Ausmaß der Berücksichtigung weit in der Zukunft liegender Ereignisse sowie langfristige Folgen aktueller Aktionen bestimmen die Orientierung. Langfristig orientierte Gesellschaften sind durch langfristig angelegte Zielsysteme, durch am Status orientierte Rangordnungen sowie durch ein ausgeprägtes Schamgefühl gekennzeichnet. Diese Dimension ist auch für den Einsatz und die Akzeptanz von Anreizsystemen im Hinblick auf die Wahl des Beurteilungszeitraumes bestimmend.
- **Unsicherheitsvermeidung:**[23] Das Ausmaß, bis zu dem die Mitglieder einer Nation bzw. Organisation Unsicherheit akzeptieren und nicht reduzieren kann ebenfalls als Beschreibungsmerkmal der Kultur verwendet werden. Charakteristika hoher Unsicherheitsvermeidung sind die Vermeidung unklarer Situationen, die Existenz und Befolgung vieler und klarer Regeln. Gleichzeitig wird der Unternehmensalltag durch einen sehr bürokratischen und formellen Ablauf geprägt und ist verbunden mit vielen Regeln und Grundsätzen. Die Mitglieder derartig geprägter Organisationen sind selten offen für neue, unerwartete Situationen und unterschiedliche Erwartungen, weshalb innovative Produkte und Ideen schlecht akzeptiert werden. Die Rolle der Planung und Vorbereitung ist groß, wobei eine

[20] Vgl. Earley/Laubach (2002: 266); Sugimoto (2021: 48–49).

[21] Vgl. Geiger et al. (2006); Beckmann/Menkhoff/Suto (2008: 635–636); Hendry (2019: 48–52).

[22] Vgl. Keys/Denton/Miller (1994: 387–388); Kobelko (2009: 441).

[23] Vgl. Aram/Walochik (1996); Frijns et al. (2013); Haller/Naegele/Berger (2019: 29–30).

offene und zeitnahe Kommunikation anzustreben ist. Aufgrund der vorherrschenden Risikoaversion sind sämtliche Eventualitäten und Risiken genau darzustellen.

Die nationale Kultur spielt eine bedeutende Rolle bei der Beantwortung der Frage nach der **Soll-Rationalität** eines Entscheidungsprozesses, womit untrennbare Auswirkungen auf die Struktur des Prozesses sowie auf die Zuweisung von Verantwortlichkeiten verbunden sind.[24] Damit wird deutlich, dass für die Feststellung und Beseitigung von Rationalitätsengpässen die kulturelle Prägung der Akteure eine wesentliche, weil **normative Rolle** spielt.[25] Dass diese Prägung im Zeitablauf **veränderlich** ist,[26] erschwert die Ableitung weiterführender genereller Aussagen bzw. Handlungsempfehlungen, die über die Feststellung von Unterschieden und Gemeinsamkeiten hinausgehen. Die Zusammenfassung von Auswirkungen der dargestellten Dimensionen nationaler Kultur auf ausgewählte Elemente des Führungsprozesses sind in der Tabelle 2.1 zu sehen.

Tab. 2.1: Relevanz der Kulturdimensionen für Führungsphasen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Hoffjan (2009: 52).

Führungsphase / Kulturdimension	Planung	Kontrolle	Information
Machtdistanz	Partizipation bei Budgeterstellung	Partizipation im Kontrollprozess	Häufigkeit und Pünktlichkeit
Individualismus vs. Kollektivismus	- Unabhängigkeitsstreben - Relevanz gemeinsamer Entscheidungen	- Kontrollform - Zuweisung von Verantwortung für Abweichungen	Unterschiede im Wissenstransfer
Maskulinität vs. Femininität	Bedeutung materieller Anreize	Eindeutigkeit der Kontrollergebnisse	Direktheit der Kommunikation
Unsicherheitsvermeidung	Detailgrad und Akzeptanz der Planung	Träger der Rückkopplung	Offenheit und Zeitnähe der Kommunikation
Langfristorientierung	Bedeutung langfristiger Betrachtungen	Zeitliche Merkmale der Rückkopplung	Pünktlichkeit der Berichterstattung

Geprägt von der nationalen Kultur entwickeln Unternehmen ihre jeweils eigene Unternehmenskultur. Diese erfüllt im Wesentlichen dieselben Funktionen wie die nationale Kultur, jedoch ist sie durch andere Beschreibungsmerkmale gekennzeichnet. Ein Unternehmen **verfügt über eine** Unternehmenskultur und **gleichzeitig ist es** gelebte Unternehmenskultur. Unternehmenskultur basiert auf den Grundpfeilern „Werte und Normen“ und vermittelt den Mitar-

[24] Vgl. Mead (1994: 465–472); Fontaine (2008); Thomas (2008: 93–116).
[25] Vgl. Müller/Münnich (2008: 531).
[26] Vgl. Kono (1984); Carr (2005).

beitern auf diese Weise **Orientierung** und **Handlungsmotivation**. Gleichzeitig dient die Unternehmenskultur der **Abgrenzung** von und zu anderen Unternehmen.[27] Nationale Kultur und Unternehmenskultur beeinflussen sich gegenseitig.

Als **Vorzüge** einer starken Unternehmenskultur sind die klare Handlungsorientierung und starke Motivationswirkung ebenso anzuführen wie die Stabilität und hohe Umsetzungsgeschwindigkeit von Projekten. Als **negative** Effekte sind festzuhalten, dass starke Unternehmenskulturen dazu tendieren können, Konformität zu erzwingen sowie interne Kritik und konträre Meinungen zu behindern, da die Motivation, den kulturellen Rahmen zu erhalten, größer ist als die Bereitschaft, internen Widerstand zuzulassen. Ebenso kann in starken Unternehmenskulturen eine Tendenz zur Abschottung entstehen, die externe Warnsignale und Kritiken unterdrückt bzw. nicht in die Entscheidungsprozesse des Unternehmens eindringen lässt.[28]

Die Betrachtung der normativen Grundlagen von Akteuren verdeutlicht, dass die Prägung der Akteure sowohl im individuellen als auch im kollektiven Problemlösungsprozess eine entscheidende Rolle spielt.

Qualifikation

Die Qualifikation eines Individuums beschreibt die Gesamtheit der Fähigkeiten, Fertigkeiten und des Wissens, die ihm zur Aufgabenerfüllung zur Verfügung stehen. Fähigkeiten beschreiben das gesamte Potenzial einer Person, ihre Umwelt zu beherrschen. Fertigkeiten sind die durch Übung entstandenen Potenzialbestandteile, die automatisiert gehandhabt werden. Diese können durch Trainingsmaßnahmen verbessert werden. Als Wissen werden die auf verarbeiteten Daten und Informationen beruhenden Kenntnisse verstanden, die zur Problemlösung eingesetzt werden können. Wissen stellt damit eine Kompetenz zur Lösung spezifischer Probleme sowie die kognitive Befähigung zum Handeln dar.

Qualifikationen können in funktionale und in extrafunktionale Qualifikationen unterteilt werden. Spezifisch technisch-fachliche, prozessgebundene Qualifikationen sind funktionale Qualifikationen. Qualifikationen, die sich auf prozessunabhängige Komponenten beziehen, wie z. B. Flexibilität, Verantwortungsbereitschaft, Arbeitsdisziplin, sind extrafunktionale Qualifikationen. Diese können nicht in derselben Weise gelehrt und erlernt werden wie funktionale Qualifikationen. Sowohl Über- als auch Unterqualifikation von Mitarbeitern führt im Rahmen der Aufgabenübertragung langfristig zu sinkender Leistungsbereitschaft. Für die Motivation von Personen ist es wichtig, dass diese im Rahmen der Aufgabenerfüllung Qualifikationen einsetzen können, die sie selbst hoch einschätzen.

[27] Vgl. Fichtner (2008: 24–26); Deitmar (2012: 24–25).

[28] Vgl. Steinmann/Schreyögg/Koch (2013: 670–671).

Persönlichkeit

Definition und Erfassung der Persönlichkeit ist in der Psychologie nicht eindeutig geklärt, so dass verschiedene Ansätze existieren. Persönlichkeit wird im Folgenden als Gesamtheit der Eigenschaften einer Person beschrieben, die ein beständiges Verhaltensmuster darstellen.[29] Muster von charakteristischen Gedanken, Gefühlen und Verhaltensweisen, die eine Person von einer anderen unterscheiden und die über Zeit und Situationen fortdauern, beschreiben die Persönlichkeit. Dazu zählen das Temperament als individuelle Eigenart der Reaktionen im Bereich des Gefühls-, Willens- und Trieblebens sowie der Charakter als Gesamtgefüge von konstanten Einstellungen, Gesinnungen und Handlungsweisen.[30] Aus den Merkmalen der Persönlichkeit resultieren Bedürfnisse, die als Ansatzpunkte einer Motivation dienen können. Aufgrund der Vielfalt, Unterschiedlichkeit und Komplexität des Menschen sind unterschiedliche Persönlichkeitstypologien entstanden, die durch Reduktion auf einige wenige Merkmale bzw. Verhaltensweisen versuchen, den Gesamtcharakter einer Persönlichkeit zu erfassen, so z. B. die Typologie von Hippokrates oder von Kant.[31] Diese Typologien unterliegen jedoch einer **enormen Beschränktheit**, weil Menschen in Abhängigkeit von der jeweiligen Situation unterschiedlich reagieren und verschiedenen Typen entsprechen.

2.2.2 Wahrnehmung

Neben den Aspekten der Person ist die Wahrnehmung von Situation, Problem und Personen durch reale Akteure für den Entscheidungsprozess von großer Bedeutung. Alle Personen handeln auf Basis dessen, was sie wahrnehmen, weshalb lediglich die **subjektiv wahrgenommene Situation** relevant für ihr Verhalten ist.[32] Diese Wahrnehmung betrifft die konkrete Situation, andere Personen, aber auch die eigene Person.[33] Die gedankliche Verarbeitung von Reizen aus der Umwelt wird als Wahrnehmung bezeichnet. Diese Verarbeitung kann bewusst und auch unbewusst erfolgen.[34]

Ein sehr frühes und allgemeingültiges Modell ist das Linsenmodell von Brunswik, auch als Brunswiksche Linse bezeichnet.[35] Da es für die verhal-

[29] Vgl. Rammsayer/Weber (2016: 12–14).

[30] Vgl. Weber/Rammsayer (2012: 12–15).

[31] Vgl. Rammsayer/Weber (2016: 17–20).

[32] Vgl. 1. Band, Abb. 1.5 auf S. 31 sowie Staehle (1999: 183); Winkler/Hofbauer (2010: 144–154); Nitzsch (2021: 38–43).

[33] Vgl. Linneweh/Hofmann (2009: 74–75).

[34] Vgl. Muck (2006: 553); Comelli/Rosenstiel/Nerdinger (2014: 54–56).

[35] Benannt nach dem Begründer Egon Brunswik (1903–1955). Vgl. Brunswik (1943); Brunswik (1952).

tenswissenschaftliche Entscheidungstheorie von grundlegender Bedeutung ist und den Ausgangspunkt weiterer Modelle bildet,[36] wird es hier kurz eingeführt. Ausgangspunkt des Modells ist die Umwelt des Akteurs, welche sich in einem objektiv wahren Zustand befindet, der durch **distale Variablen** definiert ist. Da diese Variablen jedoch nicht direkt wahrnehmbar sind, wird der Zustand durch den Akteur mittels wahrnehmbarer Variablen wahrgenommen. Diese Variablen werden als **proximale Variablen** bezeichnet.[37] Wichtig für die Relation von distalen und proximalen Variablen ist der Umstand, dass der Akteur **aus der Vergangenheit weiß**, **welche proximalen Variablen** er **wie zu verwenden** und zu interpretieren hat. Der Akteur hat also aus früherer Erfahrung gelernt, dass ein Auftreten bestimmter proximaler Variablen häufig oder i. d. R. kennzeichnend für einen bestimmten, objektiven Umweltzustand ist. Dieser Zusammenhang zwischen distalen und proximalen Variablen wird als **„ökologische Validität“** bezeichnet.[38] Diese Hinweisreize interpretiert der Akteur, wertet sie also aus. Auf Basis dieser Auswertung wird dann ein Urteil gefällt bzw. eine Entscheidung getroffen (vgl. Abbildung 2.2).

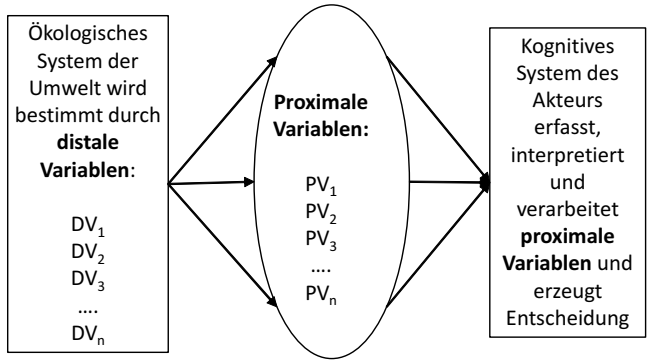


Abb. 2.2: Linsenmodell von Brunswik. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 129).

Zwischen der Entscheidung und der Umwelt besteht eine **funktionale Validität** dadurch, dass mit der Entscheidung diese Umwelt beeinflusst wird. Das Ergebnis der Beeinflussung lässt sich wieder an Hinweisreizen ablesen. Das

[36] Vgl. Abschn. 2.4.2 auf S. 344.

[37] Synonym werden auch die Begriffe „Hinweisreize“ oder „cues“ verwendet. Vgl. Brunswik (1943: 256–257); Brunswik (1952: 20); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 128–129).

[38] Vgl. Guski (1996: 38–40). Im Original werden diese Beziehungen als „environmental validities“ bezeichnet. Vgl. Brunswik (1943: 260).

Modell beinhaltet explizit Wahrscheinlichkeitselemente,[39] da für den Akteur nicht mit Sicherheit feststeht:

- ob die gewählten Hinweisreize die Umwelt korrekt abbilden und
- ob das Urteil auf Basis der Hinweisreize korrekt ist.

Ein weiteres Modell des Wahrnehmungsprozesses ist in Abbildung 2.3 zu sehen.

Abb. 2.3: Stufen des Wahrnehmungsprozesses. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Staehle (1999: 185).

In diesem Modell wird berücksichtigt, dass im Prozessverlauf bestimmte Reize herausgefiltert (Selektion), fehlende Reize hinzugefügt (Organisation) und anschließend interpretiert werden. In Abhängigkeit davon, wie ein Problem

[39] Deshalb wird es auch als probabilistisches Modell bzw. wird die Wahrnehmung als probabilistische Wahrnehmung bezeichnet.

und eine Situation wahrgenommen werden, erfolgt auch die Problembearbeitung. Wahrnehmung ist ein Prozess, in dem Signale bzw. Hinweisreize aus der Umwelt vollständig oder teilweise aufgenommen, interpretiert und verarbeitet werden.

Neben diesen Modellen ist noch eine ganze Reihe weiterer Modelle entwickelt worden. Diese werden hier nicht vorgestellt, stattdessen wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.[40] Für die folgenden Darstellungen ist die große Relevanz der menschlichen Wahrnehmung für das Entscheidungsverhalten entscheidend und mit den bisherigen Ausführungen zu diesem Themenbereich ausreichend begründet.

2.2.3 Begrenzte Rationalität und Inkrementalismus

Ausgehend von der Kritik des „homo oeconomicus“ entstand in einem frühen Erklärungsansatz die Theorie der **begrenzten Rationalität**. Diese beschreibt, dass reale Akteure zur Problemlösung folgende Handlungsschritte nutzen, die das Vorgehen vereinfachen:[41]

- Die Menge an Lösungsalternativen wird ohne Bewertung derselben bewusst reduziert.
- Entscheidungsprozesse werden nicht solange durchlaufen, bis eine optimale Lösung gefunden ist. Stattdessen werden diese bereits abgebrochen, wenn eine zufriedenstellende Lösung erreicht wurde.
- Anstelle der bisher dargestellten quantitativen Bewertungsalgorithmen werden sog. Heuristiken eingesetzt.[42]
- Das Verhalten wird routinisiert, was eine bewusste Problemlösungshandlung unterbindet und stattdessen zur Nutzung von Auswahlroutinen führt.

Die Akteure streben demzufolge nicht nach optimalen, sondern nach befriedigenden Lösungen. Die Einschätzung darüber, welche Lösung als befriedigend empfunden wird, ist abhängig vom subjektiven Anspruchsniveau.

Ein ähnlicher Ansatz entstand mit dem Modell des **Inkrementalismus**.[43] Die bisher als rational dargestellte Vorgehensweise entspricht dem synoptischen bzw. holistischen Verständnis der Planung. Ziel dieser Vorgehensweise ist es, die Komplexität eines Planungsproblems in ganzheitlicher, umfassender Weise zu handhaben und das zugrundeliegende Problem vollständig zu

[40] Vgl. Guski (1996: 13–57); Nitzsch (2021: 36).

[41] Vgl. Wolf (2020: 238–239).

[42] Zum Begriff der Heuristik vgl. Abschn. 2.3.3 auf S. 327.

[43] Vgl. Lindblom (1959).

lösen. Ausgehend von der Problemdefinition wird nach Mitteln und Wegen gesucht, um das Problem zu lösen. Das heißt, der Aufwand ordnet sich der Problemlösung unter. Das Komplexproblem wird in lösbare Teilprobleme zerlegt, deren Lösungen demzufolge zur Lösung des Gesamtproblems beitragen.

Diese Vorgehensweise stellt in der Realität jedoch eher die Ausnahme als die Regel dar. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass viele Akteure nicht die optimale Lösung suchen, sondern lediglich eine befriedigende Lösung. Weiterhin wurde festgestellt, dass ohne vordergründige Formulierung und Erklärung von Zielen ein besonders drängendes Teilproblem eines komplexen Gesamtproblems identifiziert und bewältigt wird. Eine exakte Trennung von Zielen und Mitteln wird nicht angestrebt.[44] Diese Vorgehensweise - auch als **„Methode des Durchwurstelns“** oder **„muddling through“** bezeichnet, wird wie folgt charakterisiert:[45]

- Der Entscheider sucht nur diejenigen Ziele und Mittel, die in der Nähe des Vertrauten liegen.
- Die Veränderung des Bestehenden erfolgt in kleinen Schritten.
- Es erfolgt keine endgültige Problemlösung, diese wird auch nicht angestrebt. Stattdessen werden immer wieder neue Korrekturen vorgenommen und auch bewusst in Kauf genommen.

Diese Vorgehensweise ist kennzeichnend für Problemlösungen in komplexen und dynamischen Umgebungen. Klassischerweise wird die Politik dazugerechnet. Dieses Verhalten ist symptomatisch für Gruppenentscheidungen, da die Bewertung von Alternativen und die letztendliche Entscheidung häufig in Verhandlungen durchzusetzen ist. Mit diesem Beschreibungsmodell wird deshalb die deskriptive kollektive Entscheidungstheorie berührt, welche in einem anderen Abschnitt dargestellt wird.[46]

Diese frühen Erklärungs- bzw. Beschreibungsansätze wurden durch umfangreiche Forschungsprogramme verfeinert und weiter untersucht. Im Folgenden werden einige Ergebnisse dieser Untersuchungen vorgestellt.

[44] Vgl. Picot/Lange (1979: 572).
[45] Vgl. Voigt (1992: 76–78).
[46] Vgl. Abschnitt 3.3.2 auf S. 431.

2.3 Abweichungen vom Modell der rationalen Wahl

2.3.1 Paradoxon, Antinomie und Dilemma

In der Betriebswirtschaftslehre, speziell in der Entscheidungstheorie, existiert eine Reihe von Phänomenen, die als Paradoxon bezeichnet werden.[47] So wurde bereits das Transitivitäts-Paradox[48] angeführt. Ein weiteres Beispiel ist das sog. Steuer-Paradox.[49] Im Zusammenhang mit kollektiven Entscheidungen können das ARROW-Paradox,[50] das CONDORCET-Paradox[51] sowie das No-show-Paradox[52] auftreten.

Wesentliches Element eines Paradoxons ist der Widerspruch. Ein logischer Widerspruch allein ist noch nicht aussagekräftig für die Existenz eines Paradoxons. In einigen Fällen kann ein Widerspruch bewusst herbeigeführt werden, um eine Aussage zu beweisen.[53] Um den Begriff des Paradoxes genauer abzugrenzen wird folgende Kausalkette zugrunde gelegt:

Realproblem $\rightarrowtail$ Problemformalisierung $\rightarrowtail$ Formalproblem bzw. logisches Problem $\rightarrowtail$ Prämissen/Axiome $\rightarrowtail$ Schlussverfahren $\rightarrowtail$ Schlussfolgerung

Diese Darstellung reiht sich in die allgemeine Ablaufstruktur der Problemlösung ein, die an anderer Stelle beschrieben ist.[54] Die Betriebswirtschaftslehre als Realwissenschaft dient dazu, Realprobleme zu lösen. Diese werden in ein Formalproblem überführt und es wird nach Lösungen gesucht. In Abhängigkeit davon, wo ein Widerspruch auftritt, werden folgende Fälle unterschieden:[55]

- **Paradoxon:**[56]
  - **Materiales Paradoxon:** Es resultiert eine einzige Schlussfolgerung auf Basis vollständiger und sich nicht widersprechender Annahmen und korrekter Argumentation. Die Schlussfolgerung ist jedoch unerwartet, d. h. sie widerspricht der Erwartung oder den grundlegenden Ansichten des Betrachters. Die *externe Konsistenz* des Ergebnisses mit

[47] Aus dem Griechischen: $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$, wider (para) das Erwarten (doxos). Vgl. Vollmer (1990: 49); Łukowski (2011: 2).

[48] Vgl. Bspl. 1.1 auf S. 41.

[49] Vgl. 1. Band, Bspl. 3.25 auf S. 336.

[50] Vgl. S. 417.

[51] Vgl. S. 410.

[52] Vgl. Bspl. 3.2 auf S. 397.

[53] Dies erfolgt im Rahmen des Widerspruchsbeweises (synonym: reductio ad absurdum). Vgl. Meschkowski (1969: 47) sowie Aufg. 4.1 auf S. 569.

[54] Vgl. 1. Band, Abb. 1.5 auf S. 31.

[55] Vgl. Hagenbüchle (2002: 30–35).

[56] Vgl. Meschkowski (1969: 50); Kannetzky (2000: 417).

der Außenwelt ist nicht gegeben. Als Beispiel dafür kann das Steuer-Paradoxon angeführt werden. Allgemein wird erwartet, dass der Kapitalwert bei einer Steuererhöhung sinkt. In speziellen Konstellationen jedoch tritt genau der gegenteilige Effekt ein, was kaum erwartet wird. Somit kann ein Paradoxon als logisch begründete Aussage bezeichnet werden, die keine Fehler in den Annahmen und/oder der Schlussfolgerung aufweist, deren Ergebnis jedoch überraschend ist. Ein Paradox ist demzufolge eine in sich schlüssige und richtige Aussage, die aus Betrachtersicht unrichtig *zu sein scheint*. Ob eine Aussage paradox ist, hängt demzufolge vom Betrachter ab.[57]

- **Semantisches Paradoxon:** In anderen Fällen entstehen Paradoxa aus selbstreferenziellen Aussagen, die sich selbst negieren. Durch den Selbstbezug und eine unerwartete Selbstwiderlegung entsteht der überraschende – der paradoxe – Effekt. Ein Beispiel dafür ist das sog. Kreter-Paradoxon.[58] Diese Form der Paradoxa sind zwar unterhaltsam, für die vorliegende Analyse von Investitionsentscheidungen aber nicht relevant.

- **Antinomie:**[59] Eine Antinomie liegt vor, wenn man eine Aussage zusammen mit ihrer Negation beweisen kann. Ein Beispiel dafür ist: *„Aussage A gilt genau dann, wenn Aussage A nicht gilt.“* Ein formales Beispiel lautet: $(M \in M) \Leftrightarrow \neg(M \in M)$. Die bekannteste Antinomie, die Russellsche Antinomie entstand bei dem Versuch, alle Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, zu einer Menge zusammenzufassen. Im Fall der Antinomie ist die *interne Konsistenz* des Ergebnisses nicht gegeben.[60] Eine Antinomie ist weder wahr noch falsch, weshalb sie sich nicht für den Widerspruchsbeweis eignet. Wie auch die semantischen Paradoxa sind Antinomien für die Betriebswirtschaftslehre nicht relevant und werden nicht weiter betrachtet.
- **Dilemma:**[61] Ein Realproblem kann so in zwei Formalprobleme überführt werden, dass diese – jeweils für sich betrachtet – auf Basis vollständiger und sich nicht widersprechender Annahmen sowie korrekter Argumentation zu mehreren Schlussfolgerungen führen, die sich jedoch widersprechen. Der Grund für den Widerspruch liegt in den unterschiedlichen Prämissen

[57] Andere Autoren bezeichnen Abweichungen menschlichen Verhaltens von den theoretischen Modellen als (Verhaltens-)Anomalien. Vgl. Frey/Eichenberger (1989). Beispielsweise wird der Begriff der *Zeitanomalie* für abweichendes Verhalten bei intertemporalen Entscheidungen verwendet. Vgl. Abschn. 2.3.4 auf S. 333.

[58] *„Ein Kreter sagt: „Alle Kreter lügen.“.“* Diese Aussage lässt sich als widerspruchsfreie, empirische Existenzaussage darstellen. Vgl. Vollmer (1990: 51); Brendel (1992: 4); Vollmer (2002: 163).

[59] Vgl. Meschkowski (1969: 45); Stegmüller (1979: 379); Vollmer (1990: 52); Kesselring (2013: 29–30).

[60] Eine weitere bekannte Antinomie lautet:*„Diser Sats enthält drei Fehler“*. Vgl. Vollmer (1990: 51); Brendel (1992: 4).

[61] Vgl. Kannetzky (2000: 245–251 sowie 425–426); Holler/Illing/Napel (2019: 3–12).

und Annahmen, die aus dem Realproblem abgeleitet bzw. in dieses hineininterpretiert werden. Die bekannteste dieser Situationen ist das sog. **Gefangenen-Dilemma**. Für jede der – sich widersprechenden – Handlungsalternativen der Gefangenen lassen sich rationale Begründungen liefern. Der Widerspruch liegt hier in den Annahmen begründet, von denen die Gefangenen ausgehen. Aus dieser Grundsituation können weitere, ähnlich gelagerte Dilemmata der Entscheidungstheorie abgeleitet werden, wie z. B. das Freiwilligen-Dilemma oder der Kampf der Geschlechter. Im Bereich der Investitionsrechnung ist das **Dilemma der Lenkpreistheorie**[62] bekannt.

Der Unterschied zwischen Dilemma und Antinomie ist folgender: Bei der Antinomie wird aus dem Ursprungsproblem (welches meist rein logischer Natur ist) ein einziges konsistentes Axiomensystem abgeleitet, das auf logisch korrektem Weg zu zwei beweisbaren, sich jedoch widersprechenden Aussagen führt. Beim Dilemma hingegen werden aus dem Ausgangsproblem zwei abweichende Axiomen- bzw. Prämissensysteme abgeleitet, welche mittels logisch korrekter Argumentation zu zwei beweisbaren, sich jedoch widersprechenden Aussagen führen.

Im englischsprachigen Bereich weicht die Verwendung der Begriffe Paradoxon, Antinomie und Dilemma von der soeben beschriebenen Zuordnung ab. Oftmals wird der Begriff des Paradoxes für Paradoxa und Antinomien im o. g. Sinn verwendet und auch der Dilemma-Begriff wird teilweise darunter subsumiert.[63]

Da Paradoxien und Antinomien auf Widersprüche deuten bzw. diese offenlegen, sind sie ambivalent. Einerseits ist es für eine Theorie ärgerlich, dass diese im Gegensatz zur Außenwelt steht bzw. in sich nicht stimmig konstruiert ist. Andererseits ist es erst mit der Aufdeckung dieser Fehler möglich, die bestehende theoretische Basis zu verbessern. Viele Fortschritte in der Wissenschaft sind solchen Entdeckungen zu verdanken, so führte z. B. die Antinomie von Russell zu einer umfassenden Neukonzeption der Mengenlehre. Auch in der Entscheidungstheorie dienen Paradoxa der Aufdeckung von Widersprüchen und der Konzeption alternativer theoretischer Erklärungsansätze.[64] Neben dieser Falsifikationfunktion im erkenntnistheoretischen Kontext lässt sich den Paradoxa aber auch eine didaktische Funktion zuschreiben.[65]

Dilemmata hingegen weisen auf unscharf formulierte Probleme hin bzw. verdeutlichen den Umstand, dass in ein und derselben Situation verschiedene Rationalitätsmaßstäbe angelegt werden können. Im Gefangenen-Dilemma stehen die individuelle Rationalität (Alternative: Geständnis ablegen) und die

[62] Vgl. Hering (2017: 144–150).
[63] Vgl. Łukowski (2011: 1–2); Mongin (2019: 428).
[64] Vgl. Frey/Eichenberger (1989).
[65] Vgl. Kannetzky (2000: 514–518).

kollektive Rationalität (Alternative: Schweigen) zur Auswahl und schließen sich gegenseitig aus. Möglicherweise liegen diesem Sachverhalt ungeeignete Definitionen oder Axiome zugrunde, die eine vollkommen andere Betrachtungsweise erfordern. Solange diese jedoch nicht gefunden und etabliert sind, bleibt die widersprüchliche Situation bestehen. Deshalb bestehen ebenfalls gute Gründe, die Dilemmata zu didaktischen Zwecken heranzuziehen.

Deshalb werden in den nächsten zwei Abschnitten bekannte Phänomene vorgestellt, die vornehmlich im Zusammenhang mit der **Erwartungsnutzentheorie** erwähnt und diskutiert werden. Es wird nur eine Auswahl von Paradoxa vorgestellt. Andere bekannte Paradoxa im Zusammenhang mit der Erwartungsnutzentheorie sind das Ellsberg-Paradox und das Rabin-Paradox. Für deren Diskussion wird auf die Literatur verwiesen.[66] Im Anschluss daran werden Abweichungen vom rationalen Modell bei **intertemporalen** Entscheidungen vorgestellt.

Diese Beispiele zeigen, in welchen Bereichen die Widersprüche liegen und welche Schlussfolgerungen möglich sind bzw. gezogen wurden. Es wird deutlich, dass die Aufdeckung von Paradoxien fast unvermeidlich, aber für die Weiterentwicklung des Fachgebietes auch hilfreich ist.

2.3.2 Ausgewählte Phänomene bei Entscheidungen unter Unsicherheit

2.3.2.1 St.-Petersburg-Paradox

Ein sehr bekanntes (wenn nicht sogar das bekannteste) Paradox in der Entscheidungstheorie ist das St.-Petersburg-Paradox. Das zugrundeliegende Problem wurde erstmalig 1713 von Nicolas Bernoulli formuliert und diskutiert.[67] Beispiel 2.1 schildert das Gedankenexperiment.[68]

[66] Vgl. zum Ellsberg-Paradox: Ellsberg (1961); Krelle (1968: 182–184); Klein/Scholl (2011: 440–441). Vgl. zum Rabin-Paradox: Rabin (2000); Bleichrodt et al. (2019).

[67] Vgl. Dutka (1988: 17); Fishburn (1988: 268–269); Bernoulli (1999); Seidl (2013: 247–248).

[68] Vgl. Jensen (1967a: 165–168); Schneider (1981: 238–240); Dutka (1988); Seidl (2013); Haller/Barth (2014: 239).

Beispiel 2.1:

Folgende Argumentationskette wird verwendet:[69]

(I) *Es wird die Existenz einer Person angenommen, die risiko-neutral ist und deren Nutzenfunktion linear im Geld ist.*[70]

(II) *Dieser Person wird gegen Bezahlung des Betrages I_0 folgendes Spiel angeboten: Eine Münze wird so lange geworfen, bis „Zahl" fällt. Dann ist das Spiel beendet. Die Höhe des Gewinns beträgt $G_v = 2^{v-1}$€, wenn im v-ten Versuch „Zahl" fällt.*[71]

(III) *Die Wahrscheinlichkeit, dass die vom Spieler avisierte Situation eintritt, resultiert mit: $w_v = \frac{1}{2^v}$. Aus (I) und (II) folgt der Nutzen der Lotterie $u(L)$ für den risiko-neutralen Spieler mit:*

$$u(L) = \mu(L) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \cdots = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} \cdot 2^{v-1} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

(IV) *Der Erwartungswert entsprechend (III) ist unendlich hoch, was bei dem in (I) beschriebenen Akteur zur Folge haben müsste, dass er bereit wäre, als Teilnahmebetrag I_0 einen beliebig hohen Betrag auszugeben.*

(V) *Beobachtungen bzw. Befragungen zeigen, dass sich in der Realität jedoch keine Person so verhält, wie in (IV) beschrieben.*

(VI) *Das bedeutet einen Widerspruch zwischen (I) und (V), also zwischen der verwendeten Annahme und der empirischen Beobachtung.*

Das im Beispiel 2.1 geschilderte Experiment wird als St.-Petersburg-Spiel bzw. St.-Petersburg-Lotterie bezeichnet. Der dabei festgestellte Widerspruch wird als **St.-Petersburg-Paradox** bezeichnet. Es erscheint wichtig, darauf hinzuweisen, dass das Paradox in der Abweichung des mathematisch ermittelten vom tatsächlichen Verhalten besteht.

Es wurden äußerst viele Wege vorgeschlagen, um das Problem "zu beheben".[72] Einige davon werden im weiteren Verlauf erläutert (vgl. Tab. 2.3), für andere Lösungsideen wird auf die Literatur verwiesen.[73]

[69] Vgl. Shapley (1977: 439–440); Schneider (1981: 238–240).

[70] Vgl. Abschn. 4.2.2 auf S. 468 für eine Diskussion linearer Nutzenfunktionen.

[71] Hinweis: In der Literatur wird neben der hier präsentierten Version oftmals die Gewinnsumme mit $G_v = 2^v$€ ermittelt. Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 247); Klein/Scholl (2011: 424–425); Kruschwitz/Lorenz (2019: 268–269). Sämtliche folgenden formalen Darstellungen basieren auf der Ermittlungsvorschrift $G_v = 2^{v-1}$€.

[72] Vgl. Samuelson (1977: 36–53) für eine ausführliche Darstellung der historischen Entwicklungen sowie Dutka (1988: 31–37); Seidl (2013: 249–254); Yukalov (2021: 3–4).

[73] Vgl. Guo (2019).

Tab. 2.3: Ausgewählte Lösungen, Argumente und Ideen im Zusammenhang mit dem St.-Petersburg-Paradoxon. Quelle: Eigene Darstellung.

Lösung, Argument bzw. Idee	**Spezifikation**	**Beispielhafte Vertreter**
Lösung durch Unterscheidung zwischen Menge und Nutzen des Geldes sowie durch Berücksichtigung eines abnehmenden Grenznutzens		- Cramer (1728) - Bernoulli (1738)
Lösung durch Unterscheidung zwischen Menge und Nutzen des Geldes sowie durch explizite Beschränkung des Nutzens	Beschränkung der Nutzenfunktion aufgrund subjektiver Präferenzen	- Allgemeine Idee: Menger (1934) - Axiomatisierung: von Neumann/Morgenstern (1944)
	Beschränkung des Nutzens aufgrund begrenzter Lebensdauer	- Brito (1975) - Cowen/High (1988)
Erklärung durch Ignoranz von minimalen Wahrscheinlichkeiten		- D'Alembert (1773) - Buffon (1777) - Menger (1934)
Zweifel am logischen Zustandekommen der Entscheidungssituation	Aus Sicht des Spielers	- Keynes (1921) - Shapley (1977)
	Aus Sicht des Gegenspielers/der Spielbank	- Samuelson (1960)
Zweifel am praktischen Zustandekommen der Entscheidungssituation	Aufgrund von Zeitbeschränkungen	- Buffon (1777)
	Aufgrund begrenzter Ressourcen der Spielbank	- Fontaine (1764) - Buffon (1777)
Beseitigung durch Einführung eines endlichen Spiels		- Condorcet (1781) - Feller (1945) - Steinhaus (1949) - Vivian (2003); (2013)
Lösung durch Verwendung des Medians anstelle des Erwartungswertes		- Hayden/Platt (2009) - Okabe/Nii/Yoshimura (2019)
Experimentelle Prüfung		- Buffon (1777) - Silva/Matsushita (2016)
Lösung durch Maximierung der Wahrscheinlichkeit anstelle des Nutzens		- Yukalov (2021)

Diese Ideen werden kurz vorgestellt:

- **Unterscheidung von Menge und Nutzen des Geldes sowie Einführung des abnehmenden Grenznutzens:** Ein sehr früher Lösungsansatz wurde 1728 von Gabriel Cramer vorgestellt. Er erkannte zwei wesentliche Pfeiler einer Lösung: Einerseits muss zwischen Menge und

Nutzen des Geldes unterschieden werden.[74] Andererseits muss ein Anstieg des Nutzens ins Unendliche vermieden werden. Demzufolge konstruierte er eine Funktion, bei welcher der subjektive Nutzen mit steigenden Gewinnbeträgen abnimmt. Dies wird heutzutage als abnehmender Grenznutzen bezeichnet. Konkret nutzte er die Quadratwurzel des Ergebnisses, um den Nutzen zu ermitteln.[75]

Nicolas Bernoullis Cousin Daniel Bernoulli schlug – offensichtlich in Unkenntnis der Cramerschen Idee – 1738 vor, dass nicht die Ergebnisse selbst mit Wahrscheinlichkeiten gewichtet werden, sondern stattdessen eine sog. **moralische** anstelle der **mathematischen Erwartung** verwendet werden sollte.[76] Um diese Relation mathematisch zu erfassen, verwendete er den Logarithmus naturalis des Ergebnisses. Die zwei Komponenten der Grundidee (Unterscheidung zwischen Geldmenge und -nutzen sowie Vermeidung unendlicher Nutzenwerte) sind identisch zur Cramerschen Lösung.[77] Lediglich die mathematische Abbildung variiert. Jedoch wurde Bernoullis Arbeit viel bekannter, da sie mathematisch umfassender ausgerichtet war.

- **Begrenzung der Nutzenfunktion aufgrund subjektiver Präferenzen:** Beide Ideen wurden 1934 durch Karl Menger aufgegriffen. Er wies darauf hin, dass die Lösung des Problems nur in der Beschränkung der Bewertungsfunktion des Spielers liegen könne.[78] Die Begründung liefert er mit der subjektiv unterschiedlichen Bewertung von identischen Ergebnissen und der Annahme, dass der Nutzen von keinem Ergebnis unendlich hoch sein dürfe.[79] Wenn die Beschränkung nicht erfolgt, lässt sich für jede Nutzenfunktion eine Variante des St.-Petersburg-Paradoxes konstruieren.[80] Das wird auch als **Super-St.-Petersburg-Paradox** bezeichnet.[81] Mit der Beschränkung der Nutzenfunktion liefert Menger eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösung, ohne dies axiomatisch

[74] In einem Brief begründet er den Unterschied zwischen mathematischer Berechnung und der gewöhnlichen Schätzung folgendermaßen: *„Ich glaube, er beruht darauf, daß (in der Theorie) die Mathematiker das Geld lediglich nach seiner Menge, (in der Praxis) vernünftige Leute hingegen nach dem Nutzen schätzen, den sie daraus ziehen.“* Cramer zit. nach Menger (1934: 464); Bernoulli (1954: 33). Hervorh. im Original.

[75] Vgl. Lengwiler (2009: 540); Seidl (2013: 249–250).

[76] Vgl. Bernoulli (1954: 24).

[77] Vgl. Székely/Richards (2004: 225–226); Lengwiler (2009: 540); Seidl (2013: 249–250).

[78] Vgl. Arrow (1951: 421–425); Arrow (1974); Aumann (1977).

[79] Vgl. Menger (1934: 469–471).

[80] *„Für jede – durch eine unbeschränkte Funktion f(w) erfolgende – Bewertung von Vermögenszuwächsen gibt es ein dem Petersburger Spiel verwandtes Glücksspiel, bei welchem, die subjektive Hoffnung des Spielnehmers unter Zugrundelegung der subjektiven Bewertungsfunktion f(w) unendlich ist.“* Menger (1934: 468).

[81] Vgl. Samuelson (1977: 32).

zu begründen.[82] Diese Arbeit wurde erst 1967 durch die englische Übersetzung einem breiteren Publikum zugänglich.[83]

- **Axiomatisierung der Idee von Menger:** Oskar Morgenstern jedoch hatte als Schriftleiter der Zeitschrift den Aufsatz von Menger zur Publikation angenommen und demzufolge schon seit 1934 Kenntnis von dessen Lösungsidee.[84] Zusammen mit John von Neumann gelang die axiomatische Begründung,[85] welche sich international durchsetzte und als Erwartungsnutzentheorie bezeichnet wird. Im Rückblick betrachtet war der Lösungsansatz von Menger zur Begrenzung der Nutzenfunktion der Durchbruch zur Lösung des Paradoxes.[86]

  Die Beschränkung der Nutzenfunktion wird durch das Axiom der Stetigkeit[87] gesichert. Darauf weisen auch von Neumann und Morgenstern bei der Diskussion der Stetigkeit hin.[88] Die erstmalig von Menger entwickelte Argumentation der Beschränkung[89] wird somit axiomatisch manifestiert. Die Beschränkung der Nutzenfunktion ist mittlerweile eine gängige Restriktion bzw. Forderung.[90]

  Die Lösung durch von Neumann und Morgenstern gehört zu den bekanntesten, fundiertesten, aber trotzdem – oder vielleicht gerade deshalb – zu den am meisten diskutierten Lösungen und wurde im vorliegenden Werk bereits umfassend vorgestellt.[91] Ohne Begründung ist die Begrenzung der Nutzenfunktion keine wirkliche Erklärung, sondern eher tautologischer Natur. Sie besagt lediglich, dass ein Individuum nicht mehr für die

[82] Vgl. Seidl (2013: 251).

[83] Vgl. Menger (1967).

[84] Vgl. Seidl (2013: 252).

[85] *„We did not publish the proof of the existence of this number on the basis of our axioms in the first edition of our book, which appeared in 1944 (though we had that proof, of course). […] Regarding risk, Karl Menger's important paper of 1934 on the St. Petersburg Paradox [7, (1934) 1967] played a great role. […] But the construction of axioms for our expected utility came quite naturally. I recall vividly how Johnny rose from our table when we had set down the axioms and called out in astonishment: "Ja hat denn das niemand gesehen?"* Morgenstern (1976: 809). Hervorh. im Original.

[86] Vgl. Cohen/High (1988: 219–220); Seidl (2013: 251). Samuelson bezeichnete die Idee als Quantensprung: *„After 1738, nothing earthshaking was added to the findings of Daniel Bernoulli and his contemporaries until the quantum jump in analysis provided by Karl Menger […]."* Samuelson (1977: 32).

[87] Vgl. Axiom 1.5.4 auf S. 115. Vgl. Blackwell/Girshick (1954: 105–110); Jensen (1967a: 180); Jensen (1967b: 241); Fishburn (1988: 269); Schmidt (2004: 766).

[88] *„It is probably desirable to require this property under all conditions, since its abandonment would be tantamount to introducing infinite utility differences."* Neumann/Morgenstern (1953: 630).

[89] Vgl. Menger (1934: 469–471).

[90] Vgl. Schneider (1980: 121–122); Machina (1982: 282–283); Dutka (1988: 30); Fischer (2004: 36); Lengwiler (2009: 542–544); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 251); Schneider (2011: 190); Seidl (2013: 250).

[91] Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

Lotterie zahlt, als es ihm wert ist.[92] Der Verdienst von Von Neumann und Morgenstern liegt in der Axiomatisierung dieser Eigenschaft.

Schon Bernoulli und Menger analysierten die möglichen Gründe und wiesen – als eine, aber nicht die einzige mögliche Erklärung – auf die Abhängigkeit des Nutzens vom Vermögen des Spielers hin.[93] Je größer das Vermögen, desto geringer der subjektive Nutzen. Interessanterweise bzw. konsequenterweise wird im Rahmen der kooperativen Spieltheorie das Gegenteil gefordert, nämlich die Unabhängigkeit der individuellen Nutzenfunktionen vom Vermögen.[94] Das ist mit Blick auf die unterschiedliche Entscheidungssituation (individuelle Entscheidung unter Risiko vs. kollektive Entscheidung bei Sicherheit) nur verständlich und demonstriert anschaulich die Unterschiede in den Konzepten.

- **Begrenzung der Nutzenfunktion aufgrund einer endlichen Lebensdauer:** Eine Beschränkung des Nutzens kann auch mit der Lebenszeit des Menschen begründet werden. Der Nutzen eines Gewinns in dem St.-Petersburg-Spiel für einen Menschen mit begrenzter Lebensdauer ist zwangsläufig ebenfalls begrenzt.[95] Eine normal sterbliche Person kann in ihrem Leben nur endlich viele Güter konsumieren. Der Nutzen eines Gewinns – und sei er auch unendlich groß – wird dadurch begrenzt, selbst wenn die individuelle Nutzenfunktion an sich unbegrenzt wäre.
- **Ignoranz unwahrscheinlicher Ereignisse:** Eine weitere Lösungsidee besteht in der Erklärung, dass reale Entscheidungsträger sehr unwahrscheinliche Ereignisse komplett ignorieren. D. h. anstelle der mathematisch korrekten Berücksichtigung sehr kleiner Werte werden diese vollständig ignoriert. Darauf wiesen schon D'Alembert 1773 und Buffon 1777 hin.[96] Buffon entwickelte diese Idee bei der Betrachtung der Sterbewahrscheinlichkeiten. Anhand von Sterbetafeln ermittelte er die Wahrscheinlichkeit für einen 56-jährigen Mann, dass dieser innerhalb der nächsten 24 Stunden stürbe, mit einem Wert von 1 : 10189. Seinen Beobachtungen zufolge spielt die Furcht vor einem so schnellen Tod für Menschen in diesem Alter jedoch überhaupt keine Rolle. Seine Schlussfolgerung lautete deshalb, dass Wahrscheinlichkeiten kleiner oder gleich 1 : 10000 ignoriert werden.[97] Auch Menger zog die Ignoranz von sehr unwahrscheinlichen

[92] Vgl. Cowen/High (1988: 220).

[93] Vgl. Bernoulli (1954: 30–32); Menger (1934: 473–478); Cornides (1983: 7).

[94] Vgl. Axiom 4.2.1 auf S. 471.

[95] Vgl. Brito (1975: 124–124); Cowen/High (1988: 220–221).

[96] Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788); Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783).

[97] Vgl. Keynes (1921: 322); Samuelson (1977: 40); Dutka (1988: 33); Seidl (2013: 252); Haller/Barth (2014: 254).

Ereignissen als Erklärung bzw. Lösung des Paradoxes in Betracht.[98] Interessanterweise spielt die unterschiedliche Gewichtung von geringen Wahrscheinlichkeiten bei einer anderen Theorie – der sog. Prospect Theory – eine wichtige Rolle. Es konnte nämlich gezeigt werden, dass reale Akteure geringe Wahrscheinlichkeiten höher gewichten, als mittlere und hohe Wahrscheinlichkeiten.[99] Die Idee der unterschiedlichen Gewichtung geringer Wahrscheinlichkeiten für das reale Entscheidungsverhalten ist demzufolge durchaus nachvollziehbar.

- **Zweifel am logischen Zustandekommen:** Einige Autoren sehen einen logischen Widerspruch bei der Konstruktion des Paradoxes. Sie bezweifeln das Zustandekommen des St.-Petersburg-Spiels und somit die Existenz des darauf beruhenden Paradoxes aufgrund logischer Gründe. Dieses Argument wird mit Blick auf den Spieler, aber auch auf den Gegenspieler vorgebracht. Mit Blick auf den Spieler stellt sich folgende Frage:[100] Welches rationale Individuum glaubt, dass der Gegenspieler/die Spielbank in der Lage ist den Spielgewinn zu liefern, wenn der Erwartungswert des Spieles unendlich hoch ist? Dazu müsste die vorgestellte Kausalkette[101] durch den Schritt (II$\frac{1}{2}$) wie folgt ergänzt werden:[102]

  (I) Es wird die Existenz einer Person angenommen, die risikoneutral ist und deren Nutzenfunktion linear im Geld ist.

  (II) Dieser Person wird gegen Bezahlung des Teilnahmebetrages I_0 das St.-Petersburg-Spiel angeboten.

  (II$\frac{1}{2}$) Die Person weiß um den unendlichen Erwartungswert des Spieles und geht trotzdem davon aus, dass die Gegenseite sich an das Versprechen hält und jede beliebige Gewinnsumme zahlen will und kann.

  Der logische Widerspruch liegt demzufolge in der gleichzeitigen Annahme, einerseits einen Spieler zu betrachten der zwar einen Erwartungswert ermitteln und rational handeln kann, der aber andererseits nicht zu der Schlussfolgerung fähig ist, dass die Wette aus Sicht der Spielbank gar nicht ernst gemeint sein kann. Wenn dem Spieler Rationalität zugebilligt wird, muss ihm damit gleichzeitig die Fähigkeit zugesprochen werden, die

[98] Vgl. Menger (1934: 471–472). *„Es ist schließlich natürlich klar, daß durch das Nullsetzen kleiner Wahrscheinlichkeiten [...] ein endlicher Wert für die Hoffnung entsteht, womit das, was vielen Forschern beim Petersburger Spiele paradox erschien, behoben ist.“* Menger (1934: 472).

[99] Vgl. Abschn. 2.4.1 auf S. 337.

[100] Vgl. Keynes (1921: 316–320); Shapley (1977).

[101] Vgl. Bsp. 2.1 auf S. 305.

[102] Vgl. Shapley (1977: 440).

offensichtliche Unehrlichkeit bzw. Unmöglichkeit des Angebotes zu erkennen.[103]

Auf eine ähnliche Argumentationslücke, jedoch aus Sicht der Gegenpartei, hat SAMUELSON hingewiesen.[104] Ein unendlich hoher Gewinn für den Spieler bedeutet einen unendlich hohen Verlust für die Gegenpartei. Demzufolge wird kein rationaler Akteur eine solche Wette anbieten, weshalb der Punkt (II) in der o. g. Kausalkette logisch unsinnig ist.

- **Zweifel am praktischen Zustandekommen:** Aus praktischer Sicht wurde/wird eingewendet, dass:
  - jeder Münzwurf eine bestimmte Zeit benötigt, weshalb die erforderliche Zeit für eine unendliche Anzahl an Versuchen nicht zur Verfügung steht[105] und/oder
  - keine Spielbank eine unendliche Gewinnsumme vorhalten kann, worauf schon FONTAINE 1764 hinwies.[106]

Als "Lösung" bzw. Ausweg kann mit einem bekannten und begrenzten Kapital einer Spielbank ein **endliches St.-Petersburg-Spiel** konstruiert werden. Diese Idee entwickelte CONDORCET bereits 1781.[107] In dem so umgestalteten Spiel wird der Einsatz eines Spielers davon abhängen, wie oft er die Münze werfen darf. Da die Anzahl der Versuche endlich sein wird, muss auch der Erwartungswert der angebotenen Versuchsreihen endlich sein. Nur für den Fall, dass ein Spieler unendlich viele Versuche unternehmen möchte, resultiert ein unendlicher Erwartungswert, was einen unendlich hohen Spieleinsatz rechtfertigen würde. Auf diese Weise wird das Paradoxon vermieden, da ein endlicher Erwartungswert besteht. FELLER zeigte frühzeitig, dass ein endlicher fairer Preis für ein endliches St.-Petersburg-Spiel existiert, der wie folgt ermittelt wird:[108]

$$\textit{Fairer Gesamtbetrag } [€] = \frac{W}{2} \cdot log_2\,(W) \tag{1}$$

$$\textit{Fairer Betrag pro Spiel } [€] = \frac{log_2\,(W)}{2} \tag{2}$$

[103] *„They would only strengthen our present thesis, to wit: (1) there is no logical or mathematical absurdity in risk neutrality for money or income, and (2) the empirical "absurdity" that seems to arise depends on an additional, commonly overlooked assumption about the subject's credulity – an assumption that is itself empirically absurd."* Shapley (1977: 442). Hervorh. im Original.

[104] Vgl. Samuelson (1960: 31–32).

[105] Darauf wies auch BUFFON hin. Vgl. Samuelson (1977: 40); Haller/Barth (2014: 253).

[106] ALEXIS FONTANE DES BERTINS (1704–1771). BUFFON berechnete, dass bei $v = 29$ Münzwürfen das Vermögen des französischen Königreiches nicht mehr zur Begleichung der Spielschuld ausreichen würde. Vgl. Dutka (1988: 31); Haller/Barth (2014: 250–251).

[107] Vgl. Samuelson (1977: 44–45); Haller/Barth (2014: 254–255). CONDORCET beschäftigte sich auch mit Regeln für gerechte Abstimmungen. Vgl. Abschn. 3.2 auf S. 393.

[108] Vgl. Feller (1945: 303); Feller (1968: 252); Dutka (1988: 34).

In den Gleichungen beschreibt W die Gesamtanzahl an durchgeführten Würfen. Alternativ kann die Anzahl an Spielen auch mit $W = 2^N$ formuliert werden, so dass folgt:[109]

$$\textit{Fairer Gesamtbetrag } [€] = 2^N \cdot \frac{N}{2} \tag{3}$$

$$\textit{Fairer Betrag pro Spiel } [€] = \frac{N}{2} \tag{4}$$

Die Verwendung dieser Gleichungen wird an geeigneter Stelle erläutert.[110]

Wichtig ist bei dieser Idee, dass nun von einer endlichen Serie von St.-Petersburg-Spielen ausgegangen wird. Bei einer großen Anzahl an Wiederholungen konvergieren die Werte gegen einen Grenzwert – das Gesetz der großen Zahl. Wenn dieser Wert bestimmt werden kann, ist das Paradoxon gelöst. Steinhaus nahm die Idee auf, konstruierte eine andere Reihe an Gewinnen und leitete darauf basierend einen Grenzwert ab.[111]

Grundlage der Arbeiten von Feller und Steinhaus ist die Interpretation, dass kein Paradox besteht, wenn die Spiele oft genug wiederholt werden können.[112] Wird lediglich ein Spiel betrachtet, ist der Erwartungswert in einem St.-Petersburg-Spiel nicht unendlich, sondern gar nicht definiert. Deshalb besteht kein Paradox, da der Erwartungswert als Orientierungskriterium – an dem sich die Akteure orientieren sollten – falsch gewählt ist.[113]

Die Idee der Begrenzung des Spieles auf eine endliche Anzahl an Versuchen ist in jüngerer Zeit aufgegriffen worden.[114] Das Paradox wird dadurch jedoch nicht gelöst, sondern durch Reformulierung in ein vollkommen anderes Problem transformiert, das dadurch handhabbar wird.[115]

- **Verwendung des Medians:** Neuere Ansätze zur Lösung des Paradoxes bestehen darin, anstelle des Erwartungswertes den Median zu verwenden. Auf Basis von empirischen Beobachtungen wurde geschlussfolgert, dass Personen in einem St.-Petersburg-Spiel intuitiv den Median

[109] Vgl. Dutka (1988: 34); Haller/Barth (2014: 252–253).

[110] Vgl. Bspl. 2.2 auf S. 313.

[111] Vgl. Steinhaus (1949); Csörgő/Simons (1993).

[112] *„Instead of a paradox we reach the conclusion that the price should depend on n, that is to say vary as the number of trials increases.“* Feller (1945: 302). *„Thus to solve the paradox we must consider not an individual game but a sequence of games. This point of view once being adopted, we can find another solution, based on a sort of strong law of great numbers.“* Steinhaus (1949: 302).

[113] Vgl. Feller (1968: 251–253); Liebovitch/Scheurle (2000: 37–38); Da Silva/Matsushita (2016: 70).

[114] Vgl. Vivian (2003); Vivian (2013).

[115] Deshalb ist die Schlussfolgerung/Argumentation von Vivian, sämtliche bisherigen Autoren zu dem Thema in all den Jahren hätten diese Lösungsmöglichkeit übersehen, entsprechend einzuordnen.

verwenden.[116] Diese Schlussfolgerung wurde anschließend unterstützt.[117] Grundlage für diesen Ansatz ist die oben skizzierte Argumentation von Feller und Steinhaus. Im Gegensatz zum Erwartungswert existiert der Median bei jeder Verteilung. Für diskrete Zufallsvariablen ist er nicht immer eindeutig definiert. Das ist bei einmaliger Durchführung des St.-Petersburg-Spiels der Fall, jedoch kann auf Basis von mehreren Wiederholungen der Median ermittelt werden. Die dabei erzielten Ergebnisse sind konsistent mit dem Grenzwertsatz für endliche St.-Petersburg-Spiele aus Gleichung 1.[118]

- **Experimentelle Analysen:** Neben den theoretischen Analysen sind experimentelle Untersuchungen zu nennen. Ein frühes Experiment wurde 1777 von Buffon durchgeführt und ist im Beispiel 2.2 dargestellt.

Beispiel 2.2:

Buffon *engagierte ein Kind, welches* $2.048 = 2^{11}$ *Münzwürfe durchführte. Die Ergebnisse sind zusammen mit den theoretischen Werten in Tab. 2.4 zu sehen.*

Tab. 2.4: Ergebnisse im St.-Petersburg-Experiment. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Dutka (1988: 35); Székely/Richards (2004: 227); Haller/Barth (2014: 252).

Wurffolge bzw. Anzahl der Würfe v	Auszahlung G_v	Theoretische Häufigkeit bei 2^{11} Spielen	Beobachtete Häufigkeit
Z	1	$2^{N-1} = 1.024$	1.061
KZ	2	$2^{N-2} = 512$	494
K^2Z	4	$2^{N-3} = 256$	232
K^3Z	8	$2^{N-4} = 128$	137
K^4Z	16	$2^{N-5} = 64$	56
K^5Z	32	$2^{N-6} = 32$	29
K^6Z	64	$2^{N-7} = 16$	25
K^7Z	128	$2^{N-8} = 8$	8
K^8Z	256	$2^{N-9} = 4$	6
K^9Z	512	$2^{N-10} = 2$	0
$K^{10}Z$	1.024	$2^{N-11} = 1$	0

Die theoretisch ermittelte Gesamtauszahlung ergibt sich aus Gleichung 1 mit:

$$\begin{aligned} Gesammtsumme &= \frac{2048}{2} \cdot log_2\,(2.048) \\ &= 11.264\,€ \end{aligned}$$

bzw. mit Gleichung 3:

$$\begin{aligned} Gesammtsumme &= 2^{11} \cdot \frac{11}{2} \\ &= 11.264\,€ \end{aligned}$$

[116] Vgl. Hayden/Platt (2009: 258–270).
[117] Vgl. Okabe/Nii/Yoshimura (2019).
[118] Vgl. Okabe/Nii/Yoshimura (2019: 3).

Die Gesamtauszahlung auf Basis der Beobachtung summiert sich auf 10.057€. Aus der theoretisch ermittelten Gesamtsumme kann der faire Preis für ein Los mit Gleichung 2 bzw. 4 oder durch einfache Division der Gesamtsumme ermittelt werden, wodurch sich ein Wert pro Spiel in Höhe von 5,50€ ergibt. Dem steht der empirisch ermittelte Wert von 4,91€ gegenüber.

Später wurden weitere Experimente durchgeführt, um die frühen Ergebnisse zu überprüfen.[119] In den darauffolgenden Jahren wurden weitere Versuchsreihen aufgenommen. Die Versuche, die zur Identifikation des Medians führten,[120] wurden schon erwähnt. Darüber hinaus wurde z. B. auf der Basis von 1 Mrd. Versuchen gezeigt, dass die Gewinnsumme im St.-Petersburg-Spiel einem Potenzgesetz folgt. Eine Verdopplung der Gewinnwahrscheinlichkeit führt zu einer Halbierung der Gewinnsumme.[121]

- **Ersatz des maximalen Nutzens durch die maximale Wahrscheinlichkeit:** Eine weitere Lösung wird durch eine veränderte Zielstellung möglich. Sämtliche bisher vorgestellten Studien und Erklärungen basieren auf der Annahme, dass der Akteur den erwarteten Nutzen maximieren möchte. Das reale Verhalten legt jedoch den Schluss nahe, dass die Probanden versuchen, die Wahrscheinlichkeit der Lotterie zu maximieren. Sie suchen demzufolge die stochastisch optimale Lotterie. Stochastisch optimal für einen Akteur ist eine Lotterie, die ihm die maximale Gewinnwahrscheinlichkeit bietet. Deshalb vergleicht ein realer Akteur nicht die Nutzengrößen, sondern vielmehr die Wahrscheinlichkeiten. Diese Argumentation führt zur Feststellung, dass:[122]
  - das St.-Petersburg-Spiel nicht stochastisch optimal ist, weshalb
  - in dem Spiel aus Sicht realer Akteure lediglich ein bis zwei Versuche optimal sind.

Die Ausführungen zeigen, dass das St.-Petersburg-Paradox eine kaum zu überschauende Anzahl an Beiträgen und Ideen hervorgerufen hat und seit über 300 Jahren diskutiert wird. Unter den Autoren, die sich mit dem Thema beschäftigt haben, sind Naturforscher und Universalgelehrte (z. B. D'Alembert oder Buffon) sowie zahlreiche Träger des „Wirtschaftsnobelpreises" (z. B. Samuelson, Arrow, Aumann und Shapley). Die Erwartungsnutzentheorie ist aus der Diskussion des Paradoxes entstanden, und hat wiederum selbst zu Paradoxien geführt. Eines davon wird im Folgenden erläutert.

---

[119] Vgl. Dutka (1988: 36–37); Vivian (2013: 356–360).
[120] Vgl. Hayden/Platt (2009); Okabe/Nii/Yoshimura (2019).
[121] Vgl. Da Silva/Matsushita (2016: 68).
[122] Vgl. Yukalov (2021).

2.3.2.2 Allais-Paradox

Eine frühe – und sehr bekannte – Kritik am Erwartungsnutzenprinzip wurde in Form des Allais-Paradox[123] vorgebracht.[124] Das Paradox resultiert aus der Verletzung des Unabhängigkeits-Axioms[125] und kommt in zwei Effekten (Common-Consequence-Effekt und Common-Ratio-Effekt) zum Ausdruck. Allais selbst wies nur auf den Common-Consequence-Effekt hin. Der Common-Ratio-Effekt wurde später in ähnlichen Situationen beobachtet und wird deshalb häufig zusammen dargestellt.[126] Der Common-Consequence-Effekt wird im Beispiel 2.3 geschildert.[127]

Beispiel 2.3:

Einem Entscheidungsträger werden in zwei Situationen jeweils zwei Lotterien bzw. Entscheidungsalternativen angeboten (vgl. Abb. 2.4). In der überwiegenden Mehrzahl der Befragungen resultiert(e) folgende Präferenzordnung:

$$\text{Lotterie } A_1 \succ \text{Lotterie } A_2$$

$$\text{Lotterie } B_2 \succ \text{Lotterie } B_1$$

Damit würde folgen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot u(1\,Mio\,€) \succ\ & 0.10 \cdot u(5\,Mio\,€) \\ & + 0.89 \cdot u(1\,Mio\,€) + 0.01 \cdot u(0\,€) \\ 0.10 \cdot u(5\,Mio\,€) + 0.90 \cdot u(0\,€) \succ\ & 0.11 \cdot u(1\,Mio\,€) + 0.89 \cdot u(0\,€) \end{aligned}$$

Umstellen führt zu:

$$\begin{aligned} 0.11 \cdot u(1\,Mio\,€) &\succ 0.10 \cdot u(5\,Mio\,€) + 0.01 \cdot u(0\,€) \\ 0.11 \cdot u(1\,Mio\,€) &\prec 0.10 \cdot u(5\,Mio\,€) + 0.01 \cdot u(0\,€) \end{aligned}$$

Der Widerspruch zwischen den letzten beiden Zeilen ist offensichtlich.

Die Differenzen der Erwartungsnutzen zwischen Lotterie 1 und Lotterie 2 sind in beiden Situationen identisch. Der Erwartungswert von Variante 2 ist in beiden Situationen um 390.000€ höher. Wie auch immer die Risikonutzenfunktion des Akteurs aussieht, sie kann das Ergebnis nicht herbeiführen. Zum besseren Verständnis sind die Lotterien noch einmal in anderer Form dargestellt (vgl. Abb. 2.5).

---

[123] Maurice F. C. Allais (1911–2010), der 1988 den „Wirtschaftsnobelpreis“ erhielt.

[124] Für eine Darstellung der historischen Entwicklung des Paradoxes vgl. Heukelom (2015); Mongin (2019).

[125] Vgl. Axiom 1.5.5 auf S. 116. Zu einer umfangreichen Kritik dieses Axioms und weiterer Axiome vgl. Jensen (1967b) sowie Abschn. 1.5.4.4 auf S. 141.

[126] Vgl. Trost (1991: 71–73); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 190–191).

[127] Vgl. Allais (1953: 526–530); Schneeweiß (1966: 79–81); Seidenfeld (1988: 271–273); Machina (1989: 1628–1630); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 184–188).

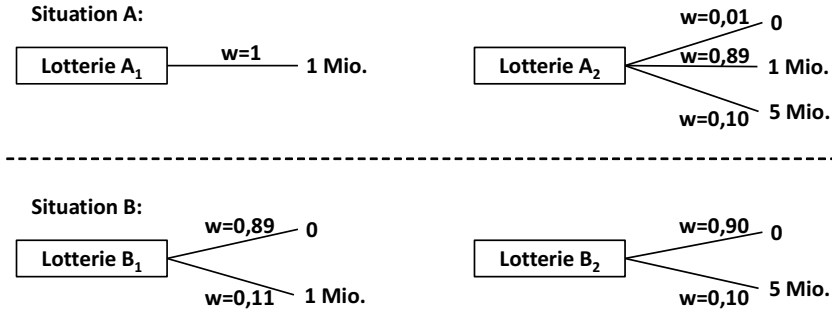


Abb. 2.4: Explizite Entscheidungssituation zum Common-Consequence-Effekt. Quelle: Eigene Darstellung.

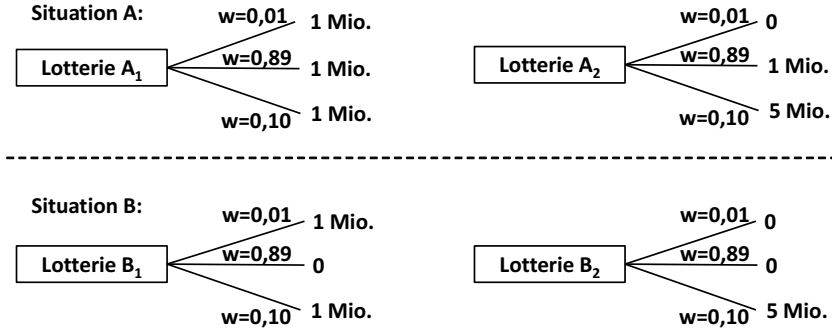


Abb. 2.5: Implizite Entscheidungssituation zum Common-Consequence-Effekt. Quelle: Eigene Darstellung.

Situation A unterscheidet sich von Situation B nur dadurch, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 89% anstelle von 1.000.000€ ein Ergebnis von 0€ erzielt wird. Der Rest der Alternativen ist identisch: 11% Wahrscheinlichkeit für 1.000.000€ versus 10% Wahrscheinlichkeit für 5.000.000€. Da der Unterschied zwischen dieser Differenz in beiden Situationen identisch ist, müssten die Bewertungen ebenfalls identisch sein. Anders ausgedrückt: Die Situation B kann in die Situation A überführt werden, indem eine gemeinsame Konsequenz (Wahrscheinlichkeit von 89% für 1.000.000€) hinzugefügt wird. Gemäß dem Erwartungsnutzenprinzip darf dies aber keinen Einfluss auf die Bewertung haben.

Offensichtlich können viele Entscheidungsträger die implizite Struktur aus Abb. 2.5 in der Ursprungsdarstellung der Abb. 2.4 nicht erkennen. Die Gemeinsamkeiten werden deshalb nicht erkannt, was zu einem Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom führt.

Die Verletzung des Unabhängigkeits-Axioms wird primär darauf zurückgeführt, dass in der Realität der Unterschied zwischen zwei Wahrscheinlichkeiten wesentlich höher bewertet wird, wenn dadurch absolute Gewissheit erreicht werden kann. Beispielsweise wird ein Übergang von 99% auf 100% höher gewichtet als ein Übergang von 40% auf 41%. Die Akteure messen in realen Entscheidungssituationen unwahrscheinlichen Ergebnissen ein viel zu großes Gewicht bei. Dieses Verhalten wird als **Sicherheits-Effekt** bezeichnet.[128]

Eine mögliche Darstellung, die diese Ergebnisse wahrscheinlichkeitstheoretisch erklärt, besteht in dem sog. **Fanning out** der Indifferenzkurven im Wahrscheinlichkeitsdreieck. In den Ausführungen zu den Eigenschaften der Indifferenzkurven wurde gezeigt, dass der lineare Verlauf der Kurven auf die **Betweenness**-Eigenschaft[129] und die Parallelität auf die **Homothetie** zurückzuführen ist.[130] Im Fall des Fanning-out ist zwar die Linearität durch die Betweenness-Eigenschaft gesichert, jedoch verlaufen die Indifferenzkurven im Wahrscheinlichkeitsdreieck nicht mehr parallel (vgl. Abb. 2.6).

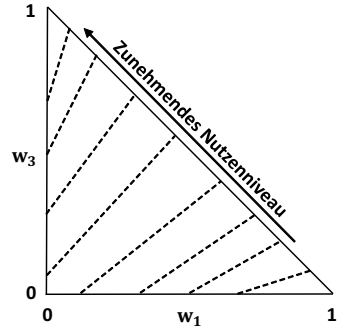


Abb. 2.6: Fanning-out von Indifferenzkurven. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Machina (1982: 305); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 405); Beck (2014: 120).

Demzufolge wird die Homothetie verletzt. Das Fanning-out führt dazu, dass die Steigung der Indifferenzkurven mit Verlagerung in Nord-West-Richtung zunimmt. Damit wird eine zunehmende Risikoaversion bei steigendem Ergebniswert und zunehmender Gewinnwahrscheinlichkeit impliziert. Machina begründet den Common-Consequence-Effekt mit der nicht vorhandenen Separierbarkeit der Präferenzen bezüglich des Austausches von Teillotteri-

[128] Vgl. Tversky/Kahneman (1981); Tversky/Kahneman (1986); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 402–404).
[129] Vgl. Axiom 1.5.10 auf S. 133.
[130] Vgl. Axiom 1.5.9 auf S. 133.

en.[131] Das BERNOULLI-Prinzip bzw. das Erwartungsnutzentheorem geht von separierbaren Präferenzen aus, was im Unabhängigkeits-Axiom ausgedrückt wird.

Die Entstehung des Fanning-out durch die Verletzung der Homothetie lässt sich besonders gut am Common-Ratio-Effekt beobachten, der dem Common-Consequence-Effekt sehr ähnlich ist. Zur Erklärung dient das Beispiel 2.4.[132]

Beispiel 2.4:

Einem Entscheidungsträger werden wiederum in zwei Situationen jeweils zwei Lotterien bzw. Entscheidungsalternativen angeboten (vgl. Abb. 2.7).

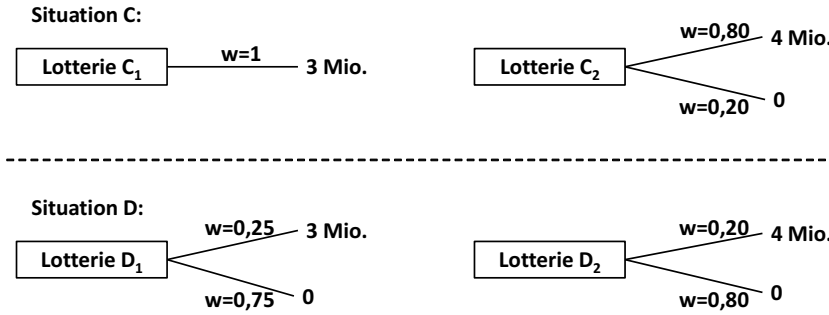


Abb. 2.7: Entscheidungssituation zum Common-Ratio-Effekt. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 187).

Die überwiegende Mehrzahl der Befragten gibt folgende Präferenzordnung an:

$$\text{Lotterie } C_1 \succ \text{Lotterie } C_2$$

$$\text{Lotterie } D_2 \succ \text{Lotterie } D_1$$

In Tab. 2.5 sind die Lotterien noch einmal in anderer Form dargestellt. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten auf einen Gewinn beträgt in der Situation C 100% in Lotterie 1 und 80% in Lotterie 2, also 5:4. In der Situation D ist dieses Verhältnis identisch, da 25% in Lotterie 1 20% in Lotterie 2 gegenüber stehen. Die relative Attraktivität ist auf Basis dieser Relation identisch.

---

[131] Vgl. Machina (1989: 1628–1630).

[132] Vgl. Kahneman/Tversky (1979: 266); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 402–404); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 184–188).

Tab. 2.5: Common-Ratio-Effekt. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 188).

Ursprungsdarstellung

Wahrscheinlichkeit / Alternative		**0,80**	**0,20**
$\mathbf{L_{C;1}}$		3.000.000 €	3.000.000 €
$\mathbf{L_{C;2}}$		4.000.000 €	0 €

Varierte Darstellung

Wahrscheinlichkeit / Alternative	**0,75**	**0,20**	**0,05**
$\mathbf{L_{D;1}}$	0 €	3.000.000 €	3.000.000 €
$\mathbf{L_{D;2}}$	0 €	4.000.000 €	0 €

Die Verletzung der Homothetie wird folgendermaßen ersichtlich: Die Lotterien D_1 und D_2 sind Mischungen der Lotterien C_1 und C_2 mit dem schlechtesten Ergebnis W wie folgt: $D_1 = C_1 \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot W$ und $D_2 = C_2 \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot W$, wobei $\lambda = 0{,}25$. Gemäß der Homothetie muss gelten:[133] $D_1 \succ D_2 \Leftrightarrow \lambda \cdot C_1 + (1-\lambda) \cdot W \succ \lambda \cdot C_2 + (1-\lambda) \cdot W$.

Abbildung 2.8 a) zeigt die Situation im Wahrscheinlichkeitsdreieck.[134]

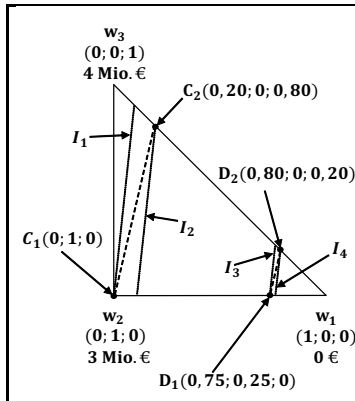


Abb. 2.8 a): Verletzung der Unabhängigkeit

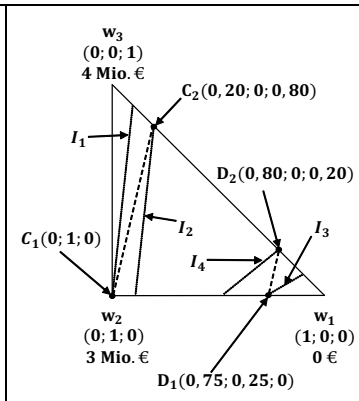


Abb. 2.8 b): Erklärung durch Fanning-out

Abb. 2.8: Grafische Darstellung des Common-Ratio-Effektes. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Burghart (2020: 573).

Die Lotterien sind maßstabsgerecht eingetragen. Die Verbindungsstrecken $\overline{C_1 C_2}$ sowie $\overline{D_1 D_2}$ verlaufen parallel. Wie an anderer Stelle erwähnt wurde, müssen die Indifferenzkurven aufgrund des Unabhängigkeits-Axioms immer Geraden darstellen und in jedem Fall parallel zueinander verlaufen.[135] *Die gepunkteten Linien stellen mögliche Indifferenzkurven dar. Wenn gilt: $C_1 \succ C_2$, so muss C_1 auf einer anderen Indifferenzkurve*

[133] Vgl. Burghart (2020: 572) sowie Axiom 1.5.9 auf S. 133.

[134] Vgl. Abschn. 1.5.4.2 auf S. 120 für eine Erläuterung der grafischen Darstellungen.

[135] Vgl. Abschn. 1.5.4.2.3 auf S. 126.

liegen, als C_2. Diese Kurve muss sich weiter links von C_2 befinden, da dies ein höheres Nutzenniveau verkörpert. Das ist die Indifferenzkurve I_1. Um die Relation $D_2 \succ D_1$ darzustellen, muss D_2 auf einem höheren Nutzenniveau abgebildet werden, als D_1. D_2 liegt auf der Indifferenzkurve I_4 und D_1 auf der Kurve I_3, welche parallel zu I_1 und I_2 verlaufen. Wenn gilt $D_2 \succ D_1$, muss die Indifferenzkurve I_4 weiter links verlaufen, als die Kurve I_3. Bei Einhaltung der Parallelität können die Indifferenzkurven die Relation $D_2 \succ D_1$ jedoch nicht abbilden, da I_3 links von I_4 verläuft. In der Abbildung 2.8 b) ist der Verlauf der Indifferenzkurven I_3 und I_4 so geändert, dass gilt: $D_2 \succ D_1$. Das erfordert jedoch den Verzicht auf die Parallelität.

Diese Beobachtung steht ebenfalls im Widerspruch zum Erwartungsnutzenprinzip.[136] Mit dem beobachteten Verhalten verstoßen die Probanden (bzw. deren Präferenzen) gegen die Homothetie-Eigenschaft. Der Common-Ratio-Effekt kann auch mit der nicht vorhandenen Separierbarkeit der Präferenzen erklärt werden. In diesem Fall wird gegen die Separierbarkeit bezüglich der Wahrscheinlichkeitsmischung verstoßen.[137]

Interessanterweise tritt bei intertemporalen Entscheidungen ein ähnlicher Effekt, der **Common-Difference-Effekt**, auf. Dieser ist an der entsprechenden Stelle erläutert.[138]

Allais folgert aus seinen Analysen, dass lediglich das Ordinalprinzip[139] und das Dominanzprinzip[140] als Kriterien für rationales Handeln bei Risiko anzulegen seien.[141] Das Allais-Paradox weist auf ein Verhalten hin, dass der theoretischen Konzeption der Erwartungsnutzentheorie widerspricht.

Dafür ist eine Reihe von Erklärungsansätzen entstanden, auf die hier nicht weiter eingegangen, sondern auf die weiterführende Literatur[142] bzw. auf die entsprechenden Darstellungen verwiesen wird.[143]

2.3.2.3 Newcomb-Dilemma

Ein weiteres intensiv diskutiertes Phänomen ist als Newcomb-Paradox bzw. Newcombs Problem bekannt geworden. Die weiteren Ausführungen werden zeigen, dass es sich bei genauer Betrachtung um ein Dilemma handelt.[144]

---

[136] Vgl. Fishburn (1988: 273–278).
[137] Vgl. Machina (1989: 1628–1630).
[138] Vgl. Abschn. 1.7.3 auf S. 214.
[139] Vgl. Axiom 1.5.1 bis Axiom 1.5.3 auf S. 114.
[140] Vgl. Axiom 1.5.6 auf S. 121.
[141] Vgl. Schneeweiß (1966: 38–42).
[142] Vgl. Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 185–188).
[143] Vgl. Abschn. 2.4.1 auf S. 337.
[144] Vgl. Abschn. 2.3.1 auf S. 301 zur Definition eines Dilemmas.

Das Gedankenexperiment wurde von Newcomb[145] bei der Analyse des bekannten Gefangenen-Dilemmas entwickelt und erstmals 1969 veröffentlicht (jedoch nicht von ihm selbst).[146] Dieses Gedankenspiel löste in den folgenden Dekaden ein lebhaftes Echo aus, nicht nur in der Entscheidungstheorie, sondern auch in der Philosophie.[147] Da das Newcomb-Dilemma wichtige Erkenntnisse zur Interpretation von Situationen, Wahrscheinlichkeiten und zur Einordnung von Lösungskonzepten offenlegt, wird es hier als Bspl. 2.5 vorgestellt.[148]

Beispiel 2.5:

Es existieren zwei Subjekte: ein Entscheidungsträger D und ein fast allwissendes Wesen Ω, welches die Entscheidungen von D fast perfekt prognostizieren kann. Dem Akteur D stehen zwei Boxen und folgende Alternativen zur Auswahl:

- ***Alternative 1:*** *Wähle nur die Box 2 und erhalte deren Inhalt.*
- ***Alternative 2:*** *Wähle beide Boxen und erhalte deren Inhalte.*

Box 1 enthält mit Sicherheit 1.000 €, wohingegen Box 2 entweder 1.000.000 € enthält oder nichts. Der Inhalt der Box 2 hängt von der Vorhersage der Entscheidung durch Ω wie folgt ab:

- *Wenn Ω prognostiziert, dass D beide Boxen wählt, so bleibt die Box 2 leer.*
- *Lautet die Prognose hingegen, dass ausschließlich Box 2 gewählt wird, so befinden sich darin 1.000.000 €.*
- *Trifft der Akteur keine durch Ω vorhersehbare Entscheidung, sondern überlässt diese dem Zufall (z. B. durch Würfeln oder Münzwurf), bleibt die Box 2 ebenfalls leer.*

Für welche Alternative soll D sich entscheiden?

Es kann gezeigt werden, dass beide Handlungsmöglichkeiten – die sich gegenseitig ausschließen – rational als optimale Alternative begründet werden können. Dies ist offensichtlich paradox und wird nun erläutert. Im ersten Schritt wird die Ergebnismatrix entworfen (vgl. Tab. 2.6).

Tab. 2.6: Auszahlungsmatrix des Newcomb-Dilemmas. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Li/Zenker (2021: 3).

Zustand / Alternative	**Zustand 1**	**Zustand 2**
A_1: Eine Box	1.000.000 €	0 €
A_2: Zwei Boxen	1.001.000 €	1.000 €

[145] William Newcomb (1927–1999).

[146] Vgl. Nozick (1969).

[147] Dies wurde schon frühzeitig als "Newcombmanie" bezeichnet. Vgl. Levi (1982). Zu einem Überblick über verschiedene Ansätze und Interpretationen vgl. Ledwig (2000).

[148] Vgl. Levi (1975); Eells (1984); Lenzen (1997); Eckhardt (2013: 21–34); Wolpert/Benford (2013); Weber (2016); Li/Zenker (2021).

Die Situation ähnelt der Gotteswette von PASCAL.[149] Im Unterschied zur Gotteswette ist diese Entscheidungssituation jedoch **kein „Spiel gegen die Natur“**. Der Gegenspieler des Entscheidenden handelt nicht rein zufällig, sondern auf Basis der prognostizierten Auswahl. Es existiert also ein bewusst handelnder Gegenspieler. Das Paradox ist deshalb in der strategischen Spieltheorie angesiedelt und beinhaltet das Gefangenen-Dilemma als Spezialfall. Konkreter ausgedrückt: Das Gefangenen-Dilemma ist ein Paar von NEWCOMB-Dilemmata, jeweils ein Dilemma für jeden Gefangenen.[150]

Wenn von einer linearen Nutzenfunktion des Akteurs ausgegangen wird, dann entsprechen die Zahlungsgrößen Nutzenwerten und die Auszahlungsmatrix kann als Entscheidungsmatrix verwendet werden. Die Lösung erfolgt im zweiten Schritt und scheint klar und eindeutig zu sein. Nach dem Konzept der absoluten Dominanz[151] ist es rational, die Alternative 2 (Zwei-Box-Alternative) zu wählen, weil diese in jedem Zustand 1.000 € mehr erbringt, als die Vergleichsalternative.

Doch das ist nur eine mögliche Interpretation des Problems. Im Unterschied zur Gotteswette beeinflusst das allwissende Objekt Ω die zukünftigen Zustände. Wenn Ω fast allwissend ist, sieht es vorher, dass D sich für die Zwei-Box-Lösung entscheidet und lässt die Box 2 leer. Somit ist der zukünftige Zustand von der Entscheidung des Akteurs D abhängig, die wiederum von Ω vorhergesehen wird. Aus der Tab. 2.7 wird ersichtlich, dass es sich bei dieser Interpretation um eine klassische Situation der strategischen Spieltheorie handelt. Die beiden Spieler D und Ω verfügen über jeweils zwei Möglichkeiten, jedoch nur einen Zug. Die zentrale Frage ist nun, wie aus der Problemstellung die Reihenfolge der Züge interpretiert wird. Welcher der Spieler setzt seinen Zug zuerst und welcher Spieler reagiert?

Tab. 2.7: Erweiterte Darstellung des NEWCOMB-Dilemmas. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Li/Zenker (2021: 11).

		Prognose durch Ω	
	Zustand / **Alternative**	**Zustand 1**	**Zustand 2**
Entscheidung durch D	**A_1: Eine Box**	1.000.000 €	0 €
	A_2: Zwei Boxen	1.001.000 €	1.000 €

[149] Vgl. Bspl. 1.17 auf S. 163.

[150] Vgl. Lewis (1979); Bermúdez (2018: 35–38); Stalnaker (2018: 188–192); Holler/Illing/Napel (2019: 399–401).

[151] Vgl. Def. 1.45 auf S. 162.

Zur weiteren Analyse wird eine Wahrscheinlichkeit w eingeführt, die angibt, ob die Prognose von Ω korrekt ist. Die Gegenwahrscheinlichkeit für eine falsche Prognose beträgt $1-w$. Der Erwartungswert des Nutzens der beiden Alternativen folgt mit Def. 1.33 auf S. 118:

$$\begin{aligned}\Phi(A_1) &= 1.000.000\text{€}\cdot w + 0\text{€}\cdot(1-w)\\ &= 1.000.000\text{€}\cdot w\\ \Phi(A_2) &= 1.001.000\text{€}\cdot(1-w) + 1.000\text{€}\cdot(w)\\ &= 1.001.000\text{€} - 1.000.000\text{€}\cdot w\end{aligned}$$

Für $w \to 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi(A_1) &\to 1.000.000\\ \Phi(A_2) &\to 1.000\end{aligned}$$

Aus dieser Sicht ist demzufolge die Ein-Box-Lösung (A_1) vorteilhaft. Die Lösung scheint davon abhängig zu sein, ob das Erwartungsnutzenprinzip oder das Dominanzprinzip angewendet wird.

Im Folgenden wird jedoch gezeigt, dass dies nicht korrekt ist, sondern dass das Erwartungsnutzenprinzip zur Begründung beider Ergebnisse führt. Dazu muss jedoch unterschieden werden zwischen der Ermittlung des Erwartungsnutzens:[152]

- auf Basis unbedingter Wahrscheinlichkeiten oder
- auf Basis bedingter Wahrscheinlichkeiten.

Zu Beginn werden die Wahrscheinlichkeiten der Zustände und Alternativen dargestellt (vgl. Tab. 2.8). Dabei beschreibt b_1 und b_2 die von Ω vorhergesagte Wahl, wohingegen B_1 bzw. B_2 die tatsächlich von D getroffene Entscheidung abbildet. Die Variable w in Tab. 2.8 beschreibt nun die Wahrscheinlichkeit des Eintritts der Ereignisse.

Tab. 2.8: Wahrscheinlichkeitenmatrix des NEWCOMB-Dilemmas. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Li/Zenker (2021: 11).

Zustand / **Alternative**	$\mathbf{Z_1 = b_2}$	$\mathbf{Z_2 = b_1 b_2}$
$\mathbf{A_1 = B_2}$	$w(B_2 \cap b_2)$	$w(B_2 \cap b_1 b_2)$
$\mathbf{A_2 = B_1 B_2}$	$w(B_1 B_2 \cap b_2)$	$w(B_1 B_2 \cap b_1 b_2)$

Mit diesen Informationen kann der Erwartungswert des Nutzens der beiden Alternativen mit der bekannten Vorschrift[153] formuliert werden:

$$\Phi(A_1) = 1.000.000\text{€}\cdot w(B_2 \cap b_2) + 0\text{€}\cdot w(B_2 \cap b_1 b_2)$$

[152] Vgl. Gibbard/Harper (1985); Li/Zenker (2021).

[153] Vgl. Def. 1.33 auf S. 118.

$$\Phi(A_2) = 1.001.000 € \cdot w(B_1B_2 \cap b_2) + 1.000 € \cdot w(B_1B_2 \cap b_1b_2)$$

Die Lösung hängt nun davon ab, wie die Wahrscheinlichkeiten des gemeinsamen Auftretens der Ereignisse ermittelt werden. Dabei kann zwischen bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten unterschieden werden, was davon abhängt, ob es sich um stochastisch abhängige oder unabhängige Ereignisse handelt. Die für das geschilderte Problem möglichen Interpretationen sind in der Tab. 2.9 dargestellt.

Tab. 2.9: Mögliche Interpretationen der Wahrscheinlichkeiten des Newcomb-Dilemmas. Quelle: Eigene Darstellung.

	$Z_1 = b_2$	$Z_2 = b_1b_2$
$A_1 = B_2$	$w(B_2 \cap b_2)$: Ein-Box-Lsg.: $w(B_2) \cdot w(b_2 \mid B_2)$ Zwei-Box-Lsg.: $w(B_2) \cdot w(b_2)$	$w(B_2 \cap b_1b_2)$: Ein-Box-Lsg.: $w(B_2) \cdot w(b_1b_2 \mid B_2)$ Zwei-Box-Lsg.: $w(B_2) \cdot w(b_1b_2)$
$A_2 = B_1B_2$	$w(B_1B_2 \cap b_2)$: Ein-Box-Lsg.: $w(B_1B_2) \cdot w(b_2 \mid B_1B_2)$ Zwei-Box-Lsg.: $w(B_1B_2) \cdot w(b_2)$	$w(B_1B_2 \cap b_1b_2)$: Ein-Box-Lsg.: $w(B_1B_2) \cdot w(b_1b_2 \mid B_1B_2)$ Zwei-Box-Lsg.: $w(B_1B_2) \cdot w(b_1b_2)$

Das ist gleichbedeutend mit der Frage, wie die Ursache-Wirkungs-Relation modelliert wird bzw. welcher Spieler den ersten Zug übernimmt. Zuerst wird die Interpretation der Ein-Box-Lösung erläutert, deren Bayessches Netz in Abb. 2.9 gezeigt ist und wozu folgende Notation verwendet wird:[154]

C	–	die Entscheidung durch D,
F	–	Vorhersage durch Ω,
R	–	Resultat,
$w(C)$	–	Wahrscheinlichkeit für die Entscheidung C,
$w(F \mid C)$	–	bedingte Wahrscheinlichkeit von F bei gegebenem C.

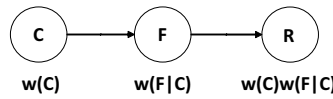


Abb. 2.9: Bayessches Netz für die Ein-Box-Lösung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Li/Zenker (2021: 12).

Bei dieser Interpretation erfolgt in einem ersten Schritt C, also die Wahl der Alternative durch D. Diese Entscheidung wird anschließend von Ω "voraus-

[154] Vgl. Abschn. 1.5.1 auf S. 98 für eine Erklärung bedingter Wahrscheinlichkeiten.

gesehen“, was zu $w(F|C)$ führt. Ω reagiert quasi auf die Wahl von D. Auf dieser Basis wird die Wahrscheinlichkeit des Zustands Z bestimmt. Ω führt den Zustand auf der Basis von C (der Entscheidung von D) herbei, was jedoch auf seiner – fast korrekten – Prognose beruht. Die Wahrscheinlichkeit $w(F|C)$ spiegelt die Qualität dieser Prognose wider und liegt nahe bei 1, wenn die Vorhersagegenauigkeit von Ω sehr groß ist.

Aus Abb. 2.9 wird ersichtlich, dass $w(C)$ und $w(F|C)$ gemeinsam die Wahrscheinlichkeit des Resultats R, $w(C) \cdot w(F|C)$ bestimmen. Die Handlungsoptionen von D und Ω sind wie folgt determiniert: D übernimmt den ersten Zug C und bestimmt die Wahrscheinlichkeit $w(B_2)$ und damit auch von $w(B_1B_2)$. Wählt D beispielsweise B_2 so folgt: $w(B_2) = 1$. Ω hingegen reagiert darauf, und legt $w(F|C)$ fest. Wenn $F = C$ gilt $w(F|C) = 1$. Mit diesen Informationen kann der Erwartungswert des Nutzens der beiden Alternativen mit der bekannten Vorschrift[155] formuliert werden:

$$\begin{aligned}
\Phi(A_1) &= 1.000.000\text{€} \cdot [w(B_2) \cdot w(b_2|B_2)] + 0\text{€} \cdot [w(B_2) \cdot w(b_1b_2|B_2)] \\
&= 1.000.000\text{€} \cdot [w(B_2)] \\
\Phi(A_2) &= 1.001.000\text{€} \cdot [w(B_1B_2) \cdot w(b_2|B_1B_2)] \\
&\quad + 1.000\text{€} \cdot [w(B_1B_2) \cdot w(b_1b_2|B_1B_2)] \\
&= 1.000\text{€} \cdot [w(B_1B_2)]
\end{aligned}$$

Für einen Akteur, der seinen Erwartungsnutzen maximieren möchte, ist es rational $w(B_1B_2) = 0$ und $w(B_2) = 1$ zu setzen. Das entspricht der Wahl von A_1, also der Ein-Box-Lösung.

Die Ursache-Wirkungs-Relation bei der Zwei-Box-Variante wird anders interpretiert. Im ersten Schritt, quasi als erster Zug, erfolgt die Prognose F durch Ω. Dabei kann Ω $0 \leq w(F) \leq 1$ setzen. Wenn $w(F) = 0$, ergibt sich: $w(F) \cdot w(C|F) = 0$. Anschließend trifft D seine Entscheidung C (vgl. Abb. 2.10). Da D die Prognose nicht kennt, kann er streng genommen auch nicht darauf reagieren. Im Rahmen dieser Interpretation ignoriert der Akteur D quasi die Vorhersage und trifft seine Entscheidung also unabhängig von der Vorhersage durch Ω.

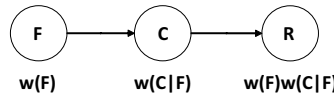


Abb. 2.10: Bayessches Netz für die Zwei-Box-Lösung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Li/Zenker (2021: 13).

[155] Vgl. Def. 1.33 auf S. 118.

Die Entscheidung C ist unabhängig von der Prognose F. Es besteht aus Sicht von D also kein kausaler Zusammenhang zwischen der Entscheidung und dem Zustand (vgl. Abb. 2.11). Streng genommen handelt es sich um eine Situation aus der nichtkooperativen Spieltheorie, jedoch kennt Spieler D den Zug von Spieler Ω nicht. Die Entscheidung hat keinen kausalen Einfluss auf den Zustand, aus Sicht von D handelt es sich um ein Spiel gegen die Natur und nicht gegen einen Gegenspieler. Deshalb sind bei der Ermittlung des Erwartungsnutzens auch keine bedingten Wahrscheinlichkeiten zu verwenden.

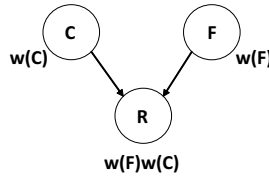


Abb. 2.11: Alternatives Bayessches Netz für die Zwei-Box-Lösung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Li/Zenker (2021: 14).

Der Erwartungswert des Nutzens der beiden Alternativen wird mit der bekannten Vorschrift[156] wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned}\Phi(A_1) &= 1.000.000\text{€} \cdot [w(b_2) \cdot w(B_2)] + 0\text{€} \cdot [w(b_1 b_2) \cdot w(B_2)] \\ &= 1.000.000\text{€} \cdot [w(b_2) \cdot w(B_2)] \\ \Phi(A_2) &= 1.001.000\text{€} \cdot [w(b_2) \cdot w(B_1 B_2)] + 1.000\text{€} \cdot [w(b_1 b_2) \cdot w(B_1 B_2)]\end{aligned}$$

Für einen Akteur mit dem Ziel der Erwartungsnutzenmaximierung ist es rational, $w(B_2) = 0$ und $w(B_1 B_2) = 1$ zu setzen, was der Wahl von A_2 (Zwei-Box-Lösung) entspricht.

Die wesentliche Ursache für die sich widersprechenden Ergebnisse besteht nicht in dem verwendeten Lösungsprinzip, sondern in der unterschiedlichen Interpretation des Realproblems und der daraus resultierenden Überführung in zwei abweichende Formalprobleme. Das äußert sich in der Verwendung von bedingten oder unbedingten Wahrscheinlichkeiten (vgl. Tab. 2.9 auf S. 324). Es handelt sich deshalb um eine klassische Dilemma-Situation: Die unscharfe Problemformulierung ermöglicht zwei Interpretationsvarianten. Deren Ergebnisse sind jeweils für sich betrachtet rational, widersprechen sich jedoch.

Die Interpretation, die zur Zwei-Box-Lösung führt, verneint die Möglichkeit eines fast gottgleichen, fast alles vorhersehenden Wesens. Diese Lösung impliziert, dass die Wahl der Alternative durch D **unabhängig** von der Prognose durch Ω erfolgt. Das entspricht der Annahme aus den einleitenden Darstellun-

[156] Vgl. Def. 1.33 auf S. 118.

gen, dass die Umweltzustände unabhängig von der getroffenen Entscheidung sind.[157] Diese Sichtweise interpretiert die Situation als Spiel gegen die Natur.

Die Ein-Box-Lösung hingegen basiert auf der Akzeptanz der Existenz eines fast allwissenden Wesens und der Berücksichtigung seiner (Re-)Aktion. Damit wird die Situation als Spiel gegen einen bewusst handelnden Gegenspieler interpretiert, was den Bereich der strategischen Spieltheorie berührt. Dies begründet die Annahme, dass die in der Zukunft eintretenden Umweltzustände von der getroffenen Entscheidung abhängen.

Aus philosophischer Sicht stellt sich bei dieser Lösung zwangsläufig die Frage nach dem freien Willen, wenn Ω fast alles vorhersehen kann. Die damit verbundenen Implikationen und Diskussionen gehen jedoch über den Rahmen der vorliegenden Darstellungen hinaus und werden hier nicht weiter verfolgt.

Wichtig ist die Schlussfolgerung, dass aus ein und derselben Problemstellung verschiedene Annahmen abgeleitet und sich widersprechende Ergebnisse erzielt werden können. Es ist Aufgabe des Konstrukteurs des Entscheidungsmodells diese Annahmen zu explizieren und bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen.[158] Es existiert eine Reihe ähnlicher Dilemmata, die unterschiedliche Auffassungen der Kausalität von Entscheidungen zulassen.[159]

2.3.3 Klassische Heuristiken und Phänomene

Da in realen Situationen i. d. R. häufig eine der Voraussetzungen der rationalen Entscheidungsfindung nicht erfüllt ist (z. B. verfügbare Zeit, vorhandenes Wissen und Informationen, Informationsaufnahme- und -verarbeitungskapazität, Motivation), verwenden Akteure bei der Problemlösung Heuristiken. Heuristiken werden allgemein definiert als: *„problem-solving methods which tend to produce efficient solutions to difficult problems by restricting the search through the space of possible solutions. The restriction on the search is based on evaluation of the structure of the problem“.*[160]

Eine Heuristik ist demzufolge ein effektives Problemlösungsverfahren, welches auf der Vernachlässigung einiger Problemmerkmale beruht und zu einer realisierbaren Lösung führt, jedoch über keine Lösungsgarantie verfügt.[161] Die Verwendung von Heuristiken erleichtert die Entscheidungsfindung bzw.

[157] Vgl. Abschn. 1.6.1 auf S. 160.

[158] Vgl. 1. Band, Abschn. 2.2.2 auf S. 128 zur Konstruktion von Modellen.

[159] Vgl. Easwaran (2021).

[160] Braunstein (1976: 154–155).

[161] Vgl. Kirsch (1971: 155–156); Klein/Scholl (2011: 61–62).

macht diese in bestimmten Situationen überhaupt erst möglich. Deshalb ist die Verwendung von Heuristiken nicht per se als negativ einzustufen.[162]

Die aus der Verwendung einer Heuristik resultierenden Fehler werden – wenn sie systematisch auftreten – als biases bezeichnet. Aus der Menge der festgestellten Heuristiken und Verzerrungen werden im Folgenden einige für das Investitionscontrolling relevante Phänomene vorgestellt. Für eine vertiefende Darstellung wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

Schon an dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass einige dieser Phänomene durch andere Fachvertreter zu einem späteren Zeitpunkt widerlegt bzw. korrigiert wurden. An den entsprechenden Stellen wird dies kenntlich gemacht. Die Phänomene werden trotzdem hier vorgestellt, da zum einen die Widerlegung nicht unumstritten ist und zum anderen diese Phänomene häufig in der Literatur zu finden sind.

Als prominente und gut untersuchte Heuristiken, die schon frühzeitig entdeckt wurden, werden im Folgenden die:[163]

- Verfügbarkeits-Heuristik,
- Repräsentativitäts-Heuristik sowie die
- Anker-Heuristik

vorgestellt.

Die **Verfügbarkeits-Heuristik** wird von Akteuren in Situationen eingesetzt, in denen sie über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses urteilen müssen, jedoch über zu geringe Informationen, zu wenig Zeit bzw. keine Motivation zur intensiveren Beschäftigung mit dem Problem verfügen. Dann greifen Akteure auf identische oder ähnliche Situationen der Vergangenheit zurück, die im Gedächtnis gespeichert wurden. Diese werden als Beurteilungsgrundlage herangezogen. Je besser verfügbar eine entsprechende Situation ist, desto wahrscheinlicher erscheint sie dem Akteur. Systematische Verzerrungen, die bei Verwendung dieser Heuristik auftreten, sind:[164]

- **Beeinflussung durch die Lebhaftigkeit der Darstellung:** Je lebhafter der Akteur sich ein Ereignis vorstellen kann, umso wahrscheinlicher erscheint es.
- **Beeinflussung durch die Präsenz des Ereignisses:** Je präsenter ein Ereignis für den Akteur ist, desto größer wird dessen Wahrscheinlichkeit

[162] Vgl. Berkeley/Humphreys (1982: 236).

[163] Vgl. Kahneman/Tversky (1972); Kahneman/Tversky (1973); Tversky/Kahneman (1974); Wiswede (2012: 30–31); Beck (2014: 28–76); Nitzsch (2021: 49–68).

[164] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 136–139).

eingestuft. Diese Präsenz wird größtenteils durch die Verfügbarkeit der Informationen in den unterschiedlichen Medien beeinflusst.[165]

- **Beeinflussung durch Ereignisverknüpfungen:** Die Beurteilung der Wahrscheinlichkeit wird davon abhängig gemacht, welche Kombination von Ereignissen erlebt bzw. gesehen wurden. Kombinationen, die nicht erlebt bzw. gesehen wurden, werden ignoriert.

Die **Repräsentativitäts-Heuristik** kommt zum Einsatz, wenn der Akteur über die Zugehörigkeit von Elementen zu einer Klasse entscheiden muss und/oder wenn der Akteur unbekannte Ursache-Wirkungs-Beziehungen erklären bzw. prognostizieren muss. Akteure nutzen bei derartigen Problemen häufig den Umweg über die Vermutung, für wie repräsentativ sie ein Ereignis für die Grundgesamtheit halten. Typische Verzerrungen, die bei Verwendung dieser Heuristik auftreten, sind:[166]

- **Basisraten-Fehler bzw. base rate fallacy:** Dieser Fehler tritt auf, wenn bisher verwendete Wahrscheinlichkeiten (Basisrate bzw. a-priori-Wahrscheinlichkeiten) durch neu eintreffende Informationen im weiteren Verarbeitungsprozess zu a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ungenügend berücksichtigt werden. Gemäß dem Theorem von Bayes müssten die bisherigen Schätzwerte von bedingten Wahrscheinlichkeiten konsistent an die neuen Informationen angepasst werden. Akteure scheinen in der Realität hingegen intuitiv dazu zu neigen, die Basisrate zu unterschätzen bzw. komplett zu ignorieren.[167]
- **Gesetz der kleinen Zahl:** Die Zuverlässigkeit von Aussagen mit kleinen Stichproben wird falsch eingeschätzt, d. h. überschätzt.[168]
- **Konjunktions-Fehler:** Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintritts zweier Ereignisse im Vergleich mit der Wahrscheinlichkeit des isolierten Eintritts eines dieser Ereignisse wird systematisch als zu hoch eingeschätzt.[169]

Die **Anker-Heuristik**, auch als Heuristik der Verankerung und Anpassung (anchoring and adjustment) bezeichnet, wird ebenfalls zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten und Beurteilung von Sachverhalten eingesetzt. Die Akteure suchen sich – in Ermangelung an ausreichenden Informationen – eine bestimmte verfügbare Information und verwenden diese als „Anker“. An

[165] Als klassisches Beispiel dient der Vergleich der Wahrscheinlichkeiten der Todesursachen „Haiangriff“ vs. „herabfallende Kokosnuss“. Die letztgenannte Ursache wird bei Befragungen i. d. R. als weniger wahrscheinlich eingestuft, obwohl diese statistisch betrachtet zehnmal häufiger ist als die erstgenannte Ursache. Vgl. Englert (2010: 4).

[166] Vgl. Pelzmann (2012: 17–22); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 134–136). Es wird darauf verwiesen, dass der Basisraten-Fehler und der Konjunktions-Fehler durch Gigerenzer et al. kritisiert bzw. widerlegt wurden. Vgl. Abschn. 2.4.2 auf S. 344.

[167] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 149–152).

[168] Vgl. Kahneman/Tversky (1971).

[169] Vgl. Tversky/Kahneman (1983); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 136).

diesem Anker wird das Urteil festgemacht bzw. ausgerichtet.[170] Der Anker, der auch willkürlich von außen gesetzt werden kann, beeinflusst den Akteur massiv in der Urteilsfindung, selbst wenn es sich um einen Fachexperten handelt.[171] Gerade in Verhandlungssituationen ist der Anker-Effekt dann zu beobachten bzw. relevant, wenn es um die Abgabe des Initialangebotes geht.[172] Systematische Fehler bei der Verwendung dieser Heuristik sind:[173]

- **Fehleinschätzung quantitativer Größen:** Die Fixierung bzw. Vorgabe eines Ankers verleitet den Akteur bei Abgabe einer Prognose oder Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten dazu, sich an diesem Anker zu orientieren.
- **Verzerrungen der Erinnerung:** Die Fixierung bzw. Vorgabe eines Ankers verleitet den Akteur bei Erinnerungen an die Vergangenheit dazu, sich an diesem Anker zu orientieren. Dieser Effekt wird auch als **Rückschaufehler** bzw. **hindsight bias** beschrieben. Viele Akteure sind **nach** der Bekanntgabe oder dem Auftreten eines Ereignisses der Meinung, dieses Ergebnis in dieser Form **vorausgesehen** zu haben. Die Akteure überschätzen systematisch ihr Wissen und ihre Erwartungen vor dem Eintritt des Ereignisses. Ein wesentlicher Grund dafür scheint zu sein, dass die Akteure in vielen Fällen keine oder nur noch vage Erinnerungen an ihren Wissensstand vor dem Ereignis haben. Wird ihnen ein Anker geliefert, tendieren die Schätzungen systematisch zu diesem Anker.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass reale Akteure diese Heuristiken häufig dann für Entscheidungen nutzen und demzufolge besonders dann anfällig für Fehler und Verzerrungen sind, wenn:[174]

- zu wenig quantitative Informationen vorliegen,
- Unsicherheiten in Form von Wahrscheinlichkeiten zu berücksichtigen sind und
- zusätzliche, „erklärende“ Informationen verfügbar sind, die anschaulichen Charakter haben und dem Akteur hilfreich zur Ergänzung der unzureichenden quantitativen Informationen erscheinen.

Neben den Verzerrungen, die aus der Nutzung der soeben beschriebenen Heuristiken resultieren, sind weitere Phänomene festgestellt worden. Die Phänomene, die für Investitionsentscheidungen von Relevanz sein können werden im Folgenden dargestellt. Ein Phänomen ist die **Selbst-Überschätzung** bzw. **overconfidence**, die sich darin äußert, dass Akteure ihre Qualifikation (Wissen und Können) systematisch überschätzen. Diese Überschätzung kann

[170] Vgl. Kahneman (1992).
[171] Vgl. Northcraft/Neale (1987).
[172] Vgl. Kristensen/Gärling (1997); Moran/Ritov (2002).
[173] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 139–140).
[174] Vgl. Pelzmann (2012: 23–24).

das Wissen um zukünftige Zustände, aber auch Wissen über die verfügbaren Alternativen und deren Realisierbarkeit betreffen. Neben die Überschätzung der eigenen Person kann auch die Unterschätzung von Gegenspielern treten.[175]

Die Wahrnehmung von Verlusten ist bei vielen Akteuren häufig anders als die Wahrnehmung von Gewinnen in derselben Höhe. Dieser Umstand wird als **Verlustaversion** bezeichnet und führt dazu, dass die Darstellungsweise von Handlungskonsequenzen über deren Wahrnehmung und Einordnung entscheidet.

Werden aus einem Fundamentalziel mehrere Instrumentalziele abgeleitet,[176] muss die Summe der Teilgewichte 1 bzw. 100 % betragen. In der Realität wird jedoch den neu ausgearbeiteten und spezifizierten Teilzielen ein höheres Gewicht beigemessen, so dass die Gesamtsumme größer als der zulässige Maximalwert ist. Dies wird als **Splitting-Bias** bezeichnet.[177]

Das Verhalten entsprechend dem **Sunk-cost-Effekt** bzw. der **escalation of commitment** führt dazu, dass Investitionen, die isoliert für sich betrachtet nicht getätigt werden würden, als Folgeinvestitionen realisiert werden, um vorangegangene Investitionen zu rechtfertigen. In zahlreichen Experimenten und in Analysen realer Entscheidungssituationen ist „die Tendenz, schlechtem Geld gutes Geld nachzuwerfen“, bestätigt worden.[178] Speziell im öffentlichen Sektor ist dieses Entscheidungsverhalten oftmals anzutreffen. Bekannte Beispiele sind die Entwicklung der Concorde, der Bau des Flughafens Berlin-Brandenburg und der Eurotunnel.[179]

An begonnenen Investitionsprojekten wird umso mehr festgehalten, je größer die bisherigen Investitionssummen in dieses Projekt waren. Die Fortführung der schon begonnenen Alternative führt zu weiteren Ausgaben, die selbst wieder zur Ursache einer Projektweiterführung werden und zu einer Eskalation führen. Durch dieses Verhalten werden die Annahme und das Rationalitätspostulat der zukunftbezogenen Entscheidungsfindung verletzt.[180] Die Gründe für dieses Verhalten sind vielfältig.[181] Bei Investitionsentscheidungen wird diese Anforderung häufig verletzt und bei investitionsbezogenen Entscheidungsprozessen werden schon realisierte und nicht zurückgewinnba-

[175] Vgl. Riesenhuber (2006: 96–98). Dieser Effekt wurde jedoch durch Gigerenzer et al. kritisiert bzw. widerlegt. Vgl. Abschn. 2.4.2 auf S. 344.

[176] Für die Beziehung von Fundamental- und Instrumentalziel vgl. 1. Band, Abschn. 1.2.2.2 auf S. 22 und für die Zielgewichtung vgl. Abschn. 1.4.3.3 auf S. 66.

[177] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 160).

[178] Vgl. den Überblicksaufsatz von Roth/Robbert/Straus (2015).

[179] Vgl. Arkes/Ayton (1999); Flyvbjerg (2014); Drummond (2017).

[180] Vgl. 1. Band, Abschn. 1.1 auf S. 3 sowie Staw (1976); Albach (1989: 39); Schaub (1997: 192–195); Franck/Zellner (2001: 251); Gschwandtner/Lambson (2002); Schäfer (2005: 15–16); Sofis et al. (2015); Keefer (2019); Vasconselos (2020).

[181] Vgl. Zayer (2007: 65-70).

re Kosten in die Betrachtung der zukünftigen Effekte einbezogen, was eine rationale Entscheidung unmöglich macht. Diese Interpretation muss jedoch wie folgt kritisiert bzw. relativiert werden:[182]

- Viele der Studien sind durch eine mehrdeutige Informationslage gekennzeichnet. Dies lässt prinzipiell keine eindeutige Aussage über eine rationale Vorgehensweise zum Zeitpunkt der Entscheidung zu.
- Aus Sicht von Realoptionsmodellen[183] können solche Entscheidungen unter bestimmten Umständen durchaus rational sein, um sich zukünftige Handlungschancen offen zu halten.[184]
- Aus Sicht der Evolutionsbiologie erscheint eine solche Vorgehensweise ebenfalls rational.[185]

Akteure sollten wissen und entsprechend der Rationalitätsaxiome auch berücksichtigen, dass die Eintrittswahrscheinlichkeiten von zukünftigen Ereignissen nicht durch ihre Handlungen beeinflusst werden können. Genau diese Anforderung wird häufig verletzt, was als **Kontroll-Illusion** bezeichnet wird. Akteure können sehr wohl unterscheiden zwischen einer Spielsituation, in der sie keinen Einfluss auf zukünftige Ereignisse haben und einer Risiko-Situation, in der sie durch ihr Handeln die Zukunft beeinflussen können. Jedoch wird fälschlicherweise aus der - tatsächlich existierenden – Beeinflussbarkeit interner Prozesse auf die – nicht existierende - Beeinflussbarkeit von Eintrittswahrscheinlichkeiten geschlossen.[186]

Neben diesem Effekt wird häufig festgestellt, dass Akteure die Eintrittswahrscheinlichkeit positiver Ereignisse systematisch höher einschätzen als die Wahrscheinlichkeit des Eintritts negativer Ereignisse. Dieses **Wunschdenken** kann dergestalt gesteigert werden, dass vom Akteur angenommen wird, die Eintrittswahrscheinlichkeit eines negativen Ereignisses für seine Person sei geringer als für andere Personen. Das wird als **unrealistischer Optimismus** bezeichnet.[187]

In der Übersichtstabelle 2.10 wird eine Zuordnung der Heuristiken und Phänomene zu den idealtypischen Phasen des Führungsprozesses von Investitionen vorgenommen. Das bedeutet jedoch **nicht**, dass die geschilderten Phänomene **ausschließlich** in diesen Phasen auftreten.

[182] Vgl. Kunz (2013: 212–213).
[183] Vgl. 1. Band, Abschn. 5.4.3 auf S. 512.
[184] Vgl. Groß-Schuler (2002: 228–230); Schatzki (2003); O'Brien/Folta (2009).
[185] Vgl. Hrgović/Hromatko (2018).
[186] Vgl. Zayer (2007: 143–144); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 160).
[187] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 160).

Tab. 2.10: Klassische Heuristiken und Phänomene. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Eisenführ/Weber/Langer (2010: 405–411); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 149–162).

Phase	Mögliche Phänomene
Nicht spezifiziert	• Rückschaufehler • Selbstüberschätzung • Verlustaversion
Zielbildung und -formulierung	• Splitting-Bias
Suche, Prognose und Bewertung von Alternativen	• Verfügbarkeits-Heuristik: – Beeinflussung durch Lebhaftigkeit der Darstellung – Beeinflussung durch Präsenz der Ereignisse – Beeinflussung durch Ereignisverknüpfungen • Repräsentativitäts-Heuristik: – Basisraten-Fehler – Konjunktions-Fehler – Fehler durch „Gesetz der kleinen Zahl“ • Anker-Heuristik: – Fehleinschätzung von quantitativen Angaben – Rückschaufehler • Versunkene-Kosten-Effekt • Illusion der Kontrolle • Wunschdenken und unrealistischer Optimismus

Mit der Bezeichnung „klassische Heuristiken und Phänomene“ wird deutlich gemacht, dass sowohl einige dieser Phänomene zwischenzeitlich widerlegt bzw. kritisiert wurden als auch andere Heuristiken und Phänomene bekannt und relevant sind, von denen einige an anderer Stelle vorgestellt werden.[188]

2.3.4 Zeitinkonsistente Entscheidungen

Es überrascht nicht, dass in empirischen Studien auch für intertemporale Entscheidungen systematische Abweichungen vom rationalen Ideal aufgezeigt wurden. Diese werden oftmals als **Zeit-Anomalien** bezeichnet. Der Begriff *Zeitanomalie* suggeriert, dass sich die Zeit abweichend von Standardmodellen verhält. Tatsächlich weicht jedoch der Akteur vom Standardmodell ab, er verhält sich zeitinkonsistent, genauer gesagt sind seine Präferenzen nicht stationär.[189]

[188] Vgl. Abschn. 2.4.2 auf S. 344.

[189] Es muss festgestellt werden, dass die Bezeichnung „zeitinkonsistente Entscheidung“ selbst inkonsistent ist, da sie nicht auf die Verletzung der Eigenschaft der Zeitkonsistenz (vgl. Def. 1.51 auf S. 200) beschränkt ist, sondern vielmehr auf die Verletzung der **Stationarität** (vgl. Def. 1.7.6 auf S. 203) zurückzuführen ist. Korrekterweise müsste die Bezeichnung deshalb „nichtstationäre Entscheidung“ sein, jedoch wird hier die umgangssprachliche Variante „zeitinkonsistente Entscheidung“ verwendet.

Bei der Vorstellung der **Stationarität**[190] wurde bereits auf die stark einschränkende Wirkung dieser Annahme eingegangen. Es überrascht nicht, dass die Präferenzen in empirischen Tests die geforderte Eigenschaft nicht aufwiesen, sondern inkonsistent sind.[191] Empirisch sind u. a. folgende Phänomene festgestellt worden:[192]

- **Größen-Effekt:**[193] Große Beträge werden im Vergleich mit kleineren Beträgen geringer diskontiert.[194] Eine Erklärung dafür scheint in der Höhe der Beträge und damit in der Bedeutung für die Versuchsperson zu liegen. Geringe Beträge sind demzufolge eher unwichtig und rechtfertigen erst durch hohe Diskontierung eine längere Wartezeit.
- **Sign-Effekt bzw. Gewinn-Verlust-Asymmetrie:**[195] Gewinne werden stärker diskontiert, als Verluste. Eine mögliche Erklärung könnte in dem Unbehagen von Personen liegen, Schulden aufzunehmen.
- **Multiple Präferenzen:**[196] Im Akteur konfligieren zwei Ichs: Einem langfristig vorsorgenden, altruistischen Ich steht ein eher kurzfristig orientiertes Ich gegenüber. Beide Ichs verfügen über unterschiedliche Präferenzen. Auf ein Unternehmen übertragen ist die planende Instanz das langfristig orientierte Ich, während die ausführende Ebene lediglich kurzfristige Interessen verfolgt. Aufgrund der verschiedenen Präferenzen kommt es zu inkonsistenten Entscheidungen bzw. zur **Präferenzumkehr** (*preference reversal*).[197]
- **Immediacy-Effekt:** Sehr oft wird die Gegenwart im Vergleich zur Zukunft in einem höheren Maße gewichtet, als durch die exponentielle Diskontierung erfasst bzw. abgebildet wird. Dieser Unmittelbarkeits-Effekt, auch als *present focus bias* bezeichnet, tritt in verschiedenen Formen auf:
  - **Common-Difference-Effekt:**[198]

    Die Situation wurde bereits geschildert,[199] und wird zur Erläuterung im Beispiel 2.6 wieder aufgegriffen.

[190] Vgl. Def. 1.50 auf S.198, Def. 1.7.6 auf S. 203 und Bspl. 1.20 auf S. 199.

[191] Vgl. Thaler (1981: 205); Halevy (2015); Millner/Heal (2018).

[192] Vgl. Thaler (1981); Loewenstein/Thaler (1989); Tversky/Thaler (1990); Prelec/Loewenstein (1991); Loewenstein/Prelec (1992); Roelofsma (1996); Weikard (2001: 493–496); Hempelmann/Lürwer/Brackschulze (2002: 383–384); Prelec (2004); Streich/Levy (2007); Frederick/Loewenstein (2008); Kalenscher/Pennartz (2008); Walther (2010); Beck (2014: 235–248); Ghisellini/Chang (2018: 151–171); Ericson/Laibson (2019); Adriani/Sonderegger (2020).

[193] Vgl. Thaler (1981: 205–206); Beck (2014: 237–240).

[194] Dies wird in anderen Studien auch als Magnituden-Effekt bezeichnet.

[195] Vgl. Thaler (1981: 206); Beck (2014: 235–237).

[196] Vgl. Thaler/Shefrin (1981).

[197] Vgl. Ghisellini/Chang (2018: 156–161).

[198] Vgl. Thaler (1981: 202); Loewenstein/Prelec (1992: 574–575); Keren/Roelofsma (1995: 288); Nitzsch (2021: 138–141).

[199] Vgl. Bpl. 1.21 auf S. 200.

Beispiel 2.6:

Ein Akteur wird gebeten, sich die zwei folgenden Entscheidungsprobleme zu betrachten und für jedes Problem jeweils eine Präferenzordnung festzulegen.

Problem 1:	*Alternative A:*	*Erhalt von 150 € heute*
	oder	
	Alternative B:	*Erhalt von 200 € in 9 Monaten*
Problem 2:	*Alternative C:*	*Erhalt von 150 € in 10 Jahren*
	oder	
	Alternative D:	*Erhalt von 200 € in 10 Jahren und 9 Monaten*

Der einzige Unterschied zwischen beiden Problemen besteht in der absoluten Zeitdifferenz von 10 Jahren. Die Alternativen sind in beiden Problemen relativ zueinander genauso weit entfernt, nämlich 9 Monate. Deshalb muss für einen rationalen Akteur gelten: $A \succ B \Rightarrow C \succ D$. *Bei vielen Akteuren gilt jedoch:* $A \succ B$ *sowie* $D \succ C$. *Offensichtlich sind die Akteure im ersten Problem bereit, für 9 Monate Differenz auf 50€ zu verzichten. Im zweiten Fall jedoch gilt dies nicht mehr. In Anbetracht der großen absoluten Zeitdistanz zwischen den Problemen von 10 Jahren wird die relative Zeitdifferenz von 9 Monaten unterschiedlich, also inkonsistent, bewertet. Die Bewertung der relativen Zeitdifferenz zwischen Alternativen ist offensichtlich davon abhängig, wie weit in der Zukunft diese auftritt.*

Dieser Effekt ähnelt dem **Common-Ratio-Effekt** bei Entscheidungen unter Risiko. Dieses Phänomen ist an der entsprechenden Stelle erläutert.[200]

- **Aufschub von unangenehmen Aktivitäten:**[201] Oft wird in der Gegenwart eine angenehme bzw. wenig anstrengende Aktivität der unangenehmen Aktivität vorgezogen. Aus heutiger Sicht wird für die Zukunft dann die unangenehme Aktivität der angenehmen Aktivität vorgezogen. Das sagt jedoch nichts darüber aus, ob in der Zukunft auch entsprechend gehandelt wird.

Der Immediacy-Effekt für intertemporale Entscheidungen findet sein Pendant im Sicherheits-Effekt bei Entscheidungen unter Risiko.[202] Dies erklärt auch die Ähnlichkeit von Common-Difference- und Common-Ratio-Effekt. Während im Fall der Entscheidungen bei Risiko das Unabhängigkeits-Axiom verletzt wird, ist der Immediacy-Effekt mit der Verletzung der Stationarität zu erklären.

- **Delay-Speedup Asymmetrie:** Die individuelle Diskontrate ist oftmals abhängig von dem Verhältnis des erwarteten Zeitpunktes des Eintretens eines Ereignisses und dem tatsächlichen Zeitpunkt. Tritt ein Ereignis spä-

[200] Vgl. Abschn. 2.3.2.2 auf S. 315.

[201] Vgl. Read/Loewenstein/Kalyanaraman (1999).

[202] Vgl. Weber/Chapman (2005: 105–106).

ter als erwartet ein, wird es stärker diskontiert, als wenn ein Ereignis früher als erwartet eintritt.

- **Zeit wird anders diskontiert als Geld:**[203] Oftmals sind Akteure der Auffassung, dass sie in der Zukunft mehr Zeit haben werden, als in der Gegenwart. Deshalb legen sie sich in der Gegenwart für Aktivitäten in der Zukunft fest, um zu gegebener Zeit feststellen zu müssen, dass sie keine Zeit dafür haben. Die Erklärung dafür besteht in der viel höheren Diskontierung von Zeit im Vergleich zur Diskontierung von Geld. Dies führt zu einer starken Höhergewichtung der Gegenwart.
- **Überhöhte Diskontraten:** Individuelle Diskontraten sind häufig höher als der Marktzins. Der Theorie entsprechend könnten diese Marktteilnehmer sich Geld über den Kapitalmarkt beschaffen, um den Konsum in die Gegenwart vorziehen zu können.

Für einige der o. g. Effekte sind auch andere Erklärungsansätze möglich, die in einem rationalen Kalkül begründet sind. So wurde z. B. häufig beobachtet, dass Entscheidungsträger hohe implizite Diskontraten für Energiesparinvestitionen verwenden. Eine Analyse des Entscheidungsproblems unter dem Blickwinkel der Realoptionsmethodik zeigt jedoch, dass die Verhaltensweise der Akteure durchaus rational und zweckmäßig im Umgang mit Unsicherheit und Irreversibilität ist. Durch unsichere Rahmenbedingungen bezüglich des Zeitpunktes und Umfanges der staatlichen Subventionen wird die Investition erst einmal aufgeschoben. Eine steigende Unsicherheit führt zur Erhöhung des Wertes der Realoption, was auf den steigenden Zeitwert zurückzuführen ist. Dieser Wert würde bei der sofortigen Durchführung der Investition vernichtet werden. Die dafür entgehenden Rückflüsse sind kleiner als dieser Schutzwert und rechtfertigen nicht die Realisierung der Investition im Betrachtungszeitpunkt, da sich die Investition dann als Wertvernichter erweisen würde. Das führt zu einer Verzögerung der Energiesparinvestition.[204]

Eine weitere Erklärung für einige der oben beschriebenen Phänomene könnte in der Verwendung von Heuristiken liegen.[205] Dabei wird die Take-the-Best-Heuristik herangezogen, die an anderer Stelle beschrieben ist.[206]

Besonders die wechselseitige Unabhängigkeit[207] und die Stationarität der Präferenzen stellen in der Realität sehr starke Einschränkungen dar. In den Erläuterungen zur wechselseitigen Unabhängigkeit wurde schon gezeigt,[208] dass und warum diese Eigenschaft nur sehr schwer zu erfüllen ist.

[203] Vgl. Zauberman/Lynch Jr. (2005); Lynch Jr./Zauberman (2006).
[204] Vgl. Dangl/Wirl (1998); Müller (2004: 102).
[205] Vgl. Ghisellini/Chang (2018: 166–169).
[206] Vgl. Abschn. 2.4.2 auf S. 344.
[207] Vgl. Anf. 1.7.5 auf S. 195.
[208] Vgl. Bspl. 1.19 auf S. 195.

2.4 Ausgewählte Ansätze zur Erklärung und Modellierung

2.4.1 Prospect-Theory

Aufbauend auf ihren eigenen Erkenntnissen zur Verwendung und zur Qualität von Heuristiken wurde von Kahneman und Tversky ein früher Ansatz zur Deskription und Explikation des realen Entscheidungsverhaltens unter Unsicherheit geliefert, der unter dem Begriff der **„Prospect-Theory“** zusammengefasst und bekannt wurde.[209] Es handelt sich dabei um einen vielfältig überprüften sowie diskutierten Ansatz, der auch in der Controlling-Literatur seine Verbreitung gefunden hat.[210] Er kann als wichtigster Revisionsversuch der Erwartungsnutzentheorie bezeichnet werden.[211]

Entscheidungen unter Unsicherheit werden von Kahneman und Tversky als Wahl zwischen Erwartungen oder Lotterien bezeichnet, woraus sich der Name ableitet.[212] Die einzelnen Tätigkeiten bzw. Handlungsschritte des Entscheidungsprozesses werden in der PT in zwei Phasen zerlegt:[213] In der „Editier-Phase“ als erster Phase wird das Problem nach bestimmten Regeln transformiert und mental repräsentiert. Daran schließt sich die „Bewertungs-Phase“ an, in der ein subjektiver Wert bestimmt und eine Alternative gewählt wird.[214] Wesentliche Bestandteile der Theorie sind:

- die – an einem **Referenzpunkt** ausgerichtete – **Wertfunktion** und
- die **Entscheidungsgewichtungsfunktion**.

Gemäß der PT verwendet der Entscheidungsträger einen **Referenzpunkt**, um die Konsequenzen von Handlungsalternativen zu bewerten. In diesem Zusammenhang – und im Gegensatz zur Erwartungsnutzentheorie – wird von dem **Wert der Konsequenz** für den Akteur gesprochen und nicht vom Nut-

[209] Vgl. Kahneman/Tversky (1979); Tversky/Kahneman (1986); Tversky/Kahneman (1992). Amos Tversky (1937–1996) und Daniel Kahneman, geb. 1934. Die weiterentwickelte Version der Prospect-Theory aus dem Jahr 1992 müsste korrekterweise als kumulative Prospect-Theorie bezeichnet werden, da die ursprüngliche Version als originale Prospect-Theorie bezeichnet wird. Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 423). Aus Gründen der Sprachvereinfachung wird in den folgenden Darstellungen die kumulative Version als Prospect-Theory (PT) bezeichnet.

[210] Vgl. Hirsch (2007: 243–248); Günther/Detzner (2012).

[211] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 184). Zur Darstellung der Erwartungsnutzentheorie vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.

[212] *„Decision making under risk can be viewed as a choice between prospects or gambles.“* Kahneman/Tversky (1979: 263).

[213] Vgl. Kahneman/Tversky (1979: 274).

[214] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 184–188).

zen.[215] Dieser Wert begründet die subjektive **Wertfunktion**. Ergebnisse, die oberhalb des Referenzpunktes liegen, werden positiv bewertet und Resultate, die unter diesem Punkt liegen, werden negativ eingeschätzt.

In der Editier-Phase können vom Akteur folgende Operationen ausgeführt werden:[216]

- Kodierung des Referenzpunktes,
- Kombination von Alternativen,
- Vereinfachung von Alternativen,
- Segregation von Alternativen,
- Streichung von gemeinsamen Bestandteilen sowie
- Prüfung der Alternativen auf Dominanz.

Die **Kodierung** des Referenzpunktes ist gleichbedeutend mit der Festlegung dieses Punktes. Auf welcher Basis dies geschieht, ist unerheblich. Dies kann die aktuelle Vermögensposition sein, an der die Gewinne oder Verluste gemessen werden. Es kann jedoch auch ein anderer Punkt als Orientierungsmaßstab verwendet werden. An diesem Punkt wird die subjektive Bewertung der positiven und negativen Abweichungen der Handlungsergebnisse festgemacht.

Die **Kombination** wird häufig eingesetzt, wenn die verfügbaren Informationen zu einer Alternative noch nicht verdichtet wurden. Durch das Zusammenfassen von Wahrscheinlichkeiten werden die Darstellungsform und die weitere Bearbeitung vereinfacht.

Die **Vereinfachung** von Alternativen besteht in der Rundung von quantitativen Informationen über die Alternative (z. B. Ergebnis- oder Wahrscheinlichkeitsgrößen). Ergänzend erfolgt oftmals die Streichung äußerst unwahrscheinlicher Ereignisse und deren Vernachlässigung im weiteren Verlauf.

Die **Segregation** von Alternativen besteht in der Abspaltung der sicheren Komponenten der Alternative von den unsicheren Komponenten derselben. Wird die Alternative betrachtet, welche mit 40 %-iger Wahrscheinlichkeit einen Verlust von 100 € erzielt und mit 60 %-iger Wahrscheinlichkeit einen Verlust von 300 € erzielt, so wird diese Konstellation von Akteuren häufig aufgespalten in einen sicheren Verlust von 100 € und eine 60 %-ige Wahrscheinlichkeit eines Verlustes von 200 €.

Während diese Operationen auf **eine einzelne Alternative** angewendet werden können, kommen die folgenden Operationen für die **Editierung einer Alternativenmenge** in Betracht. Reale Akteure eliminieren während des Vergleiches von mehreren Alternativen diejenigen Bestandteile, die bei allen Alternativen identisch ausgeprägt sind. Dies wird mit der **Streichung gemeinsamer Bestandteile** in der PT berücksichtigt.

[215] Vgl. Kahneman/Tversky (1979: 268–269).

[216] Vgl. Kahneman/Tversky (1979: 274–275); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 184–186).

Die **Prüfung der Menge auf dominierte Alternativen** wird vom Akteur mit Blick auf die stochastische Dominanz durchgeführt.[217]

Diese Operationen können in unterschiedlicher Reihenfolge realisiert werden. Eine grundlegende Aussage der PT besteht darin, dass das Ergebnis des Editier-Prozesses abhängig von der gewählten Reihenfolge der Operationen ist. In Abhängigkeit von der Reihenfolge können deshalb verschiedene Alternativen für den nächsten Prozessschritt zur Verfügung stehen.[218] Als Ergebnis der Editier-Phase steht eine Reihe von kodierten Alternativen für den nächsten Prozessabschnitt, die Bewertung, zur Verfügung. Als erstes Ergebnis der Bewertung entsteht eine **Wertfunktion** für jede Alternative. Die charakteristische Wertfunktion $v(x)$ nach Kahneman und Tversky weist folgende Struktur auf:[219]

$$v(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & wenn\ x \geq\ 0 \\ -\lambda(-x)^{\beta}, & wenn\ x < 0 \end{cases}$$

Zur Charakteristik der Wertfunktion (vgl. Abbildung 2.12) zählen die Definitionsbereiche der einzelnen Parameter. So gilt im Allgemeinen $\lambda > 1$, $0 < \alpha$ sowie $\beta < 1$.[220] Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems der Abbildung 2.12 den **Referenzpunkt** des Akteurs abbildet. Positive Ergebniswerte x stellen deshalb **positive Abweichungen** vom Referenzwert dar. Dass dies nicht zwangsläufig absolut positive Werte sein müssen, wird an dem Beispiel des erwarteten Verlustes deutlich. Der erwartete Verlust bildet den Referenzpunkt, so dass positive Abweichungen zwar immer noch einen Verlust bedeuten können, aus Akteurssicht hingegen eine positive Abweichung vom Referenzwert sind.

Die derartig definierte Funktion ist gekennzeichnet durch:[221]

- Verlustaversion des Akteurs,
- konkaven Verlauf im Bereich positiver Abweichungen (Gewinnbereich),
- konvexen Verlauf im Bereich der negativen Abweichungen (Verlustbereich).

Mit der **Verlustaversion des Akteurs** wird der empirischen Beobachtung realer Akteure Rechnung getragen, die den subjektiven Wert ein und desselben Betrages im Verlustbereich höher einstufen als im Gewinnbereich. Der in der Abbildung 2.12 beschriebene idealtypische Verlauf der Wertfunktion $v(e)$ im Gewinn- und Verlustbereich wird mit einem abnehmenden Wertzuwachs

[217] Zur Definition der stochastischen Dominanz vgl. Abschn. 1.5.1 auf S. 98.

[218] Vgl. Kahneman/Tversky (1979: 275).

[219] Vgl. Tversky/Kahneman (1992: 309).

[220] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 433).

[221] Vgl. Tversky/Kahneman (1986: S 259); Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 202–203).

einer zusätzlichen Einheit positiver Abweichungen vom Referenzwert („Gewinn“) bzw. mit sinkendem Wertverlust einer zusätzlichen Einheit negativer Abweichungen („Verlust“) vom Referenzwert begründet.[222]

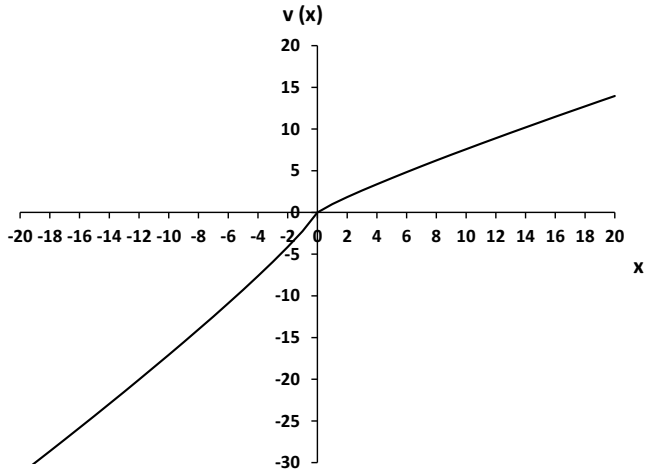


Abb. 2.12: Idealtypische Wertfunktion der Prospect-Theory. Quelle: Eigene Darstellung mit den Parametern $\alpha = \beta = 0{,}88$ und $\lambda = 2{,}25$.

Nach der Festlegung des Referenzpunktes und der Einordnung der Abweichungen ist die Zuweisung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zustände erforderlich. Dazu werden die Ergebnisse der Alternative so sortiert, dass an erster Stelle der Zustand mit den größten negativen Abweichungen steht und an letzter Stelle der Zustand mit der größten positiven Abweichung eingeordnet wird. Es wird eine Rangfolge der Ergebnisse gebildet, die neu nummeriert werden, so dass für die Ergebnisse x_q mit $q = 1,...,K$ gilt: $x_1 < x_2 < x_n < x_{n+1} ... < x_{K-1} < x_K$.[223]

Ziel des Akteurs ist nun die Maximierung des darauf basierenden Erwartungsnutzens. Dieser rangplatzabhängige Erwartungsnutzen besteht aus der Summe der gewichteten positiven und negativen Abweichungen wie folgt:[224]

$$EU_{PT} = \sum_{q=1}^{N} v(x_q) \cdot w^{-}(p_q) \; + \; \sum_{q=n+1}^{K} v(x_q) \cdot w^{+}(p_q)$$

[222] Vgl. Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 202–203).
[223] Diese Ordnung wird als Rangplatzordnung bezeichnet.
[224] Vgl. Klein/Scholl (2011: 445).

Die Gewichtungen $w^-(p_q)$ und $w^+(p_q)$ resultieren aus folgenden Definitionen:[225]

$$w^-(p_q) = g^-\left(\sum_{j=1}^{q} p_j\right) - g^-\left(\sum_{j=1}^{q-1} p_j\right) \; für \; q = 1,...,n$$

sowie

$$w^+(p_q) = g^+\left(\sum_{j=q}^{K} p_j\right) - g^+\left(\sum_{j=q+1}^{K} p_j\right) \; für \; q = n+1,...,K$$

Mit den Gewichtungsfaktoren g^- und g^+ wird die subjektive Einschätzung der Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Zustands abgebildet, wobei das Prinzip der abnehmenden Sensitivität gilt. Dies bedeutet, dass die Funktion im mittleren Bereich einen geringen Anstieg aufweist, während sie an den äußeren Enden einen starken positiven bzw. negativen Anstieg besitzt. Dies wird damit erklärt, dass reale Akteure sowohl den Übergang von der Unmöglichkeit zur Möglichkeit als auch von der quantitativen Wahrscheinlichkeit zur absoluten Sicherheit stärker bewerten als andere Zustände.[226]

Die Wahrscheinlichkeit positiver Abweichungen wird mit anderen Parametern gewichtet als die Wahrscheinlichkeit negativer Abweichungen. Es gelten:[227]

$$g^+(p) = \frac{p^\gamma}{\left[p^\gamma + (1-p)^\gamma\right]^{1/\gamma}} \qquad \text{sowie} \qquad g^-(p) = \frac{p^\delta}{\left[p^\delta + (1-p)^\delta\right]^{1/\delta}}$$

Beispiele dieser Funktionen sind in der Abbildung 2.13 dargestellt. Es wird deutlich, dass durch den realen Akteur geringe Wahrscheinlichkeiten höher gewichtet werden als mittlere und hohe Wahrscheinlichkeiten. Diese Gewichtungsfunktion erklärt das reale Entscheidungsverhalten besser als die Erwartungsnutzentheorie, da die Risikoneigung von der Höhe der erwarteten Gewinne/Verluste abhängt.

[225] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 426); Klein/Scholl (2011: 445).
[226] Vgl. Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 189).
[227] Vgl. Tversky/Kahneman (1992: 309); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 431).

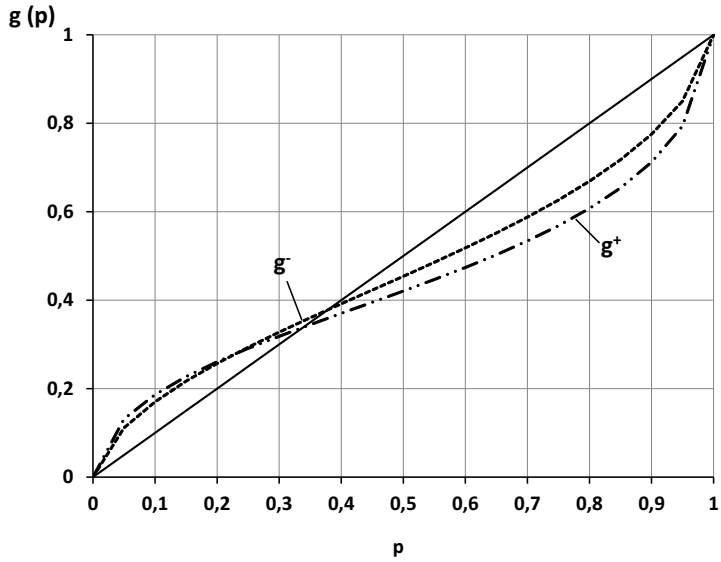


Abb. 2.13: Idealtypische Funktionen der Wahrscheinlichkeitsgewichtungen. Quelle: Eigene Darstellung mit den Parametern $\gamma = 0{,}61$ und $\delta = 0{,}69$.

Aufbauend auf der grafischen Darstellung der Wahrscheinlichkeitsgewichtungen kann die prototypische Risikoeinstellung realer Akteure gemäß der PT tabellarisch zusammengefasst bzw. klassifiziert werden (vgl. Tabelle 2.11).

Tab. 2.11: 4-Felder-Muster der Risikoeinstellung gemäß der Prospect-Theory. Quelle: Tversky/Fox (1995: 270).

	Gewinn	**Verlust**
Geringe Eintrittswahrscheinlichkeit	Risikofreudig	Risikoavers
Hohe Eintrittswahrscheinlichkeit	Risikoavers	Risikofreudig

Optimal entsprechend des Bewertungskalküls der PT ist diejenige Alternative, bei welcher der Wert des erwarteten rangplatzabhängigen Nutzens EU_{PT} maximal ist. Aus der bisherigen Darstellung wird ein weiteres Entscheidungskriterium deutlich: Wenn der Referenzpunkt aus der aktuellen Vermögensposition besteht, sind Alternativen mit einem negativen rangplatzabhängigen Nutzen absolut nicht vorteilhaft. Diese bieten im Vergleich zur aktuellen Position eine Verschlechterung und werden nicht realisiert.

Im Folgenden wird das Bewertungsbeispiel einer Alternative dargestellt (vgl. Tabelle 2.12). Die Wertfunktion $v(x_q)$ weist die bereits dargestellte Struk-

tur auf (vgl. Abb. 2.12 auf S. 340), mit den Parametern $\alpha = \beta = 0{,}88$ und $\lambda = 2{,}25$. Für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsgewichtungen wird die Ermittlungsvorschrift $g^-(p) = g^+(p) = \dfrac{p^\gamma}{[p^\gamma + (1-p)^\gamma]^{1/\gamma}}$ herangezogen, wobei $\gamma = 0{,}60$. Die betrachtete Alternative weist einen negativen erwarteten Nutzen aus und sollte deshalb nicht gewählt bzw. realisiert werden.

Tab. 2.12: Beispielhafte Ermittlung des Erwartungsnutzens der Prospect-Theory. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Eisenführ/Weber/Langer (2010: 426).

q	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
x_q	-10	-7	-3	-1	0	1	3	7	10
$v(x_q)$	-17,07	-12,47	-5,92	-2,25	0	1	2,63	5,54	7,59
p_q	0,05	0,10	0,05	0,25	0,10	0,25	0,05	0,10	0,05
	$\overbrace{\sum_{j=1}^{q} p_j}$				-	$\overbrace{\sum_{j=q}^{K} p_j}$			
	0,05	0,15	0,20	0,45	-	0,45	0,20	0,15	0,05
	$\overbrace{g^-\left(\sum_{j=1}^{q} p_j\right)}$				-	$\overbrace{g^+\left(\sum_{j=q}^{K} p_j\right)}$			
	0,1341	0,2277	0,2606	0,3909	-	0,3909	0,2606	0,2277	0,1341
	$\overbrace{g^-\left(\sum_{j=1}^{q} p_j\right) - g^-\left(\sum_{j=1}^{q-1} p_j\right)}$				-	$\overbrace{g^+\left(\sum_{j=q}^{K} p_j\right) - g^+\left(\sum_{j=q+1}^{K} p_j\right)}$			
$w^-(p_q)$	0,1341	0,0936	0,0329	0,1303	-	-	-	-	-
$w^+(p_q)$	-	-	-	-	-	0,1303	0,0329	0,0936	0,1341
$v(x_q) \cdot w^-(p_q)$	-2,2890	-1,1667	-0,1948	-0,2934	-	-	-	-	-
$v(x_q) \cdot w^+(p_q)$	-	-	-	-	-	0,1303	0,0866	0,5185	1,0173
$EU_{PT} = \sum_{q=1}^{N} v(x_q) \cdot w^-(p_q) + \sum_{q=n+1}^{K} v(x_q) \cdot w^+(p_q) = -3{,}9444 + 1{,}7532 = -2{,}1912$									

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die PT als empirisch fundierte und deshalb realitätsnahe Entscheidungstheorie eingestuft werden kann. Eine Reihe von Paradoxa kann mit der PT erklärt und prognostiziert werden.[228] Damit weisen die Erkenntnisse über den rein deskriptiven Bereich hinaus. Die PT ist jedoch nicht ohne Kritik und Ergänzungen geblieben.[229] Auf diese wird hier nicht detailliert eingegangen, stattdessen wird im nächsten Abschnitt ein alternativer bzw. konkurrierender Ansatz vorgestellt.

[228] Vgl. Camerer (2000: 289).

[229] Vgl. Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 217–232).

2.4.2 Probabilistische mentale Modelle

In Anlehnung an: Lidas Linsen-Modell von Brunswik[230] entstand das Konzept der **probabilistischen mentalen Modelle** (PMM).[231] Mit diesem Konzept wird Simon's Vorstellung von begrenzter Rationalität weiterentwickelt bzw. wieder aufgenommen.[232]

In Entscheidungssituationen unter Unsicherheit und bei Vorliegen von Informationsdefiziten kommt es vor, dass der Akteur ein PMM konstruiert und darauf aufbauende Heuristiken zur Entscheidungsfindung verwendet. Diese Heuristiken verfügen über eine große heuristische Kraft und zeichnen sich dadurch aus, dass sie einfach, schnell und robust sind.[233]

Interessant aus Sicht der Entscheidungstheorie ist der Umstand, dass einige Verhaltensweisen, die von Kahneman und Tversky als systematische Urteilsfehler klassifiziert wurden, als rational erklärt und zutreffend prognostiziert werden, so z. B. der Basisraten-Fehler, der Konjunktions-Fehler und der Effekt der Selbstüberschätzung. Dies liegt daran, dass im Fall des Heuristics-and-biases-Programms von Kahneman und Tversky, wie auch in der präskriptiven Entscheidungstheorie, mit **Wahrscheinlichkeiten** argumentiert wird. Diese können jedoch nicht von allen Personen fehlerfrei bzw. nur unzureichend verarbeitet werden. Werden anstelle der Wahrscheinlichkeiten jedoch **Häufigkeiten** verwendet, verschwinden einige der festgestellten Phänomene.[234]

Das Konzept PMM-basierter Heuristiken impliziert, dass eine Heuristik nicht per se rational oder irrational sein kann, sondern nur in Bezug auf eine bestimmte Umwelt, weshalb begrenzte Rationalität in diesem Zusammenhang als Umweltrationalität interpretiert wird.[235]

---

[230] Vgl. Abb. 2.2 auf S. 297.

[231] Vgl. Gigerenzer/Hoffrage/Kleinbölting (1991).

[232] Vgl. Simon (1990: 7).

[233] Vgl. Gigerenzer/Czerlinski/Martignon (2002); Goldstein/Gigerenzer (2002). Der Begriff robust bedeutet, dass sich Heuristiken auf neue Situationen übertragen lassen. Zum Begriff der heuristischen Kraft vgl. Kirsch (1971: 155–157).

[234] Zu diesen Phänomenen vgl. Abschn. 2.3.3 auf S. 327. Vgl. Gigerenzer (2005: 64); Richardson (1998: 573–574); Hertwig/Gigerenzer (1999); Brandstätter/Gigerenzer/Hertwig (2006); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 150–152). Zu einer kritischen Diskussion des PMM vgl. Kahneman/Frederick (2004).

[235] Vgl. Gigerenzer (2004: 390–402); Gigerenzer (2000: 57–58); Goldstein/Gigerenzer (2002). Der ursprüngliche Begriff der ökologischen Validität des Modells von Brunswik wurde später auf das Rationalitätskonstrukt übertragen. Der Begriff der Ökologie bezeichnet die natürliche Umwelt, also Flora, Fauna, Umweltmedien wie Luft, Wasser und Boden, weshalb ökologische Rationalität eine Rationalität in dieser Hinsicht bedeuten würde. Aus diesem Grund wird der englische Originalausdruck der „ecological rationality" mit dem weiter gefassten Begriff der Umweltrationalität übersetzt.

Der Prozess der menschlichen Entscheidungsfindung unter Zeitdruck und Unsicherheit ist durch eine selektive, weniger aufwendige Informationssuche und eine nicht-kompensatorische, heuristische Vorgehensweise gekennzeichnet. In verschiedenen Studien konnte gezeigt werden, dass Akteure in diesen Situationen einfache Entscheidungsheuristiken verwenden, die weniger kognitive Kapazität erfordern, aber in einer wesentlich kürzeren Bearbeitungszeit zu ähnlich guten, teilweise sogar zu besseren Schlussfolgerungen führen als vergleichsweise analytische Entscheidungsalgorithmen. Diese Heuristiken werden als schnell und frugal bezeichnet, wenn sie nur wenige Informationen benötigen, diese einfach zu verarbeiten sind und so schnelle und akkurate Urteile ermöglichen. Basis dieser Heuristiken ist ein PMM, das sich dadurch auszeichnet, dass:[236]

- es ein Netzwerk von alternativen Variablen in Ergänzung zur Zielvariablen nutzt,
- es auf eine Referenzklasse von ähnlichen Objekten zurückgreift,
- unbewusste Wahrscheinlichkeitsabgleiche auf Basis relativer Häufigkeiten durchgeführt und verwendet werden und
- der Akteur die Sicherheit, mit der er sich auf die Lösung verlassen kann, einordnen kann.

Gerade unter Zeitdruck führen diese Heuristiken ebenso zu einem vergleichbaren Anteil an zutreffenden Entscheidungen wie aufwendigere Vorgehensweisen, bei denen alle Informationen gesucht, integriert und für die Entscheidung berücksichtigt werden.[237]

Jede Heuristik setzt sich aus drei konstituierenden Komponenten zusammen, den sogenannten „building blocks“. Hierbei handelt es sich zum einen um Suchregeln, die präzisieren, in welcher Reihenfolge Informationen (Hinweisreize – cues) eingeholt werden, zweitens um Abbruchregeln, die festlegen, wann die Suche nach Informationen beendet wird, und abschließend um Entscheidungsregeln, die Aussagen darüber treffen, wie auf Grundlage der gewonnenen Informationen Entscheidungen getroffen werden. PMM-basierte Heuristiken schaffen einerseits einen Ausgleich zwischen Allgemeingültigkeit und Spezifität und zum anderen Robustheit durch die Fokussierung auf wenige und besonders starke Hinweisreize. Da eine Heuristik an spezifische Umweltbedingungen angepasst ist, kann sie schnelle und genaue Lösungen für diese Umgebung ermitteln.[238]

Vorgehensweise und Qualität umweltrationaler Heuristiken werden im Folgenden anhand der **Wiedererkennungs-Heuristik** und der **Take-the-Best-Heuristik** veranschaulicht. Die Wiedererkennungs-Heuristik ist ein Beleg dafür, dass Menschen selbst mit einem Minimum an Informationen

[236] Vgl. Gigerenzer/Hoffrage/Kleinbölting (1991: 507); Anderson (2013: 241–242).
[237] Vgl. Rieskamp/Hoffrage (1999: 164–167).
[238] Vgl. Todd/Gigerenzer (2003: 149–152).

korrekte Entscheidungen und Vorhersagen treffen können.[239] Die Heuristik basiert auf der Bekanntheit der zu beurteilenden Objekte, allerdings ohne zu wissen, wo das Objekt gesehen wurde oder was das Objekt bezeichnet. Dabei nutzt die Heuristik die kognitive Fähigkeit des Wiedererkennens von Objekten (z. B. Gesichtern, Namen) aus, wobei Wiedererkennung nicht mit dem Abruf semantischen oder episodischen Wissens gleichzusetzen ist.

Die Wiedererkennungs-Heuristik kann von Entscheidungsträgern angewandt werden, wenn zwischen zwei Objekten dasjenige ausgewählt werden soll, das einen höheren Wert bezüglich eines bestimmten Kriteriums aufweist. Dabei muss die Wiedererkennung mit diesem Kriterium korrelieren, um den Erfolg und damit die Umweltrationalität der Heuristik sicherzustellen. Die Heuristik des Wiedererkennens impliziert zudem das Phänomen des **„Less-is-more"-Effekts**. Dieser besagt, dass Entscheidungsträger mit einem höheren Maß an Unwissen mehr korrekte Entscheidungen treffen, als dies bei Menschen der Fall ist, die über einen höheren Wissensgrad verfügen. Insgesamt ist die Wiedererkennungs-Heuristik schnell und frugal, da neben der Fähigkeit der Wiedererkennung keine weiteren Fähigkeiten benötigt werden. Sie ist auf die Entscheidungsumwelt ausgerichtet, da sie von der Gegebenheit profitiert, dass die menschliche Fähigkeit etwas wiederzuerkennen, in vielen natürlichen Umgebungen mit dem Kriterium korreliert, welches erschlossen werden soll. Die Wiedererkennungs-Heuristik zeichnet sich dennoch durch ein hohes Maß an Gebietsspezifität aus, da sie nur in Umgebungen funktioniert, in denen eine Korrelation zwischen Wiedererkennen und gesuchtem Kriterium besteht. Darüber hinaus ist die Wiedererkennungs-Heuristik häufig nicht in der Lage, Entscheidungen zwischen zwei Objekten zu treffen, wenn besonders viele bekannte oder sehr wenige Objekte als Grundlage der Entscheidung dienen.

Eine Heuristik, die eingesetzt werden kann, wenn die Wiedererkennungs-Heuristik nicht verwendbar ist, ist die **Take-the-Best-Heuristik.** Ebenso wie die Wiedererkennungs-Heuristik begrenzt die Take-the-Best-Heuristik die Suche nach Informationen für Entscheidungsfindungen. Grundlegende Komponenten sind auch hier die schon beschriebenen „building blocks". Für die Alternativen werden zuerst Prädikatoren hinsichtlich ihrer inhaltlichen Validität geordnet und in dieser Reihenfolge abgefragt. Die Abbruchregel lautet: wenn eines der Objekte eine positive Merkmalsausprägung besitzt und ein anderes Objekt nicht oder diese unbekannt ist, dann wird die Suche beendet. Falls die Bedingung für den Abbruch nicht erfüllt ist, wird die Suche bei dem nächsten Prädikator weitergeführt. Die Entscheidung fällt auf das Objekt mit der positiven Merkmalsausprägung, da dieses den höheren Wert des gesuchten Kriteriums darstellt. Begrenzte Suche funktioniert bei dieser Heuristik also nach einer „Schritt-für-Schritt-Methode", bei der die Prädikatoren nacheinander abgeprüft werden, bis die Abbruchregel erfüllt ist. Im Vergleich zu klassischen, linear statistischen Methoden ist die Take-the-Best-Heuristik

[239] Vgl. Goldstein/Gigerenzer (1999: 35–38).

in der Lage, präzisere Vorhersagen und Entscheidungen zu treffen, obwohl die statistischen Methoden mehr Informationen benötigen und mehr Berechnungen anstellen. Czerlinski/Gigerenzer/Goldstein zeigen in detaillierten Computersimulationen deutliche Vorteile der Take-the-Best-Heuristik.[240] Eine Ursache hierfür wird in der Robustheit des Vorgehens gesehen, die insbesondere in Situationen mit begrenztem Wissen zum Tragen kommt. Ein weiterer Grund kann darin gesehen werden, dass in realen Umgebungen Informationsstrukturen auftreten können, die mit einfachen Heuristiken hoch korrelieren und mit diesen deshalb mindestens genauso gut oder besser abgebildet werden können wie mit komplexen statistischen Methoden.

Als problematisch gegenüber generalisierenden Modellen stellt sich jedoch für diese Heuristiken heraus, dass die Anwendbarkeit der gebietsspezifischen Lösungen begrenzt ist. Aufgrund dessen können verschiedene Umgebungen unterschiedliche Heuristiken begünstigen, die deren spezifische Informationsstrukturen auswerten und angepasste Entscheidungen treffen lassen. Durch diese Spezifität besteht die Gefahr, dass eine neue Heuristik benötigt würde, sobald sich das Entscheidungsumfeld minimal ändert. Dies würde zum einen zu einer unüberschaubaren Vielzahl an Heuristiken führen und zweitens könnten Verallgemeinerungen bei bisher noch nicht aufgetretenen Umweltsituationen nicht durchgeführt werden. PMM-basierte Heuristiken bewältigen dieses Problem durch ihre Einfachheit, die es ihnen ermöglicht, robust gegenüber Umweltveränderungen zu sein und gleichzeitig ein nötiges Maß an Allgemeingültigkeit zu gewährleisten.[241]

Dass es diesen Heuristiken gelingt, mindestens so genau zu sein wie komplexe Generalstrategien, die mit einer hohen Anzahl an freien Parametern arbeiten, kann damit begründet werden, dass erstgenannte nicht zu spezifisch sind. Gigerenzer beschreibt in diesem Zusammenhang das Phänomen des „overfitting“, das von der Annahme ausgeht, dass jedes Detail von besonderer Relevanz ist und zu einem Scheitern der Verallgemeinerung führt. PMM-basierte Heuristiken können das Problem der „Überanpassung“ dadurch reduzieren, dass sie sich lediglich auf systematische informative Hinweisreize konzentrieren, während sie variable uninformative Hinweise ignorieren. Dies befähigt sie dazu, Robustheit gegenüber Umweltveränderungen hervorzubringen und diese ohne Verminderung der Leistungsfähigkeit zu überstehen. Der Ansatz der Umweltrationalität überwindet damit die Annahme, dass eine größere Menge an Informationen und die damit verbundenen Berechnungen zu präziseren Schlussfolgerungen und Fundierungen von Entscheidungen führen.

[240] Vgl. Czerlinski/Gigerenzer/Goldstein (1999).

[241] Vgl. Gigerenzer/Todd (1999).

So wird die Take-the-Best-Heuristik herangezogen, um einige Phänomene der intertemporalen Entscheidungsfindung zu erklären.[242] Diese Phänomene sind an anderer Stelle erläutert.[243]

Von grundlegender Bedeutung für die Qualität der Entscheidungen ist die Konstruktion eines PMM, das auf die Spezifika der Entscheidungssituation ausgerichtet ist.[244] Akteure verwenden in unterschiedlichen Entscheidungssituationen unterschiedliche PMM-basierte Heuristiken.[245] Die lediglich teilweise bekannte Problemstruktur eines gegebenen Problems wird auf einen Problemraum mit bekannter Grundstruktur projiziert. Die Möglichkeit dieser Transformation muss erkannt und abgerufen werden. Die Abstraktion von konkreten Struktureigenschaften des gegebenen Problems und dessen allgemeine Auffassung als Vertreter einer bekannten Problemklasse wird zur wesentlichen Voraussetzung zum Auffinden der Transformationsregeln.[246] Die erfolgreiche Problemlösung mittels PMM-basierter Heuristiken sowie das Erkennen und Übertragen von Strukturen der Entscheidungssituationen wird vom Akteur erlernt.[247] Als Beispiel wird das Entscheidungsverhalten eines Experten im Vergleich zu dem eines Novizen angeführt. Das höhere Maß an Erfahrung des Experten führt nicht dazu, dass bessere Entscheidungen aufgrund von mehr verwendeten Informationen getroffen werden. Vielmehr sind Experten eher in der Lage, relevante von irrelevanten Hinweisreizen zu unterscheiden und treffen auf diese Weise bessere Entscheidungen.

Kritik erfährt das Konzept der Umweltrationalität vor allem dahingehend, dass umstritten ist, ob und unter welchen Bedingungen die schnellen und frugalen Heuristiken tatsächlich von Individuen angewandt werden. So stellen z. B. Bröder und Eichler die nicht-kompensatorische Natur der Wiedererkennungs-Heuristik in Frage. Ihrer Meinung nach verwundert es nicht, dass die Wiedererkennung ein besonderes Kriterium im Entscheidungsprozess darstellt, da per Definition für unbekannte Objekte keine weiteren Hinweisreize zur Verfügung stehen. Jedoch kann ihrerseits nicht bestätigt werden, dass das Wiedererkennen als nicht-kompensatorisches Kriterium fungiert, da bei der Nutzung der Wiedererkennungs-Heuristik im Rahmen der Auswahl zwischen zwei Objekten oftmals weitere Informationen zur Entscheidungsfindung eingeholt werden. Auch bleibt zu überprüfen, ob schnelle und frugale Heuristiken zu systematischen Fehlern führen.[248]

---

[242] Vgl. Ghisellini/Chang (2018: 166–169).

[243] Vgl. Abschn. 1.7.3 auf S. 214.

[244] Vgl. Gigerenzer/Hoffrage/Goldstein (2008: 234).

[245] Vgl. Gigerenzer/Hoffrage/Kleinbölting (1991); Pfister/Jungermann/Fischer (2017: 143).

[246] Vgl. Klix (1976: 721–724).

[247] Vgl. Boyd/Richardson (2001: 284–287); Laland (2001: 244–245); Goldstein et al. (2002: 180–181).

[248] Vgl. Bröder (2001: 159–161); Hertwig/Hoffrage (2001: 162–164); Bröder/Eichler (2006).

An dieser Stelle leistet das Konzept der Umweltrationalität von PMM einen Beitrag, indem es die Verwendung mentaler Modelle als effizient erkennt und damit der Soll-Rationalität zuordnet.[249] Aus den diskutierten Studien lassen sich Schlussfolgerungen über die Nutzung von mentalen Modellen ableiten, die auch normativen Charakter aufweisen. Entscheidungen auf Basis mentaler Modelle können vor diesem Hintergrund auf Rationalität, als Umweltrationalität interpretiert, untersucht werden und es können Vorgaben zur Realisierung umweltrationaler Entscheidungen gemacht werden.

2.4.3 Modelle für zeit(in)konsistente Entscheidungen

2.4.3.1 Grundlegende Begriffe

Vor dem Hintergrund der Erläuterungen zu den Begriffen „Stationarität", „Zeitkonsistenz" und „Zeitinvarianz"[250] muss festgestellt werden, dass die Bezeichnung „zeitinkonsistente Entscheidung" inkonsistent ist. Das liegt daran, dass nicht die Zeitkonsistenz[251] verletzt wird, sondern die **Stationarität**[252]. Korrekterweise müsste die Bezeichnung deshalb „nichtstationäre Entscheidung" sein. Im weiteren Verlauf wird jedoch die umgangssprachliche Variante „zeitinkonsistente Entscheidung" verwendet und es werden entsprechende Modellierungsansätze vorgestellt. Dabei wird folgende Notation verwendet:

- Der zukünftige Zeitraum wird durch die Menge der Zeitpunkte $Z = \{0,1,2,3,...,\tau,...,N\}$ mit $t \in Z$ beschrieben.
- Die Bewertung eines zukünftigen Nutzens aus heutiger Sicht erfolgt durch die **Diskontierungsfunktion** bzw. Diskontfunktion $f(t)$.
- Der im Zeitpunkt $t = 0$ bewertete Nutzen des zukünftigen Konsums $u_t(c_t)$ wird damit wie folgt ermittelt: $u_0(c_t) = f(t) \cdot u_t(c_t)$.
- Der Wert der Diskontierungsfunktion $f(t)$ für einen bestimmten Zeitraum wird umgangssprachlich als **Diskontierungsfaktor** bezeichnet.
- Das Verhältnis der Diskontierungsfaktoren zwischen zwei Zeitpunkten ist die Diskontrate $\Delta(t)$ (vgl. Def. 2.1).[253]

  Definition 2.1: *Die Diskontrate $\Delta(t)$ ergibt sich in stetiger Zeit aus:* $\Delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ *und in diskreter Zeit aus:* $\Delta(t) = \frac{-[f(t+1) - f(t)]}{f(t+1)}$.

[249] Vgl. Hoffrage/Hertwig/Gigerenzer (2005: 86).
[250] Vgl. Abschn. 1.7.2 auf S. 188.
[251] Vgl. Def. 1.51 auf S. 200.
[252] Vgl. Def. 1.7.6 auf S. 203.
[253] Vgl. Laibson (1997: 450); Huber/Runkel (2005: 76).

- Die Diskontierungsfunktion $f(t)$ modelliert die individuelle **Zeitpräferenzrate** als Funktion der Zeit. Die individuelle Zeitpräferenzrate für den Konsum zwischen zwei Zeitpunkten wird mit p bezeichnet. Dieser Faktor wird an anderer Stelle hergeleitet und beschrieben.[254] Wenn Finanzanlagen betrachtet werden würden und eine Periode einem Jahr gleichen würde, entspräche dies dem jährlichen Zinssatz.
- Für einen Akteur mit Gegenwartspräferenz gilt $p > 0$. Der Akteur ist dann ungeduldig.[255] Verfügt der Akteur über Zukunftspräferenz, so gilt $p < 0$. Ist der Akteur indifferent, folgt $p = 0$.

Damit die Unterschiede zwischen zeitkonsistenten und zeitinkonsistenten Entscheidungen besser herausgestellt werden können, erfolgt im nächsten Abschnitt die Vorstellung des Modells der rationalen intertemporalen Entscheidung.

2.4.3.2 Eigenschaften des rationalen Modells

Die Anforderungen an rationale intertemporale Entscheidungen[256] führen zum Modell des exponentiellen Diskontierens. Dieses ist das einzige Modell, welches zeitkonsistente Entscheidungen sicherstellt.[257] Deshalb impliziert die Annahme des homo oeconomicus exponentielles Diskontieren und vice versa. Diese Standardform der Diskontierung (vgl. Def. 2.2) wurde frühzeitig entwickelt.[258]

Definition 2.2: *Die exponentielle Diskontierungsfunktion $f_E(t)$ ist bei zeitstetiger Darstellung definiert durch: $f_E(t) = \left[\frac{1}{e^p}\right]^t$, mit $p > 0$.*

Die übliche Darstellung aus Def. 2.2 ist $f_E(t) = e^{-p \cdot t}$. Zeitdiskret wird formuliert: $f_E(t) = \frac{1}{(1+p)^t} = (1+p)^{-t}$. Bei der stetigen Modellierung muss die stetige Zeitpräferenzrate verwendet werden und bei der diskreten Formulierung die entsprechende diskrete Variante. Wenn Finanzanlagen auf einem vollkommenen Kapitalmarkt sowie ein vollkommen rationaler Akteur betrachtet werden würden, entspräche dies dem diskreten und dem stetigen Zinssatz.[259]

---

[254] Vgl. Herleitung und Gleichung 12 auf S. 183.

[255] Vgl. Anf. 1.7.7 auf S. 205.

[256] Vgl. Merksatz 1.17 auf S. 204.

[257] Vgl. Strotz (1955/56: 172); Beck (2014: 214).

[258] Vgl. Samuelson (1937) sowie Merksatz 1.18 auf S. 205. Die finanzmathematischen Grundlagen der Diskontierung sind wesentlich älteren Datums. Die ersten Ideen bzw. heute noch gebräuchlichen Grundlagen stammten von Leibniz im 17. Jahrhundert. Vgl. Brockhoff (2021: 127–129). Samuelson präsentierte jedoch mit seinem Entwurf eine Theorie des diskontierten Nutzens.

[259] Vgl. 1. Band, Merksatz 3.3 auf S. 217 zur Beziehung zwischen diesen Zinssätzen.

Das führt zu folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} f_E(t) &= e^{-t \cdot p_{stetig}} \\ &= \left[e^{-ln(1+p_{diskret})}\right]^t \\ &= \left[\frac{1}{1+p_{diskret}}\right]^t \\ &= \delta^t \end{aligned}$$

Damit kann eine exponentielle Diskontierungsfunktion in allgemeiner Form beschrieben werden (vgl. Def. 2.3).

Definition 2.3: *Eine Funktion* $f_A(t) = \delta^t$ *für* $0 < \delta < 1$ *ist eine exponentielle Diskontierungsfunktion in allgemeiner Form.*

Exponentielles Diskontieren ist das Standardverfahren in sämtlichen Lehrbüchern zur Investitionsrechnung. Es ist am weitesten verbreitet und besonders für finanzwirtschaftliche Problemstellungen typisch, da die vorliegenden Ergebnisse aus **Zahlungen** bestehen. Im exponentiellen Modell folgt die Diskontrate $\Delta_E(t)$ aus:

$$\begin{aligned} \Delta_E(t) &= \frac{-f'_E(t)}{f_E(t)} \\ &= p \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Diskontrate bleibt bei variierenden Zeiträumen konstant. Ein anschauliches Beispiel bietet die Diskontierung von Zahlungen auf dem vollkommenen Kapitalmarkt. In diesem Fall wird die Diskontrate durch den – einheitlichen und im Zeitverlauf unveränderlichen – Zinssatz ausgedrückt.

Für eine Erklärung der unveränderlichen Diskontrate werden kurz die Grundlagen der exponentiellen Bewertung rekapituliert.[260] Die Grundstruktur für die heutige Bewertung des Gesamtnutzens U_0 einer Reihe von Ergebnissen x_i in den zukünftigen Perioden $i = 1,2,3,...,N$ und den Gewichtungsfaktoren für die Perioden g_i ist folgende:[261]

$$U_0 = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + g_3 \cdot x_3 + ... + g_N \cdot x_N = \sum_{i=1}^{N} g_i \cdot x_i.$$

Das Verhältnis der Gewichte bleibt konstant, da dies den Austauschraten zwischen den Zeitpunkten entspricht:

[260] Vgl. Abschn. 1.7.2.4 auf S. 208–214 sowie Fishburn (1979: 93–96); French (1988: 128–134).

[261] Dabei wird eine lineare Nutzenfunktion der Form $u(x_i) = x_i$ angenommen.

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2} = ... = \frac{g_N}{g_{N-1}} = \frac{g_{i+1}}{g_i} = konstant = \lambda$$

Der Faktor λ wird standardmäßig folgendermaßen festgelegt: $\lambda = \frac{1}{1+p} > 0$. Das führt zur bekannten Bestimmungsgleichung des Gesamtnutzens U_0:[262]

$$U_0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda^{i-1} \cdot x_i.$$

Der Faktor λ ist für diese lineare Gleichung konstant. Das Gewicht der Ereignisse λ^{i-1} jedoch nimmt mit zunehmender Entfernung vom ersten Glied ab. Auf dieser Basis ergibt sich die bekannte geometrische Reihe. Diese Modellierung basiert auf einer linearen Nutzenfunktion des Akteurs, also auf einer **linearen Zeitbewertung**.[263]

Üblicherweise wird in der Literatur zur Investitionsrechnung im Exponenten die zeitliche Distanz der Periode vom heutigen Zeitpunkt aus gemessen und mit t bezeichnet. Der heutige Zeitpunkt wird auf $t = 0$ und die letzte Periode auf $t = N$ gesetzt. Das führt zu der gebräuchlicheren Darstellung:[264]

$$U_0 = \sum_{t=0}^{N} \lambda^t \cdot x_t$$

mit $\lambda = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{q}$ folgt:

$$= \sum_{t=0}^{N} q^{-t} \cdot x_t$$

Mit der Verwendung dieser Funktion werden implizit konstante Grenzraten der intertemporalen Substitution und damit lineare Indifferenzkurven angenommen.[265] Das Verhältnis der Gewichte zwischen allen Perioden ist beim exponentiellen Modell deshalb **konstant**. Das heißt: Das Verhältnis der Diskontierungsfaktoren – also die **Diskontrate** – zwischen den Perioden bleibt konstant. Dies gilt für alle Perioden des Betrachtungszeitraumes. Die konstante Diskontrate ist eine Konsequenz aus:

- der wechselseitigen Unabhängigkeit,[266]
- der Stationarität[267] sowie
- einer linearen Nutzenfunktion des Akteurs.

[262] Vgl. Streich/Levy (2007: 201); Bleichrodt et al. (2015: 1422); Anchugina (2017: 192).
[263] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 347).
[264] Vgl. Samuelson (1937: 156); Bleichrodt et al. (2015: 1421).
[265] Vgl. auch die Ausführungen zur Grenzrate der intertemporalen Substitution im Abschn. 1.7.1 auf S. 181.
[266] Vgl. Axiom 1.7.5 auf S. 195 und Bspl. 1.19 auf S. 195.
[267] Vgl. Def. 1.50 auf S. 198, Axiom 1.7.6 auf S. 203 und Bspl. 1.20 auf S. 199.

Die ersten beiden Anforderungen sind – neben anderen Prämissen[268] – grundlegende Anforderungen an rationales intertemporales Entscheiden. Die lineare Nutzenfunktion ist eine weit verbreitete Standardprämisse. Die Diskontrate $\Delta(t)$ in Def. 2.1 verkörpert das Maß der **Ungeduld**. Die Eigenschaften Stationarität und Ungeduld sind jedoch unabhängig voneinander. Stationarität kann sowohl mit der Ungeduld als auch mit der gegenteiligen Eigenschaft kombiniert werden. Ungeduld ist weder notwendig noch hinreichend für die exponentielle Diskontierung.[269] Die Ungeduld grenzt den Faktor λ auf den Bereich $0 < \lambda \leq 1$ ein.

Schon bei Entwicklung der exponentiellen Nutzendiskontierung wurde auf den eher theoretischen Charakter dieser Modellierung hingewiesen.[270]

Die exponentielle Diskontierungsfunktion weist die folgende Eigenschaft auf: $f_E(t) = f(0;\tau) \cdot f(\tau;N)$. Darin beschreibt $f(0;\tau)$ den Faktor für die Diskontierung vom Zeitpunkt $t = \tau$ auf den Zeitpunkt $t = 0$. Der Term $f(N;\tau)$ bezeichnet den Faktor für die Diskontierung vom Zeitpunkt $t = N$ auf den Zeitpunkt $t = \tau$. Diese Eigenschaft wird als **Additivität** bezeichnet (vgl. Eigenschaft 2.4.1).[271]

Eigenschaft 2.4.1: *Eine Diskontierungsfunktion $f(t)$ ist additiv, wenn gilt: $f(0;N) = f(0;\tau) \cdot f(\tau;N)$ für alle $\tau, N > 0$.*

Das ist eine – aus finanzmathematischer Sicht triviale – Grundlogik des exponentiellen Diskontierens: Die Höhe des Bar- bzw. des Endwertes ist **unabhängig** davon, in wie viele Intervalle der Zeitraum unterteilt wird. Wenn dieselbe Art der Verzinsung gewählt wird (z. B. zeitdiskret oder zeitstetig),[272] dann muss das Ergebnis identisch sein, egal in wie vielen "Teilschritten" es ermittelt wird. Wird z. B. ein Betrag von $t = 0$ auf $t = 10$ mit der Präferenzrate p aufgezinst, so kann dies direkt erfolgen. Oder der Zeitraum von 10 Jahren wird in zwei gleichlange Intervalle zerlegt und der Betrag wird erst von $t = 0$ bis $t = 5$ aufgezinst und im Anschluss daran von $t = 5$ auf $t = 10$. Es gilt in zeitdiskreter Form: $(1+p)^{10} = (1+p)^5 \cdot (1+p)^5 = (1+p)^{5+5}$. Auch bei Verwendung der zeitstetigen Formulierung und bei anderen Varianten der Unterteilung des Gesamtzeitraumes bleibt die Identität der Ergebnisse erhalten. Der Begriff der Additivität beschreibt also nichts anderes als eine Rechenregel für Potenzen.

Für die weitere Erläuterung wird zusätzlich zur bereits definierten Menge von Zeitpunkten Z mit $t \in Z$ die Existenz einer Menge von Einzahlungen E

[268] Vgl. Merksatz 1.17 auf S. 204.

[269] Vgl. Fishburn/Edwards (1997: 153); Bleichrodt et al. (2015: 1422).

[270] *„The idea that the results of such a statistical investigation could have any influence upon ethical judgments of policy is one which deserves the impatience of modern economists."* Samuelson (1937: 161).

[271] Vgl. Read (2001: 7–8); Scholten/Read (2006: 1427); Rambaud/Fernández (2020: 3).

[272] Vgl. 1. Band, Abschn. 3.3.3 auf S. 210.

mit $E = \{x_t, y_t, z_t\}$ angenommen. Weiterhin wird postuliert, für einen Akteur gilt: $x_0 \sim y_N$. Bei transitiven Präferenzen muss es auch eine Zahlungsgröße z geben, so dass gilt: $x_0 \sim z_\tau \sim y_N$. Die absolute Diskontierung zwischen x_0 und y_N ergibt sich daraus mit: $x_0 = y_N \cdot f(0;N)$. Der Term $f(0;N)$ fungiert demzufolge als Diskontierungsfaktor und spiegelt die intertemporale Austauschrate zwischen den Zahlungen zu den Zeitpunkten $t = 0$ sowie $t = N$ wider.[273] Die Austauschrate zwischen z_τ und y_N folgt mit: $z_\tau = y_N \cdot f(\tau;N)$ und bezieht sich auf die Zeitpunkte $t = \tau$ und $t = N$. Die Austauschrate zwischen den Zahlungen der Zeitpunkte $t = 0$ und $t = \tau$ folgt mit: $x_0 = z_\tau \cdot f(0;\tau)$. Damit kann die Eigenschaft der **Additivität** von Präferenzen formuliert werden (vgl. Eigenschaft 2.4.2).

Eigenschaft 2.4.2 (Additivität): *Die Präferenzrelation auf $E \times Z$ ist additiv, wenn für einen Akteur mit: $x_0 \sim y'_N$, $x_0 \sim z_\tau$ sowie $z_\tau \sim y_N$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt: $y = y'$ für alle $x, y, y', z \in E$ und alle $\tau, N \in Z$.*

Additivität drückt aus, dass sich die Summe der Teilintervalle zum Gesamtzeitraum addiert. Diese Eigenschaft ist ein Ausdruck zeitkonsistenter Entscheidungen und folgt aus der Stationarität.

Bevor die mathematischen Diskontierungsmodelle zur Abbildung von Zeitinkonsistenz erläutert werden, soll kurz ein eher psychologischer Vorschlag zur Vermeidung von zeitinkonsistenten Präferenzen vorgestellt werden. Strotz beginnt seinen – mittlerweile – Klassiker mit einem Zitat aus der Odyssee als Lösungsvorschlag zur Erreichung von zeitkonsistenten Präferenzen.[274] In diesem Zitat wird die Passage der Insel der Sirenen geschildert. Odysseus bittet vor der Passage darum, gefesselt zu werden, damit er nicht einer Versuchung erliegt, die schon jetzt bekannt ist, aber erst zu einem späteren Zeitpunkt eintritt. Gleichzeitig bittet er, auch zum Zeitpunkt des Eintretens der Versuchung nicht – auch auf seine gegenteilige Bitte hin nicht – befreit, sondern noch stärker gefesselt zu werden. Mit dieser Metapher schlägt Strotz das Konzept der **Selbst-Bindung** vor. Ein rationaler Akteur kann seine Präferenzen schon zum heutigen Zeitpunkt definieren und kennt darüber hinaus heute schon die Schwierigkeiten, die sein zukünftiges Ich mit den – vom heutigen Ich festgelegten – Vorsätzen haben wird. Diese Idee wird von Thaler unter dem Begriff der **Selbst-Steuerung** (*Self-control*) aufgenommen.[275] Das Heute-Ich steuert quasi das Zukunfts-Ich. Als Beispiel wird ein Akteur betrachtet, der zum Zweck der Diät am Abend nicht mehr essen darf. Mit dem Konzept der Selbst-Steuerung besteht der einfachste Weg darin, schon Mittags dafür zu sorgen, dass Abends kein Essen verfügbar ist. In der Weiterentwicklung dieser Idee entstand das Konzept des *Nudging*, um Akteuren durch Anreize ein zeitkonsistentes Verhalten zu ermöglichen.

[273] Vgl. Abschn. 1.7.1 auf S. 181.
[274] Vgl. Strotz (1955/56: 165).
[275] Vgl. Thaler (1980: 54–55); Thaler/Shefrin (1981).

2.4.3.3 Hyperbolisches Diskontieren

In vielen Experimenten wurde gezeigt, dass Akteure oftmals hyperbolisch diskontieren.[276] Damit wird der *Immediacy-Effekt* bzw. *Unmittelbarkeits-Effekt* oder *present focus bias* abgebildet, der zu Phänomenen führt, die umgangssprachlich als *„Aufschieberitis“*, *„Prokrastination“* bzw. *„mañana-Effekt“* bezeichnet werden.[277]

Anders als im exponentiellen Modell, in dem die Zeit linear wahrgenommen wird, geht der Faktor Zeit beim hyperbolischen Diskontieren **logarithmisch** in die individuelle Nutzenbewertung ein. Je weiter ein Intervall in der Zukunft liegt, umso kürzer wird es wahrgenommen.[278] Für die exponentielle Diskontierung sind viele Modelle entwickelt worden. Eine spezielle und besonders einfache Form der hyperbolischen Diskontierung beschreibt Def. 2.4.[279]

Definition 2.4: *Die hyperbolische Diskontierungsfunktion in einfacher Variante folgt aus:* $f_H(t) = \frac{1}{1+p\cdot t}$.

Ein Vergleich mit der exponentiellen Diskontierungsfunktion in zeitdiskreter Formulierung $f_E(t) = \frac{1}{(1+p)^t}$ zeigt den Unterschied. Das Verhältnis der Gewichte – also die Diskontrate – bleibt im hyperbolischen Modell nicht konstant. Mit zunehmender Zeit wird das **Verhältnis** der Gewichte **geringer**. Das Maß der Ungeduld nimmt ab. Das wird bei einem Blick auf die Diskontrate im hyperbolischen Modell nach Def. 2.4 deutlich:

$$\begin{aligned}\Delta_H(t) &= \frac{-[f_H(t+1) - f_H(t)]}{f_H(t+1)} \\ &= \frac{p}{1+p\cdot t}\end{aligned}$$

Das führt zu folgendem Effekt: Wenn ein Akteur heute, also in $t = 0$ ein Ereignis bewerten soll, was sich in $t = 2$ befindet, so ist die Bewertung dieses zweijährigen Zeitunterschiedes viel größer, als wenn der Akteur in $t = 10$ ein Ereignis bewerten soll, was sich in $t = 12$ befindet. Der **Zeitpunkt** der Bewertung bestimmt demzufolge den Wert der **Zeitdifferenz**. Wenn der Akteur durch die – von ihm so wahrgenommene – Zeit reisen würde, nimmt der Wert von Zeitdifferenzen immer weiter ab. Irgendwann wäre die Zukunft genauso

[276] Vgl. die Literatur in Fußnote 192 auf S. 334 sowie Bleichrodt/Johannesson (2001); van der Pol/Cairns (2002); Zauberman et al. (2009); Strulik/Trimborn (2018); Strulik (2021a); Strulik (2021b).

[277] Vgl. Strotz (1955/56: 173); Keren/Roelofsma (1995); Weber/Chapman (2005: 105–106).

[278] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 351).

[279] Vgl. Gibbon (1977: 282–284); Mazur (1987: 58); Mazur (1997: 133); Takemura (2021: 218). Für weitere mögliche hyperbolische Diskontierungsfunktionen wird auf die umfangreiche Literatur verwiesen. Vgl. Scholten/Read (2006: 1425); Takemura (2021: 218–221).

wichtig, wie die Gegenwart. Das Problem besteht jedoch darin, dass der Akteur nicht durch diese von ihm imaginierte Zeit reisen kann. Deshalb fallen ihm diese Bewertungsunterschiede auch nicht auf.

Das ist exakt der Effekt, den KOOPMANNS mit der Einführung der Stationarität vermeiden wollte.[280] Der Wert von Zeitdifferenzen muss für einen rationalen Akteur unabhängig vom Zeitpunkt der Bewertung sein. Das Maß der Ungeduld – also die Diskontrate – muss im Zeitablauf konstant sein.

Die zeitliche Nähe der Ereignisse bewirkt eine relativ stärkere Diskontierung von Ereignissen in der nahen Zukunft. Ereignisse die in weiterer Zukunft liegen, werden – in Relation dazu – weniger stark diskontiert. Beispiel 2.7 erläutert den Effekt.

Beispiel 2.7:

Es wird angenommen, ein Akteur fasst in $t=0$ den Vorsatz, mit dem Rauchen aufzuhören. Der mentale Aufwand dafür wird durch den Faktor A verkörpert. Seine persönliche Zeitpräferenzrate p beträgt 10% pro Jahr. Die hyperbolische Diskontierung für die nächsten fünf Perioden führt mit Def. 2.4 zu den Werten in Tab. 2.13.

Tab. 2.13: Entwicklung der hyperbolischen Diskontierungsfaktoren. Quelle: Eigene Darstellung.

Zeitpunkt t	**Wert des Aufwands zum heutigen Zeitpunkt $u_0(A_t)$**
t=0	$u_0(A_0) = 1 \cdot A_0$
t=1	$u_0(A_1) = \frac{1}{1+0{,}1 \cdot 1} \cdot A_1 \approx 0{,}909 \cdot A_1$
t=2	$u_0(A_2) = \frac{1}{1+0{,}1 \cdot 2} \cdot A_2 \approx 0{,}833 \cdot A_2$
t=3	$u_0(A_3) = \frac{1}{1+0{,}1 \cdot 3} \cdot A_3 \approx 0{,}769 \cdot A_3$
t=4	$u_0(A_4) = \frac{1}{1+0{,}1 \cdot 4} \cdot A_4 \approx 0{,}714 \cdot A_4$
t=5	$u_0(A_5) = \frac{1}{1+0{,}1 \cdot 5} \cdot A_5 \approx 0{,}667 \cdot A_5$

Der Wert des mentalen Aufwands ist im ersten Jahr am größten und sinkt in den Folgejahren. Diese Reduktion ist in den ersten Jahren am größten und sinkt in den folgenden Perioden. Das führt dazu, dass die Differenz von zwei Perioden, die weiter in der Zukunft liegen (z. B. zwischen $t=4$ und $t=5$) als geringer eingeschätzt wird, verglichen mit der Differenz zwischen früheren Perioden (z. B. zwischen $t=0$ und $t=1$ oder $t=2$). Als Konsequenz wird das Vorhaben aufgeschoben.

Bei der Vorstellung der Axiome für die exponentielle Diskontierung wurde die **Stationarität** als eine der wichtigsten, aber auch zugleich restriktivsten An-

[280] Vgl. Bspl. 1.20 auf S. 199.

forderungen herausgestellt.[281] Im Fall des hyperbolischen Diskontierens ist Stationarität der Präferenzen nicht erforderlich. Dieser – scheinbare – Vorteil wird dadurch erkauft, dass die Eigenschaft der **Zeitkonsistenz**[282] nicht erfüllt wird. Das ist wiederum eine definitionslogische Konsequenz: Die Stationarität beschreibt die Unveränderlichkeit der Präferenzen bei Verschiebungen der Zeitpunkte zueinander.[283] Es wurde gezeigt, dass die Stationarität sowohl Zeitinvarianz als auch Zeitkonsistenz impliziert.[284] Wenn die Präferenzen nicht unveränderlich sind, kann demzufolge keine Zeitkonsistenz erfüllt werden. Die Stationarität der Präferenzen impliziert die **absolute Zeitkonstanz** derselben. Zur Erläuterung werden wiederum die Menge von Einzahlungen $E = \{x_t, y_t\}$ und die Menge an Zeitpunkten $Z = \{0,1,...,\lambda,\tau,...,N\}$ mit $t \in Z$ herangezogen (vgl. Eigenschaft 2.4.3).[285]

Eigenschaft 2.4.3 (Absolute Zeitkonstanz): *Die Präferenzrelation auf* $E \times Z$ *ist absolut zeitkonstant, wenn für einen Akteur mit* $x_\lambda \sim y_\tau$ *gilt:* $x_{\lambda+b} \sim y_{\tau+b}$ *für alle* $x, y \in E$*, für alle* $\lambda, \tau \in Z$ *und alle* $b > 0$*.*

Die Präferenzen bleiben demzufolge bei einer beliebigen, positiven Verschiebung der Zeitpunkte konstant. Dies ist auch die Grundaussage der *Stationarität*, weshalb beide Eigenschaften äquivalent sind. Absolute Zeitkonstanz konserviert die Präferenzen für ewige Zeit. Das impliziert darüber hinaus die Unabhängigkeit der Zeitpräferenz vom Alter und Geburtsjahr des Akteurs sowie die Unveränderlichkeit der Präferenzen im Zeitverlauf.[286] Speziell bei der Untersuchung von Entscheidungen im Lebensverlauf von Akteuren ist diese Prämisse problematisch.

Anstelle der Stationarität bzw. absoluten Zeitkonstanz erfordern die Modelle des hyperbolischen Diskontierens lediglich **relative Zeitkonstanz**. Diese beschreibt die Konstanz der Präferenzen bei Streckung der Zeitreihe und wird in Eigenschaft 2.4.4 formuliert.[287]

Eigenschaft 2.4.4 (Relative Zeitkonstanz): *Die Präferenzrelation auf* $E \times Z$ *ist relativ zeitkonstant, wenn für einen Akteur mit* $x_\lambda \sim y_\tau$ *gilt:* $x_{\lambda+m\cdot(\lambda+b)} \sim y_{\tau+m\cdot(\tau+b)}$ *für alle* $x, y \in E$*, alle* $\lambda, \tau \in Z$ *sowie für alle* $m, b > 0$*.*

Diese Eigenschaft fordert, dass die Präferenz nur von der **Relation** bzw. der relativen Lage der Zeitpunkte abhängt. Wenn ein Akteur indifferent ist

[281] Vgl. Anf. 1.7.6 auf S. 203.

[282] Vgl. Def. 1.51 auf S. 200.

[283] Vgl. Bspl. 1.22 auf S. 201.

[284] Vgl. Halevy (2015: 341–342); Millner/Heal (2018: 162). Diese drei Eigenschaften werden anhand des Beispiels 1.23 auf S. 202 erläutert.

[285] Vgl. Harvey (1995: 388–389).

[286] Vgl. Strulik/Trimborn (2018: 47).

[287] Vgl. Harvey (1986: 1129); Harvey (1995: 390); Bleichrodt/Johannesson (2001: 270); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 352–353).

zwischen dem Erhalt einer Zahlung x in $t = 0$ ($x_{\lambda=0}$) und einer Zahlung y in $t = 10$ ($y_{\tau=10}$), so müsste aus dieser Beziehung auch die Indifferenz zwischen einer Zahlung x in $t = 50$ ($x_{0+5\cdot(0+10)}$) und der Zahlung y in $t = 110$ ($y_{10+5\cdot(10+10)}$) resultieren.

Bei realen Akteuren verändert sich das Maß der Ungeduld im Zeitablauf. Damit verändert sich auch das Verhältnis der Periodengewichte, also der **Diskontrate**.[288] Je größer t ist, desto weiter in der Zukunft liegt das zu bewertende Ereignis. Ein hoher Wert von t führt zu einem geringeren **Abstand** der Bewertung von aufeinanderfolgenden Perioden. Relative Zeitkonstanz ermöglicht die Änderung der Präferenzen im Zeitablauf. Zwei Akteure mit demselben Lebensalter haben demzufolge dieselbe Diskontierungsfunktion, unabhängig vom Geburtsdatum. Akteure mit unterschiedlichem Alter haben demzufolge abweichende Diskontierungsfunktionen.[289]

Aufbauend auf der einfachen Form der hyperbolischen Diskontierung aus Def. 2.4 sind andere hyperbolische Funktionen entwickelt worden. Eine Version stammt von Harvey und hat einige Verbreitung gefunden (vgl. Def. 2.5).[290]

Definition 2.5: *Die hyperbolische Diskontierungsfunktion nach* Harvey *ist definiert durch:* $f_{H;H}(t) = \left[\frac{1}{1+t}\right]^{\gamma}$ *für* $\gamma > 0$.

Eine andere, verallgemeinerte Variante ist in der Def. 2.6 beschrieben.[291]

Definition 2.6: *Die hyperbolische Diskontierungsfunktion nach* Loewenstein/Prelec *ist definiert durch:* $f_{H;LP}(t) = \left[\frac{1}{1+p\cdot t}\right]^{\frac{\gamma}{p}}$ *für* $\gamma, p > 0$.

Das Modell von Loewenstein/Prelec ist die verallgemeinerte Form einer hyperbolischen Funktion. Wird in dieser Funktion $\frac{\gamma}{p} = 1$ gesetzt, resultiert das Modell von Mazur. Wenn $p = 1$, resultiert das Modell von Harvey.

In der Def. 2.6 beschreibt der Term p die Zeitpräferenz, weist jedoch andere Wertebereiche auf, als in dem exponentiellen Modell oder im Modell von Mazur. Empirisch kann p wie folgt ermittelt werden:[292] $p = \frac{\frac{v_t}{v_0} - 1}{t}$. Darin beschreibt v_t den heute geschätzten Wert zum Zeitpunkt t, bei dem der Akteur indifferent ist zum sofortigen Erhalt von v_0. Der Faktor γ definiert das Maß, indem die Ungeduld abnimmt. Das wird bei einem Blick auf die Diskontrate deutlich:[293]

[288] Vgl. Def. 2.1 auf S. 349.

[289] Vgl. Strulik/Trimborn (2018: 47).

[290] Vgl. Harvey (1986: 1130); Harvey (1995: 390); Eisenführ/Weber/Langer (2010: 351).

[291] Vgl. Loewenstein/Prelec (1992: 580); Laibson (1997: 449–450); Scholten/Read (2006: 1425).

[292] Vgl. Doyle (2013: 122).

[293] Vgl. Laibson (1997: 450); Huber/Runkel (2005: 77).

$$\Delta_H(t) = \frac{-[f_H(t+1) - f_H(t)]}{f_H(t+1)} = \frac{\gamma}{1+p\cdot t}$$

In der Abb. 2.14 sind die Funktionsverläufe bei exponentieller und bei hyperbolischer Verzinsung zu sehen. Darin bezeichnet $f_E(t)$ die exponentielle Diskontierung, während $f_H(t)$ die hyperbolische Diskontierungsfunktion beschreibt.

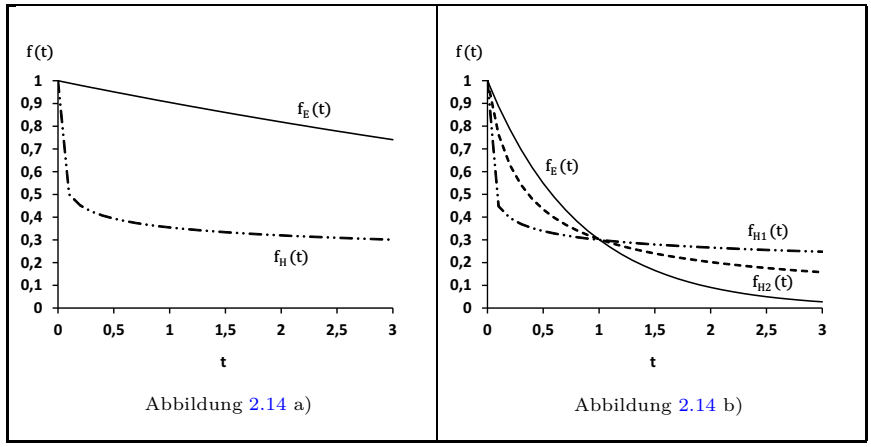


Abb. 2.14: Exponentielle und hyperbolische Diskontierungsfunktionen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Loewenstein/Prelec (1992: 581).

In der Abb. 2.14 a) ist der Unterschied in der Zeitwahrnehmung deutlich zu erkennen. Für diese Diskontierungsfunktion ist die Bestimmung der Parameter p und γ erforderlich, was besonders mit Blick auf letzteren Parameter problematisch erscheint. Die für die Abbildung 2.14 erforderlichen Ausprägungen dieser Einflussgrößen sind kaum realitätsnah bzw. nur in Einzelfällen zu beobachten. Die Funktion nach Def. 2.6 kann durch die beiden Parameter gut an individuelle Präferenzen angepasst werden. Jedoch geht dadurch auch die Allgemeingültigkeit verloren, weshalb diese Funktion nicht weiter betrachtet wird.

Wird das hyperbolische Diskontieren durch das Prisma der Gesundheitsfürsorge über das gesamte Leben eines Individuums betrachtet, ergibt sich ein anderes Bild. In jungen Lebensjahren ist ein Individuum i. d. R. ungeduldiger als im fortgeschrittenen Alter, weshalb die Modellierung einer abnehmenden Ungeduld realitätsnah und nicht irrational ist. Damit unterliegen die hyperbolisch diskontierenden Akteure jedoch dem Unmittelbarkeits-Effekt und gewichten die Gegenwart mehr als im exponentiellen Modell. Dies führt zu zeitinkonsistenten Entscheidungen, was auch in sämtlichen bisher zitierten

Studien festgestellt wird. Alle diese Studien beschränken sich jedoch auf die *Einmal-Beobachtung* eines Akteurs in einer Entscheidungssituation, also auf die einstufige Entscheidung. Wenn jedoch die Entscheidungen des Akteurs über mehrere Jahre modelliert werden, so zeigt sich, dass hyperbolisch diskontierende Akteure sehr wohl zeitkonsistente Entscheidungen treffen.[294] Die Begründung ist folgende: Die Diskontierungsmodelle verwenden den Zeitraum $N-0$ zur Diskontierung, also zwischen Betrachtungszeitpunkt $t=0$ und dem Eintritt des Ereignisses in $t=N$. Dieser Zeitraum ist bei einer einstufigen Entscheidung fix. Die bisher vorgestellten Diskontierungsmodelle sind demzufolge ausschließlich Funktionen der **Kalenderzeit**.

Wird nun jedoch ein Akteur über seinen Lebensweg hin beobachtet, so ergeben sich für jede Entscheidung unterschiedliche Diskontierungszeiträume. Wird der Tod als sicheres Datum in der Zukunft angenommen, so reduziert sich mit jedem Lebensjahr der Betrachtungszeitraum, der Tod rückt näher. Dies sollte bei einem rationalen Akteur auch in der Entscheidungsfindung berücksichtigt werden. Hyperbolisches Diskontieren ist in diesen Fällen rational. Dabei ist die Diskontierung eine Funktion des Geburtsdatums, der Kalenderzeit der Entscheidung sowie des Zeitraumes zwischen Entscheidung und Kalenderdatum des Eintritts des Ereignisses. Das ist eine starke Abweichung zu den hier präsentierten Modellen, bei denen die Diskontierung lediglich eine Funktion der Kalenderzeit ist. Auch bei Entscheidungen über die nachhaltige Ressourcennutzung führt eine solche hyperbolische Diskontierung zu zeitkonsistenten Entscheidungen.[295]

2.4.3.4 Quasi-hyperbolisches Diskontieren

Eine Variation des exponentiellen Modells führt zu einem ähnlichen Funktionsverlauf, wie bei der hyperbolischen Diskontierung. Deshalb wird diese Form als **quasi-hyperbolische** Diskontierung bezeichnet. Dabei wird die exponentielle Diskontierung verwendet, lediglich für die erste Periode wird ein sehr starker Wertabschlag modelliert (vgl. Def. 2.7).[296]

[294] Vgl. Strulik/Trimborn (2018); Strulik (2021a).

[295] Vgl. Strulik (2021b).

[296] Vgl. Phelps/Pollak (1968: 168); Laibson (1997: 449–450); Read/Loewenstein/Kalyanaraman (1999: 259); Doyle (2013: 124); Anchugina (2017: 187–188).

Definition 2.7: *Für* $0 < b < 1$ *und* $0 < \delta < 1$ *beschreibt* $f_{Q;A}(t)$ *mit*

$$f_{Q;A}(t) = \begin{cases} 1 & \text{, für } t = 0, \\ b \cdot \delta^t & \text{, für } t > 0 \end{cases}$$

eine quasi-hyperbolische Diskontierungsfunktion in allgemeiner Form.

Bei der ersten Vorstellung dieser Diskontierungsfunktion stand die Modellierung von intergenerationellem Altruismus im Vordergrund. Jede Generation bewertet ihren zukünftigen Konsumstrom mittels exponentieller Diskontierung, ist dabei jedoch mehr oder weniger altruistisch mit Blick auf die Folgegenerationen. Der Faktor b spiegelt das Maß des Altruismus wider, wobei $b = 1$ perfekten Altruismus darstellt.[297] Damit wird der Konsum jeder Folgegeneration in vollem Umfang berücksichtigt. Diese Funktionsform wurde später auf individuelle intertemporale Entscheidungen übertragen.

Wenn in der Def. 2.7 der Faktor b den Wert 1 erhält, resultiert die exponentielle Diskontierung.[298] Diese quasi-hyperbolische Funktion ist per definitionem diskret.[299] Wird in der Def. 2.7 festgesetzt, dass $\delta = \frac{1}{1+p}$, kann die quasi-hyperbolische Funktion $f_Q(t)$ in spezieller Form wie in Def. 2.8 beschrieben werden.

Definition 2.8: *Für* $0 < b < 1$ *und* $0 < p$ *beschreibt*

$$f_Q(t) = \begin{cases} 1 & \text{, für } t = 0, \\ \dfrac{b}{(1+p)^t} & \text{, für } t > 0 \end{cases}$$

eine quasi-hyperbolische Diskontierung in spezieller Form.

Für die Diskontrate Δ_Q ergeben sich mit dieser Darstellung folgende Werte:[300]

$$\begin{aligned} \Delta_Q(0) &= \frac{-[f_Q(1) - f_Q(0)]}{f_Q(1)} \\ &= \frac{1+p}{b} - 1 \\ &> p \\ \Delta_Q(t) &= \frac{-[f_Q(t+1) - f_Q(t)]}{f_Q(t+1)} \\ \Delta_Q(t) &= p. \end{aligned}$$

[297] Vgl. Phelps/Pollak (1968: 186 und 194).
[298] Vgl. Def. 2.3 auf S. 351.
[299] Für die Formulierung einer stetigen Variante vgl. Webb (2016).
[300] Vgl. Huber/Runkel (2005: 77).

Mit der quasi-hyperbolischen Modellierung wird demzufolge die erste Periode sehr stark diskontiert, während sämtliche darauffolgenden Perioden mittels exponentieller Diskontierung erfasst werden. Die Diskontrate entspricht für alle Perioden $t \geq 1$ wie im exponentiellen Modell der Zeitpräferenzrate p. Für die erste Periode ist die Diskontrate größer als die Zeitpräferenzrate. Zur Erläuterung wird das Bsp. 2.7 wieder aufgenommen.

Fortführung des Beispiels 2.7:

Es wird die zeitdiskrete Modellierung aus Def. 2.8 von S. 361 verwendet. Mit einem Faktor $b = 0{,}5$ ergeben sich für die ersten fünf Perioden die Werte in Tab. 2.14.

Tab. 2.14: Entwicklung der Diskontierungsfaktoren und der Diskontrate im quasi-hyperbolischen Modell. Quelle: Eigene Darstellung.

Zeitpunkt t	Diskontierungsfaktor $f_Q(t)$	Diskontrate $\Delta_Q(t)$
t=0	1	
t=1	$0{,}5 \cdot \frac{1}{(1+0{,}1)^1} \approx 0{,}45454$	$\frac{-(0{,}45454-1)}{0{,}45454} \approx 1{,}2$
t=2	$0{,}5 \cdot \frac{1}{(1+0{,}1)^2} \approx 0{,}41322$	$\frac{-(0{,}41322-0{,}45454)}{0{,}41322} \approx 0{,}10$
t=3	$0{,}5 \cdot \frac{1}{(1+0{,}1)^3} \approx 0{,}37565$	$\frac{-(0{,}37565-0{,}41322)}{0{,}37565} \approx 0{,}10$
t=4	$0{,}5 \cdot \frac{1}{(1+0{,}1)^4} \approx 0{,}34150$	$\frac{-(0{,}34150-0{,}37565)}{0{,}34150} \approx 0{,}10$
t=5	$0{,}5 \cdot \frac{1}{(1+0{,}1)^5} \approx 0{,}31046$	$\frac{-(0{,}31046-0{,}3415)}{0{,}31046} \approx 0{,}10$

Es wird deutlich, dass der Diskontierungseffekt, also der Verlust des Nutzens, im ersten Jahr am größten ist. In den darauffolgenden Jahren sinkt der Wert weiter, jedoch stetig mit dem Wert der individuellen Zeitpräferenzrate p.

Bei der Untersuchung von Preisen für Landwirtschaftsflächen konnte gezeigt werden, dass die Akteure quasi-hyperbolisch diskontieren.[301] Damit besteht die Gefahr, der Konzentration auf kurzfristige Entwicklungsaktivitäten.

[301] Vgl. Salois/Moss (2011).

2.4.3.5 Subadditives Diskontieren

Als Kritik am hyperbolischen Modell entstand eine andere Modellierung zur Erklärung von inkonsistentem intertemporalen Entscheidungsverhalten.[302] Das Beispiel 2.8 führt in die Problematik ein.[303]

Beispiel 2.8:

Ein Akteur mit einer linearen Nutzenfunktion ist indifferent zwischen dem Soforterhalt von 2€ und dem Erhalt von 5€ in einem Jahr. Gleichzeitig ist er indifferent zwischen dem Soforterhalt von 2€ und dem Erhalt von 8€ in zwei Jahren. Die absolute Diskontierung der Werte wird mit f bezeichnet und ergibt sich aus:

$$f_{0;1} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$f_{0;2} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

Daraus werden die periodenbezogenen Diskontierungsraten Δ ermittelt:

$$\Delta_{0;1} = (0{,}4)^{\frac{1}{1}} = 0{,}40$$

$$\Delta_{0;2} = (0{,}25)^{\frac{1}{2}} = 0{,}50$$

Offensichtlich ist die jährliche Diskontierung für den Zwei-Jahres-Zeitraum größer, als für den Ein-Jahres-Zeitraum.

Offensichtlich verletzen seine Präferenzen die Additivität,[304] was auf zwei Wegen möglich ist:[305]

- Subadditivität: In dem Fall gilt für einen Akteur: $y > y'$. Das bedeutet für die Diskontierungsfaktoren:[306] $f(0;N) > f(0;\tau) \cdot f(\tau;N)$. Die Diskontierung über den Gesamtzeitraum ist geringer als über die Teilintervalle. Der Akteur ist demzufolge über kurze Intervalle ungeduldiger als über längere Intervalle. Deshalb ist der Diskontierungsfaktor bei kurzen Zeiträumen geringer als bei langen Zeiträumen.
- Superadditivität: In dem gegenteiligen Fall gilt für einen Akteur: $y < y'$, was bedeutet: $f(0;N) < f(0;\tau) \cdot f(\tau;N)$.

In Abhängigkeit von der Intervalllänge kann Superadditivität oder Subadditivität vorliegen. Die Eigenschaften gehen ineinander über. Die Ursache dafür wurde in experimentellen Untersuchungen deutlich. Das Ergebnis der Diskon-

---

[302] Vgl. Read (2001); Read/Roelofsma (2003); Scholten/Read (2006).

[303] Vgl. Scholten/Read (2006: 1424–1426); Rambaud/Fernández (2020: 4–5).

[304] Vgl. Def. 2.4.2 auf S. 354.

[305] Vgl. Read (2001: 9); Scholten/Read (2006: 1428–1433); Beck (2014: 229).

[306] Mit der in Abschn. 2.4.3.1 auf S. 349 eingeführten Notation.

tierung hängt offenbar davon ab, in wie viele Intervalle der Zeitraum zerlegt wurde. Das zugrundeliegende Experiment wird im Bspl. 2.9 erläutert.[307]

Beispiel 2.9:

Ein Akteur wird mit den drei folgenden Entscheidungsproblemen konfrontiert, in denen er zwischen jeweils zwei Optionen wählen kann, zu welchen Zeitpunkten er welche Geldsumme erhält:

Problem 1:	*Alternative A:*	*Erhalt von 100€ in 6 Wochen*
	oder	
	Alternative B:	*Erhalt von 150€ in 12 Wochen*
Problem 2:	*Alternative B:*	*Erhalt von 150€ in 12 Wochen*
	oder	
	Alternative C:	*Erhalt von 200€ in 18 Wochen*
Problem 3:	*Alternative A:*	*Erhalt von 100€ in 6 Wochen*
	oder	
	Alternative C:	*Erhalt von 200€ in 18 Wochen*

Diese Situation ist in der Abb. 2.15 dargestellt.

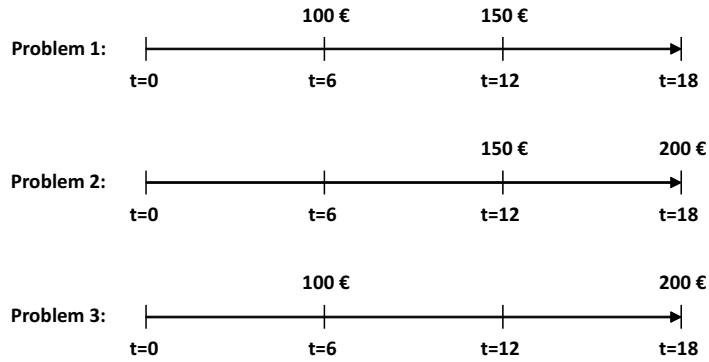


Abb. 2.15: Intertemporale Entscheidungssituation. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Rambaud/Fernández (2020: 5).

Offensichtlich werden 6 Wochen Wartezeit mit jeweils 50€ belohnt. Die „Entlohnungsfunktion" ist also linear. Für einen rationalen Akteur, also einen Akteur mit zeitkonsistenten Präferenzen, müssen sich folgende, transitive Relationen ergeben: Wenn für ihn $A \succ B$ und $B \succ C$, so muss folgen: $A \succ C$. Dann sind die Präferenzen ungeduldig, aber trotzdem zeitkonsistent. Eine andere transitive und somit zeitkonsistente Reihung wäre, wenn aus $B \succ A$ und $C \succ B$ folgen würde: $C \succ A$. Dann wäre der Akteur bzw. seine Präferenzen geduldig. Prinzipiell können die Antworten in vier Gruppen klassifiziert werden:

---

[307] Vgl. Scholten/Read (2006: 1430); Rambaud/Fernández (2020: 4–5).

– *transitive, ungeduldige Präferenzordnung:* $A \succ B$, $B \succ C$ *sowie* $A \succ C$
– *transitive, geduldige Präferenzordnung:* $B \succ A$, $C \succ B$ *sowie* $C \succ A$
– *intransitive, superadditive Präferenzordnung:* $B \succ A$, $C \succ B$ *sowie* $A \succ C$
– *intransitive, subadditive Präferenzordnung:* $A \succ B$, $B \succ C$ *sowie* $C \succ A$

Die Probanden, welche sich den Situationen aus Bspl. 2.9 gegenübersahen, verwendeten implizit verschiedene Diskontraten für Zeitabschnitte mit unterschiedlicher Länge. Es zeigte sich, dass eine zunehmende Unterteilung des Gesamtzeitraumes zu sinkenden Diskontierungsfaktoren, also zu einer stärkeren Diskontierung führt. Damit kann die Subadditivität einer Diskontierungsfunktion beschrieben werden (vgl. Eigenschaft 2.4.5).

Eigenschaft 2.4.5: *Eine Diskontierungsfunktion* $f(t)$ *ist subadditiv, wenn gilt:* $f(0;N) > f(0;\tau) \cdot f(\tau;N)$ *für alle* $\tau, N > 0$.

Die Existenz individueller subadditiver Präferenzen wurde in folgenden anderen Zusammenhängen festgestellt:

- Entscheidungen beim Kauf von Konsumgütern,[308]
- Entscheidungen über Menüs im Restaurant[309] sowie
- Entscheidungen bei Risiko.[310]

Subadditivität bei intertemporalen Entscheidungen wurde in weiteren Studien bestätigt.[311] Für einen rationalen Akteur gilt: $\tau = 0$ und der betrachtete Zeitraum ergibt sich mit N. Reale Akteure unterteilen den Betrachtungszeitraum bzw. nehmen diesen anders war, so dass folgt: $N - \tau$. Damit wird die subjektive Wahrnehmung des Zeitraumes abgebildet. Die subadditive Diskontierungsfunktion $f_S(t)$ in zeitstetiger Variante wird in Def. 2.9 beschrieben.[312]

Definition 2.9: *Die Funktion* $f_S(t) = \left[\frac{1}{e^{(N-\tau)^\theta}}\right]^p$, *mit* $p > 0$, $0 \leq \tau < N$ *und* $0 < \theta < 1$ *für* $Z = \{0,1,2,3,...,\tau,...,N\}$ *mit* $t \in Z$ *ist eine subadditive Diskontierungsfunktion.*

In der Def. 2.9 beschreibt $N - \tau$ die subjektiv wahrgenommene Länge des Zeitraumes und θ die individuelle, nicht-lineare Zeitwahrnehmung im Intervall. Wenn in der Def. 2.9 $\theta = 1$ und $\tau = 0$ gesetzt werden, resultiert die ex-

[308] Vgl. Kahneman/Knetsch (1992).
[309] Vgl. Bateman et al. (1997).
[310] Vgl. Kahneman/Tversky (1979: 281–282); Starmer/Sugden (1993: 239–240); Popkowski Leszczyz/Pracejus/Shen (2008).
[311] Vgl. Ok/Masatlioglu (2007); McAlvanah (2010); Kinari/Ohtake/Tsutsui (2016); McDonald et al. (2017).
[312] Vgl. Read (2001: 25); Scholten/Read (2006: 1425); Doyle (2013: 126).

ponentielle Diskontierungsfunktion, die wie folgt formuliert werden kann:[313]
$f_E(t) = \left[\frac{1}{e^p}\right]^t = \left[\frac{1}{e^t}\right]^p$.

Die subadditive Diskontierungsfunktion weist für das subjektiv wahrgenommene Intervall $N - \tau$ ebenfalls eine exponentielle Form auf. Das bedeutet: Die subadditive Diskontierungsfunktion ist eine exponentielle Diskontierung, die jedoch die Eigenschaft der Additivität[314] nicht erfüllt.

Die Diskontrate $\Delta_S(t)$ im subadditiven Modell ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\Delta_S(t) &= \frac{-f'_S(t)}{f_S(t)} \\ &= p \cdot \theta \cdot (N - \tau)^{(\theta - 1)}\end{aligned}$$

Es wird deutlich, dass bei $\theta = 1$ und $\tau = 0$ folgt: $\Delta_S(t) = \Delta_E(t) = p$. Bei subadditiver Diskontierung ist der "Preis" für die Summe der einzelnen Intervalle höher als die Gesamtsumme. Der Begriff der Subadditivität bezieht sich darauf, dass das Produkt der Diskontierungsfaktoren geringer ist als der Diskontierungsfaktor für den Gesamtzeitraum. Der Akteur diskontiert die einzelnen Intervalle in stärkerem Maße als den Gesamtzeitraum. Read zeigte in seiner grundlegenden Studie,[315] dass dieser Effekt in jedem der Experimente auftrat und dass eine äquidistante Dreiteilung eines Gesamtzeitraumes eine im Durchschnitt 40 % höhere Diskontierung bewirkte.

Interessanterweise sind auch die Modelle des hyperbolischen Diskontierens subadditiv. Zur Veranschaulichung wird die bereits vorgestellte hyperbolische, die exponentielle sowie die subadditive Diskontierung am Beispiel 2.7 angewendet.[316]

Fortführung des Beispiels 2.7:

Die persönliche Zeitpräferenzrate p des Akteurs beträgt 10% pro Jahr. Es werden die Diskontierungsfaktoren für die Zeiträume t=2, t=3 sowie t=5 verglichen.

- ***Hyperbolische Diskontierung:*** *Die Diskontierungsfaktoren wurden im Beispiel bereits ermittelt*[317] *und lauteten:* $f_H(2) \approx 0{,}833$, $f_H(3) \approx 0{,}769$ *sowie* $f_H(5) \approx 0{,}667$. *Damit folgt:* $f_H(2) \cdot f_H(3) < f_H(5)$. *Das zeigt die Subadditivität der Faktoren.*
- ***Exponentielle Diskontierung:*** *In stetiger Zeit ergeben sich mit der Definition*[318] *folgende Werte:* $f_E(2) = e^{-0{,}20} \approx 0{,}81873$, $f_E(3) = e^{-0{,}30} \approx 0{,}74082$ *und* $f_E(5) = e^{-0{,}50} \approx 0{,}60653$. *Damit ergibt sich:*[319] $f_E(2) \cdot f_E(3) = f_E(5)$. *Die Additivität ist damit sichergestellt.*

---

[313] Vgl. Def. 2.2 auf S. 350.

[314] Vgl. Eigenschaft 2.4.1 auf S. 353.

[315] Vgl. Read (2001: 24).

[316] Vgl. S. 356.

[317] Vgl. Tab. 2.13 auf S. 356.

[318] Vgl. Def. 2.2 auf S. 350.

[319] Bei Vernachlässigung der Rundungsdifferenzen.

- ***Subadditive Diskontierung:*** *Es wird angenommen, dass* $\theta = 0{,}5$ *und dass der Akteur den 5-Jahres-Zeitraum in einen 2-Jahres und in einen 3-Jahreszeitraum unterteilt. Def. 2.9 führt zur folgenden Darstellung:* $f_S(2) = \left[\frac{1}{e^{(2)^{0,5}}}\right]^{0,10} \approx 0{,}868123$, $f_S(3) = \left[\frac{1}{e^{(3)^{0,5}}}\right]^{0,10} \approx 0{,}840965$ *sowie* $f_S(5) = \left[\frac{1}{e^{(5)^{0,5}}}\right]^{0,10} \approx 0{,}7996929$. *Damit ergibt sich:* $f_S(2) \cdot f_S(3) < f_S(5)$. *Auch diese Relation ist subadditiv.*

Offensichtlich ist die Subadditivität eine Eigenschaft des hyperbolischen Diskontierens, denn auch für andere hyperbolische Modelle[320] lässt sich Subadditivität der Diskontierungsfaktoren zeigen. Dieser identische Umstand wird inhaltlich jedoch abweichend erklärt:[321] Beim hyperbolischen Diskontieren entsteht Subadditivität durch die **Verschiebung** eines Ereignisses in die Zukunft. Im Unterschied dazu wird beim subadditiven Diskontieren der Effekt der Subadditivität durch die **Unterteilung** des Betrachtungshorizontes bewirkt. Das Maß der **Ungeduld** – ausgedrückt durch die Diskontrate[322] – nimmt bei beiden Modellvarianten ab.

2.4.3.6 Zusammenfassung

Die oben beschriebenen Modelle sind entstanden, um einige der aufgeführten Anomalien zu berücksichtigen. Die wesentlichen Eigenschaften im Vergleich zum Standardmodell sind in der Tab. 2.15 zusammengefasst, wobei die quasi-hyperbolische Diskontierung nicht aufgenommen wurde, da diese eine Mischungsform darstellt.

Daneben sind weitere Ansätze, wie z. B. räumliches Diskontieren entwickelt worden.[323] Doyle führt 26 Diskontierungsmodelle auf.[324] Diese Modelle werden hier nicht vorgestellt, stattdessen wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.[325]

Wie auch bei anderen psychologischen Studien zum Entscheidungsverhalten werden die zugrundeliegenden Studien zum intertemporalen Entscheiden kritisiert. Es wird bemängelt, dass in einigen Fällen die beobachteten Effekte übertrieben dargestellt würden.[326]

[320] Vgl. Def. 2.6 auf S. 358.

[321] Vgl. Scholten/Read (2006: 1427).

[322] Vgl. Def. 2.1 auf S. 349.

[323] Vgl. Mallpress (2021).

[324] Vgl. Doyle (2013: 121).

[325] Vgl. Huang/Wu (2006); Blavatskyy (2015); Feigenbaum (2016); Takemura (2021: 218–226). Für einen historischen Überblick über die Entwicklungslinien der Modelle vgl. Grüne-Yanoff (2015).

[326] Vgl. Imai/Rutter/Camerer (2021).

Tab. 2.15: Merkmale von ausgewählten Diskontierungsmodellen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Samuelson (1937: 156–157); Mazur (1987: 58); Read (2001: 25); Scholten/Read (2006: 1425); Doyle (2013: 122–126).

Modell / Merkmale	**Exponentielles Modell**	**Hyperbolisches Modell**	**Subadditives Modell**
Ursprungs-Quelle	Samuelson (1937)	Mazur (1987)	Read (2001); Scholten/Read (2006)
Diskontierungs–funktion[a),b)]	Stetig: $f_E(t) = \left[\frac{1}{e^p}\right]^t$ Diskret: $f_E(t) = \left[\frac{1}{(1+p)}\right]^t$	Diskret: $f_H(t) = \frac{1}{1+p \cdot t}$	Stetig:[c)] $f_S(t) = \left[\frac{1}{e^{(N-\tau)^\theta}}\right]^p$
Diskontrate	$\Delta_E(t) = p$	$\Delta_H(t) = \frac{p}{1+p \cdot t}$	$\Delta_S(t) = p \cdot \theta \cdot (N-\tau)^{(\theta-1)}$
Wertebereich	$0 < p$	$0 < p$	$0 < p$; $0 < \theta < 1$ sowie $0 < \tau < N$
Eigenschaften	- Diskontierung über den objektiv gegebenen Zeitraum - Zeit wird linear wahrgenommen - Wert zukünftiger Zahlungen nimmt mit konstanter Diskontrate ab → Ungeduld bleibt konstant - einziges Modell, welches Zeitkonsistenz erfüllt (vgl. Def. 1.51 auf S. 200)	- Diskontierung über den objektiv gegebenen Zeitraum - Verletzung der Stationariät und damit der Zeitkonsistenz - Zeit wird nicht linear wahrgenommen - Wert zukünftiger Zahlungen sinkt mit abnehmender Diskontrate → Ungeduld nimmt ab	- Diskontierung über den subjektiv wahrgenommenen Zeitraum - Diskontierung aufgrund der Anzahl der Zeitintervalle, in die N unterteilt wird - Verletzung der Stationariät - Wert zukünftiger Zahlungen sinkt mit abnehmender Diskontrate → Ungeduld nimmt ab - Bei $\theta = 1$ und $\tau = 0$ resultiert das Modell von Samuelson
Implikationen für Zeit – Präferenzen[d)]	- Wechselseitige Unabhängigkeit (Anf. 1.7.5 auf S. 195) - Stationarität (Anf. 1.7.6 auf S. 203) bzw. absolute Zeitkonstanz (vgl. Eig. 2.4.3 auf S. 357)	- Wechselseitige Unabhängigkeit - Relative Zeitkonstanz (vgl. Eig. 2.4.4 auf S. 357)	- Wechselseitige Unabhängigkeit - Subadditivität (vgl. Eig. 2.4.2 auf S. 354)

a) $t = (0,1,2,3,\ldots,\tau,\ldots,N)$ mit N als Ende des objektiv vorliegenden Zeitraumes, über den diskontiert wird.
b) p = individuelle Zeitpräferenzrate für den Konsum zwischen zwei Perioden (vgl. Herleitung und Gleichung 12 auf S. 183). In den Modellen wird die jeweilige Rate (stetig oder diskret) verwendet. Vgl. Abschn. 2.4.3.2 auf S. 350 zur Beziehung von stetigen und diskreten Präferenzraten.
c) $N - \tau$ = Subjektiv wahrgenommene Länge des Zeitraumes (=Intervall); θ beschreibt die individuelle, nicht-lineare Zeitwahrnehmung im Intervall.
d) Zusätzlich werden noch Ordnung, Transitivität, Stetigkeit sowie zwei technische Aspekte vorausgesetzt. Vgl. Merksatz 1.17 auf S. 204.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, in welchen Fällen die exponentielle Diskontierung **problematisch** sein könnte:

- Individuen, die nicht als professionelle Entscheider tätig sind, verletzen die Prämissen der rationalen Wahl sehr oft. Gerade bei Alltagsentscheidungen verhalten sich Individuen nicht rational. Aber auch ein Einzelunternehmer, der eine Investitionsentscheidung fällt, kann diese Prämissen verletzen.
- Bestehen die Ergebnisse von Investitionsprojekten in anderen Zieldimensionen (wie z. B. bei ökologischen oder sozialen Zielen) muss geprüft werden, ob die exponentielle Diskontierung dafür geeignet ist. Es erscheint kritikwürdig, dass diese Form der Nutzentransformation für sämtliche Arten von Investitionen (finanzielle und nicht finanzielle Investitionen) und für alle Varianten von Nutzengrößen (wie z. B. Umweltgüter, Lebenszeit, Arbeitsqualität) erfolgt.
- Besonders im Fall von mehrstufigen Entscheidungen, bei denen zwischen den einzelnen Stufen längere Zeiträume liegen, muss geprüft werden, ob die Präferenzen stationär sind. Langwierige Projekte sind prädestiniert für zeitinkonsistentes Entscheidungsverhalten. Um das zu verhindern, ist während des gesamten Prozesses eine möglichst gute Dokumentation der ursprünglichen Ziele, Präferenzen, Rahmenbedingungen und der Prämissen erforderlich.

Reale Entscheidungsprobleme sind oft schlecht strukturiert.[327] Das führt dazu, dass sich auch die Ziele im Verlauf des Entscheidungsprozesses folgendermaßen ändern können:

- Zieldifferenzierung,
- Veränderung der Zielgewichtungen oder
- Reformulierung des Zielsystems.

Dies muss jedoch nicht in jedem Fall irrational sein, sondern kann eine durchaus angemessene Reaktion auf ein sich veränderndes Umfeld sein.

2.5 Kritische Würdigung

Die Modelle der deskriptiven Entscheidungstheorie sind aus der Kritik an Modellen der rationalen Entscheidung entstanden, und anschließend selbst wiederum Gegenstand von Kritik geworden. Diese bezieht sich auf folgende Punkte:

[327] Vgl. 1. Band, Abschn. 1.2.2.1 auf S. 15.

- Die Ergebnisse wurden oftmals in Experimenten und Tests unter Labor-Bedingungen erzielt. Dabei wurden häufig Studierende der jeweiligen Fachrichtung als Probanden eingesetzt. Die Frage muss gestellt werden, ob die Ergebnisse auf professionelle Entscheider in einem Investitionsgremium im Unternehmen übertragbar sind.
- Weiterhin wird bemängelt, dass eine Vielzahl von Einzel-Phänomenen entdeckt wurde, die sich jedoch nur bedingt inhaltlich konsistent erklären lassen.
- Die entwickelten Modelle (z. B. das hyperbolische Diskontieren):
  - können das Verhalten in einem Experiment zwar ex post erklären,
  - sind jedoch zur Abgabe von ex ante Empfehlungen kaum geeignet.

  Das liegt u. a. daran, dass die Modellparameter für jeden Akteur individuell erhoben und spezifiziert werden müssen.
- Die nachträgliche Überprüfung der Studien, die zur Entwicklung der Modelle geführt haben, zeigte, dass sich für einen Großteil der Studien die Ergebnisse nicht reproduzieren ließen.[328] Zusätzlich stellte sich heraus, dass die Effekte teilweise übertrieben dargestellt wurden.[329]

Bei Berücksichtigung dieser Kritik liefern die Studien und Modelle wichtige Erkenntnisse über die Psychologie der Problemlösung. Gleichzeitig bieten sie Anhaltspunkte dafür, in welchen Situationen ein Entscheidungsprozess besonders genau geprüft werden sollte.

2.6 Literaturverzeichnis

Adriani, F./Sonderegger, S. (2020): Optimal similarity judgments in intertemporal choice (and beyond). In: Journal of Economic Theory, 190 (Nov.): 1–30.

Albach, H. (1989): Kosten, Transaktionen und externe Effekte im betrieblichen Rechnungswesen. In: Albach, H. (Hg.): Organisation: Mikroökonomische Theorie und ihre Anwendungen. Wiesbaden: Gabler, S. 27–42.

Allais, M. (1953): Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine. In: Econometrica, 21 (4): 503–546.

Anchugina, N. (2017): A simple framework for the axiomatization of exponential and quasi-hyperbolic discounting. In: Theory and Decision, 82 (2): 185–210.

Anderson, J. (2013): Kognitive Psychologie. 7. Aufl., Heidelberg u. a.: Spektrum, Akademie Verlag.

[328] Vgl. Camerer et al. (2018).

[329] Vgl. Imai/Rutter/Camerer (2021).

Aram, J./Walochik, K. (1996): Improvisation and the Spanish manager – cultural values and management style in Spain. In: International Studies of Management and Organization, 26 (4): 73–89.

Arkes, H. R./Ayton, P. (1999): The sunk cost and Concorde effects: Are humans less rational than lower animals? In: Psychological Bulletin, 125 (5): 591–600.

Arrow, K. J. (1951): Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations. In: Econometrica, 19 (4): 404–437.

Arrow, K. J. (1974): The use of unbounded utility functions in expected-utility maximization: response. In: Quarterly Journal of Economics, 88 (1): 136–138.

Aumann, R. J. (1977): The St. Petersburg paradox: A discussion of some recent comments. In: Journal of Economic Theory 14, (2): 443–445.

Bateman, I./Munro, A./Rhodes, B./Starmer, C./Sugden, R. (1997): Does part-whole bias exist? An experimental investigation. In: The Economic Journal, 107 (March): 322–332.

Beck, H. (2014): Behavioral Economics. Wiesbaden: Springer Gabler.

Beckmann, D./Menkhoff, L./Suto, M. (2008): Does culture influence asset managers' views and behavior? In: Journal of Economic Behavior & Organization, 67 (3/4): 624–643.

Berkeley, D./Humphreys, P. (1982): Structuring decision problems and the 'bias heuristic'. In: Acta Psychologica, 50 (3): 201–252.

Bermúdez, J. L. (2018): Does Newcomb's problem actually exist? In: Ahmed, A. (Hg.): Newcomb's problem. Cambridge: University Press, S. 19–41.

Bernoulli, D. (1954): Exposition of a new theory on the measurement of risk. In: Econometrica, 22 (1): 23–36. Übersetzung des Beitrags von Bernoulli, D. (1738): „Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis. In: Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V. [Papers of the Imperial Academy of Sciences in Petersburg. Vol. V]", S. 175–192.

Bernoulli, J. (1999): Wahrscheinlichkeitsrechnung: I., II., III. und IV. Theil = Ars conjectandi. Nachdruck der Ausgabe von 1713. Frankfurt/M.: Deutsch.

Blackwell, D./Girshick, M. A. (1954): Theory of games and statistical decisions. New York, u. a.: Wiley & Sons.

Blavatskyy, P. (2015): Intertemporal choice with different short-term and long-term discount factors. In: Journal of Mathematical Economics, 61 (Dez.): 139–143.

Bleichrodt, H./Doctor, J. N./Gao, Y./Li, C./Meeker, D./Wakker, P. P. (2019): Resolving Rabin's paradox. In: Journal of Risk and Uncertainty, 59 (3): 239–260.

Bleichrodt, H./Johannesson, M. (2001): Time preference for health: A test of stationarity versus decreasing timing aversion. In: Journal of Mathematical Psychology, 45 (2): 265–282.

Bleichrodt, H./Keskin, U./Rohde, K. I. M./Spinu, V./Wakker, P. (2015): Discounted utility and present value - a close relation. In: Operations Research, 63 (6): 1420–1430.

Boucoiran, T. (2010): Einfluss nationaler Kultur auf das Controlling: Eine Exploration deutscher und französischer Controllingpraxis aus Sicht deutscher Unternehmen. Hamburg: Dr. Kovač.

Boyd, R./Richardson, P. (2001): Norms and bounded rationality. In: Gigerenzer, G./Selten, R. (Hg.): Bounded rationality – the adaptive toolbox. Cambridge: MIT Press, S. 281–296.

Brandstätter, E./Gigerenzer, G./Hertwig, R. (2006): The priority heuristic: making choices without trade-offs. In: Psychological Review, 113 (2): 409–432.

Braunstein, M. L. (1976): Depth perception through motion. New York: Academic Press.

Brendel, E. (1992): Die Wahrheit über den Lügner: eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners. Berlin u. a.: de Gruyter.

Brito, D. L. (1975): Becker's theory of the allocation of time and the St. Petersburg paradox. In: Journal of Economic Theory, 10 (1): 123–126.

Bröder, A. (2001): Die eingeschränkte Fruchtbarkeit eines unvollständigen Forschungsprogramms. In: Psychologische Rundschau, 52 (3): 159–162.

Brockhoff, K. (2021): Betriebswirtschaftslehre in Wissenschaft und Geschichte. 6. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Bröder, A./Eichler, A. (2006): The use of recognition information and additional cues in inference from memory. In: Acta Psychologica, 121 (3): 275–284.

Bronner, R. (1993): Entscheidungsverhalten. In: Hauschildt, J./Grün, O. (Hg.): Ergebnisse empirischer betriebswirtschaftlicher Forschung: Zu einer Realtheorie der Unternehmung. Stuttgart: Schäffer-Poeschel, S. 713–746.

Brunswik, E. (1943): Organismic achievement and environmental probability. In: Psychological Review, 50 (3): 255–272.

Brunswik, E. (1952): The conceptual framework of psychology. Chicago: University Press.

Burghart, D. R. (2020): The two faces of independence: betweenness and homotheticity. In: Theory and Decision, 88 (4): 567–593.

Camerer, C. F. (2000): Prospect theory in the wild: evidence from the field. In: Kahneman, D./Tversky, A. (Hg.): Choices, values, and frames. Cambridge: University Press, S. 288–300.

Camerer, C. F./Dreber, A./Holzmeister, F./Ho, T. H./Huber, J./Johannesson, M./Kirchler, M./Nave, G./Nosek, B. A./Pfeiffer, T./Altmejd, A./Buttrick, N./Chan, T./Chen, Y./Forsell, E./Gampa, A./Heikensten, E./Hummer, L./Imai, T./Isaksson, S./Manfredi, D./Rose, J./Wagenmakers, E.-J./Wu, H. (2018): Evaluating the replicability of social science experiments in Nature and Science between 2010 and 2015. In: Nature Human Behaviour, 2, 637–644.

Carr, C. (2005): Are German, Japanese and Anglo-Saxon strategic decision styles still divergent in the context of globalization? In: Journal of Management Studies, 42 (6): 1155–1188.

Cohen, T./High, J. (1988): Time, bounded utility, and the St. Petersburg paradox. In: Theory and Decision, 25 (3): 219–223.

Comelli, G./Rosenstiel, L. von/Nerdinger, F. W. (2014): Führung durch Motivation: Mitarbeiter für Unternehmensziele gewinnen. 5. Aufl., München: Vahlen.

Cornides, T. (1983): Karl Menger's contributions to social thought. In: Mathematical Social Sciences, 6 (1): 1–11.

Cowen, T./High, J. C. (1988): Time, bounded utility, and the St. Petersburg paradox. In: Theory and Decision, 25 (3): 219–223.

Csörgő, S./Simons, G. (1993): On Steinhaus' resolution of the St. Petersburg paradox. In: Probability and Mathematical Statistics, 14 (2): 157–172.

Czerlinski, J./Gigerenzer, G./Goldstein, D. G. (1999): How good are simple heuristics? In: Gigerenzer, G./Todd, P. M./ABC Research Group (Hg.): Simple heuristics that make us smart. New York: Oxford University Press, S. 97–118.

Dangl, T./Wirl, F. (1998): Investition bei Unsicherheit als Erklärung für hohe implizite Diskontraten bei Energiesparinvestitionen. In: OR Spektrum, 20 (4): 259–267.

Da Silva, S./Matsushita, R. (2016): The St. Petersburg paradox: An experimental solution. In: Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 445 (1): 66–74.

Deitmar, H. L. (2012): Die Beziehung von Unternehmenskultur und Unternehmensmarke. Wiesbaden: DUV.

Doyle, J. R. (2013): Survey of time preference, delay discounting models. In: Judgment and Decision Making, 8 (2): 116–135.

Drummond, H. (2017): Megaproject escalation of commitment: An update and appraisal. In: Flyvbjerg, B. (Hg.): Oxford handbook of megaproject management. Oxford: University Press, S. 194–216.

Duelfer, E./Joestingmeier, B. (2011): International management in diverse cultural areas. 2. Aufl., München u. a.: Oldenbourg.

Dutka, J. (1988): On the St. Petersburg paradox. In: Archive for History of Exact Sciences, 39 (1): 13–39.

Earl, P. E. (2018): Richard H. Thaler: a Nobel Prize for behavioural economics. In: Review of Political Economy, 30 (2): 107–125.

Earley, P. C./Laubach, M. (2002): Structural identity theory and the dynamics of cross-cultural work. In: Gannon, M. J./Newman, K. L. (Hg.): The Blackwell handbook of cross-cultural management. Oxford: Blackwell Publishing, S. 256–282.

Easwaran, K. (2021): A classification of Newcomb problems and decision theories. In: Thesis, im Druck: https://doi.org/10.1007/s11229-019-02272-z.

Eckhardt, W. (2013): Paradoxes in probability theory. Dordrecht u. a.: Springer.

Eells, E. (1984): Newcomb's many solutions. In: Theory and Decision, 16 (1): 59–105.

Eisenführ, F./Weber, M./Langer, T. (2010): Rationales Entscheiden. 5. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Elele, J./Fields, D. (2010): Participative decision making and organizational commitment: comparing Nigerian and American employees. In: Cross Cultural Management 17 (4): 368–392.

Ellsberg, D. (1961): Risk, ambiguity, and the Savage axioms. In: Quarterly Journal of Economics, 75 (4): 643–669.

Englert, M. (2010): Einschätzung von Umweltrisiken durch Medizinstudierende: Wissensstand und Interventionsmöglichkeiten. Diss., LMU München.

Ericson, K. M./Laibson, D. (2019): Intertemporal choice. In: Bernheim, D./DellaVigna, S./Laibson, D. (Hg.): Handbook of behavioral economics – foundations and applications - vol. II. Amsterdam: Elsevier, S. 1–67.

Feigenbaum, J. (2016): Equivalent representations of non-exponential discounting models. In: Journal of Mathematical Economics, 66 (Oct.): 58–71.

Feller, W. (1945): Note on the law of large numbers and "fair" games. In: Annals of Mathematical Statistics, 16 (3): 301–304.

Feller, W. (1968): An introduction to probability theory and its applications - vol. I. 3. Aufl., New York: Wiley.

Fichtner, H. (2008): Unternehmenskultur im Strategischen Kompetenzmanagement. Wiesbaden: DUV.

Fischer, K. (2004): Aspekte einer empirisch fundierten betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre. Wiesbaden: DUV.

Fishburn, P. C. (1979): Utility theory for decision making. New York: Wiley.

Fishburn, P. C. (1988): Expected utility: An anniversary and a new era. In: Journal of Risk and Uncertainty, 1 (3): 267–283.

Fishburn, P. C./Edwards, W. (1997): Discount-neutral utility models for denumerable time streams. In: Theory and Decision, 43 (2): 139–166.

Flyvbjerg, B. (2014): What you should know about megaprojects and why: an overview. In: Project Management Journal, 45 (2): 6–19.

Fontaine, R. (2008): Problem solving: an Islamic management approach. In: Cross Cultural Management, 15 (3): 264–274.

Franck, E./Zellner, J. (2001): Emotionale Grenzen der Vernunft. In: Schreyögg, G./Sydow, J. (Hg.): Emotionen und Management. Wiesbaden: Gabler, S. 249–276.

Frederick, S./Loewenstein, G. (2008): Conflicting motives in evaluations of sequences. In: Journal of Risk, 37 (2–3): 221–235.

French, S. (1988): Decision theory: An introduction to the mathematics of rationality. New York: Horwood.

Frey, B. S./Eichenberger, R. (1989): Zur Bedeutung entscheidungstheoretischer Anomalien für die Ökonomik. In: Jahrbuch für Nationalökonomik und Statistik, 206 (2): 81–101.

Frijns, B./Gilbert, A./Lehnert, T./Tourani-Rad, A. (2013): Uncertainty avoidance, risk tolerance and corporate takeover decisions. In: Journal of Banking & Finance, 37 (7): 2457–2471.

Geiger, M. A. (2006): Perceptions of earnings management: the effects of national culture. In: Advances in International Accounting, 19 (1): 175–199.

Ghisellini, F./Chang, B. Y. (2018): Behavioral Economics. Cham: Palgrave Macmillan.

Gibbard, A./Harper, W. L. (1985): Counterfactuals and two kinds of expected utility. In: Campbell, R./Snowden L. (Hg.): Paradoxes of rationality and cooperation - Prisoner's dilemma and Newcomb's problem. Vancouver: University Press, S. 133–182.

Gibbon, J. (1977): Scalar expectancy theory and Weber's law in animal timing. In: Psychological Review, 84 (3): 279–325.

Gigerenzer, G. (2000): Adaptive thinking – rationality in the real world. Oxford: University Press.

Gigerenzer, G. (2004): Striking a blow for sanity in theories of rationality. In: Augier, M./March, J. (Hg.): Models of a man: Essays in memory of Herbert A. Simon. Cambridge: MIT Press, S. 389–409.

Gigerenzer, G. (2005): Fast and frugal heuristics: the tools of bounded rationality. In: Koehler, D. J./Harvey, N. (Hg.): Blackwell handbook of judgement and decision making. Oxford: Blackwell, S. 62–88.

Gigerenzer, G./Czerlinski, J./Martignon, L. (2002): How good are fast and frugal heuristics? In: Gilovich, T./Griffin, D./Kahneman, D. (Hg.): Heuristics and biases: the psychology of intuitive judgement. Cambridge: University Press, S. 559–581.

Gigerenzer, G./Hoffrage, U./Goldstein, D. (2008): Fast and frugal heuristics are plausible models of cognition: reply to Dougherty, Franco-Watkins, and Thomas. In: Psychological Review, 115 (1): 230–239.

Gigerenzer, G./Hoffrage, U./Kleinböltling, H. (1991): Probabilistic mental models: a Brunswikian theory of confidence. In: Psychological Review, 98 (4): 506–528.

Gigerenzer, G./Todd, P. M. (1999): Fast and frugal heuristics: the adaptive toolbox. In: Gigerenzer, G./Todd, P. M./ABC Research Group (Hg.): Simple heuristics that make us smart. New York: Oxford University Press, S. 3–36

Goldstein, D./Gigerenzer, G./Hogarth, R. M./Kacelnik, A./Kareev, Y./Klein, G./Martignon, L./Payne, J. W./Schlag, K. H. (2002): Why and when do simple heuristics work? In: Gigerenzer, G./Selten, R. (Hg.): Bounded rationality: the adaptive toolbox. Cambridge, S. 173–190.

Goldstein, D./Gigerenzer, G. (1999): The recognition heuristic: How ignorance makes us smart. In: Gigerenzer, G./Todd, P. M./ABC Research Group (Hg.): Simple heuristics that make us smart. Oxford: University Press, S. 37–58.

Goldstein, D./Gigerenzer, G. (2002): Models of ecological rationality: the recognition heuristics. In: Psychological Review, 109 (1): 75–90.

Groß-Schuler, A. (2002): Irreversibilität und Unternehmensstrategie: Das Konzept der Sunk Costs und seine Entscheidungsrelevanz. Wiesbaden: DUV.

Grüne-Yanoff, T. (2015): Models of temporal discounting 1937–2000: an interdisciplinary exchange between economics and psychology. In: Science in Context, 28 (4): 675–713.

Gschwandtner, A./Lambson, V. E. (2002): The effects of sunk costs on entry and exit: evidence from 36 countries. In: Economics Letters, 77 (1): 109–115.

Guski, R. (1996): Wahrnehmen: Ein Lehrbuch. Stuttgart: Kohlhammer.

Günther, T./Detzner, M. (2012): Das Risiko-Entscheidungsverhalten von Managern: Ergebnisse einer empirischen Studie. In: Altenburger, O. A. (Hg.): Instrumente und Aufgaben des Controllings: Mit zahlreichen empirischen Befunden. Wien: Linde, S. 9–52.

Guo, P. (2019): Focus theory of choice and its application to resolving the St. Petersburg, Allais, and Ellsberg paradoxes and other anomalies. In: European Journal of Operational Research, 276 (3): 1034–1043.

Hagenbüchle, R. (2002): Was heißt paradox? Eine Standortbestimmung. In: Hagenbüchle, R./Geyer, P. (Hg.): Das Paradox - Eine Herausforderung des abendländischen Denkens. Würzburg: Königshausen & Neumann, S. 27–43.

Halevy, Y. (2015): Time consistency: stationarity and time invariance. In: Econometrica, 83 (1): 335–352.

Haller, P. M./Naegele, U. (2013): Praxishandbuch interkulturelles Management. Wiesbaden: Springer Gabler.

Haller, P. M./Naegele, U./Berger, S. (2019): Bridging cultural barriers: How to overcome preconceptions in cross-cultural relationships. Cham: Springer.

Haller, R./Barth, F. (2014): Berühmte Aufgaben der Stochastik. München: De Gruyter Oldenbourg.

Harvey, C. M. (1986): Value functions for infinite-period planning. In: Management Science, 32 (9): 1123–1139.

Harvey, C. M. (1995): Proportional discounting of future costs and benefits. In: Mathematics of Operations Research, 20 (2): 381–399.

Hayden, B. Y./Platt, M. L. (2009): The mean, the median, and the St. Petersburg paradox. In: Judgment and Decision Making, 4 (4): 256–272.

Hempelmann, B./Lürwer, M./Brackschulze, K. (2002): Modellierung der Zeitpräferenz bei intertemporalen Entscheidungen. In: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 31 (7): 381–386.

Hendry, J. (2019): Understanding Japanese society. 5. Aufl., London u. a.: Routledge.

Hering, T. (2017): Investitionstheorie. 5. Aufl., München u. a.: De Gruyter Oldenbourg.

Hertwig, R./Gigerenzer, G. (1999): The „conjunction fallacy“ revisited: how intelligent inferences look like reasoning errors. In: Journal of Behavioral Decision Making, 12 (4): 275–305.

Hertwig, R./Hoffrage, U. (2001): Eingeschränkte und ökologische Rationalität: Ein Forschungsprogramm. In: Psychologische Rundschau, 52 (1): 11–19.

Heukelom, F. (2015): A history of the Allais paradox. In: The British Journal for the History of Science, 48 (1): 147–169.

Hirsch, B. (2002): Werte-Controlling: Zur Berücksichtigung von Wertvorstellungen in Unternehmensentscheidungen. Wiesbaden: Gabler.

Hirsch, B. (2007): Controlling und Entscheidungen: Zur verhaltenswissenschaftlichen Fundierung des Controllings. Tübingen: Mohr Siebeck.

Hoffjan, A. (2009): Internationales Controlling. Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Hoffrage, U./Hertwig, R./Gigerenzer, G. (2005): Die ökologische Rationalität einfacher Entscheidungs- und Urteilsheuristiken. In: Siegenthaler, H. (Hg.): Rationalität im Prozess kultureller Evolution. Tübingen: Mohr Siebeck, S. 65–89.

Hofstede, G. (1994): The business of international business is culture. In: International Business Review, 3 (1): 1–14.

Holler, M. J./Illing, G./Napel, S. (2019): Einführung in die Spieltheorie. 8. Aufl., Berlin u. a.: Springer Gabler.

Hrgović, J./Hromatko, I. (2018): The time and social context in sunk-cost effect. In: Evolutionary Psychological Science, 4 (3): 258–267.

Huang, Y.-S./Wu, H.-C. (2007): A power law type of time preference on intertemporal choices. In: European Journal of Operational Research, 183 (2): 718–728.

Huber, B./Runkel, M. (2005): Hyperbolisches Diskontieren und Zeit(in)konsistenz. In: Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 34 (2): 76–81.

Imai, T./Rutter, T. A./Camerer, C. F. (2021): Meta-analysis of present-bias estimation using convex time budgets. In: The Economic Journal, 131, 636 (Mai): 1788–1814.

Jensen, N. E. (1967a): An introduction to Bernoullian utility theory: Part I - utility functions. In: The Swedish Journal of Economics, 69 (3): 163–183.

Jensen, N. E. (1967b): An introduction to Bernoullian utility theory: Part II - interpretation, evaluation and application; a critical survey. In: The Swedish Journal of Economics, 69 (4): 229–247.

Jost, P.-J. (2008): Organisation und Motivation: Eine ökonomisch-psychologische Einführung. 2. Aufl., Wiesbaden: Gabler.

Kahneman, D. (1992): Reference points, anchors, norms, and mixed feelings. In: Organizational Behaviour and Human Decision Processes, 51 (2): 296–312.

Kahneman, D./Frederick, S. (2004): Attribute substitution in intuitive judgment. In: Augier, M./March, J. (Hg.): Models of a man: Essays in memory of Herbert A. Simon. Cambridge: MIT Press, S. 411–432.

Kahneman, D./Knetsch, J. L. (1992): Valuing public goods: The purchase of moral satisfaction. In: Journal of Environmental Economics and Management, 22 (1): 57–70.

Kahneman, D./Knetsch, J. L./Thaler, R. H. (1990): Experimental tests of the endowment effect and the Coase theorem. In: Journal of Political Economy, 98 (6): 1325–1348.

Kahneman, D./Tversky, A. (1971): The belief in the law of small numbers. In: Psychological Bulletin, 76 (2): 105–110.

Kahneman, D./Tversky, A. (1972): Subjective probability: a judgment of representativeness. In: Cognitive Psychology, 3 (o. A.): 430–454.

Kahneman, D./Tversky, A. (1973): On the psychology of prediction. In: Psychological Review, 80 (4): 237–251.

Kahneman, D./Tversky, A. (1979): Prospect theory: an analysis of decision under risk. In: Econometrica, 47 (2): 263–292.

Kalenscher, T./Pennartz, C. M. A. (2008): Is a bird in the hand worth two in the future? The neuroeconomics of intertemporal decision-making. In: Progress in Neurobiology, 84 (o. A.): 284–315.

Kannetzky, F. (2000): Paradoxes Denken. Paderborn: mentis.

Keefer, Q. A. W. (2019): Do sunk costs affect expert decision making? Evidence from the within-game usage of NFL running backs. In: Empirical Economics, 56 (5): 1769–1796.

Keren, G./Roelofsma, P. H. M. P. (1995): Immediacy and certainty in intertemporal choice. In: Organizational Behavior and Human Decision Processes, 63 (3): 287–297.

Kesselring, T. (2013): Formallogischer Widerspruch, dialektischer Widerspruch, Antinomie. Reflexionen über den Widerspruch. In: Müller, S. (Hg.): Jenseits der Dichotomie – Elemente einer sozialwissenschaftlichen Theorie des Widerspruchs. Wiesbaden: Springer VS, S. 15–38.

Keynes, J. M. (1921): A treatise on probability. London: Macmillan.

Keys, J. B./Denton, L. T./Miller, T. R. (1994): The Japanese management theory jungle-revisited. In: Journal of Management, 20 (2): 373–402.

Kinari, Y./Ohtake, F./Tsutsui, Y. (2016): Time discounting: declining impatience and interval effect. In: Ikeda, S./Kato, H. K./Ohtake, F./Tsutsui, Y. (Hg.): Behavioral economics of preferences, choices, and happiness. Tokyo u. a.: Springer, S. 49–76.

Kirsch, W. (1970): Entscheidungsprozesse. Bd. 1: Verhaltenswissenschaftliche Ansätze der Entscheidungstheorie. Wiesbaden: Gabler.

Kirsch, W. (1971): Entscheidungsprozesse. Bd. 2: Informationsverarbeitungstheorie des Entscheidungsverhaltens. Wiesbaden: Gabler.

Klein, R./Scholl, A. (2011): Planung und Entscheidung. 2. Aufl., München: Vahlen.

Klix, F. (1976): Information und Verhalten. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Kobelko, M. (2009): The end of Japanese-style management? In: Long Range Planning, 42 (4): 439–462.

Kono, T. (1984): Long range planning of U. K. and Japanese corporations: a comparative study. In: Long Range Planning, 17 (2): 58–76.

Krelle, W. (1968): Präferenz- und Entscheidungstheorie. Tübingen: J. C. B. Mohr.

Kristensen, H./Gärling, T. (1997): The effect of anchor points and reference points on negotiation process and outcome. In: Organizational Behaviour and Human Decision Processes, 71 (1): 85–94.

Kruschwitz, L./Lorenz, D. (2019): Investitionsrechnung. 15. Aufl., München u. a.: De Gruyter Oldenbourg.

Kunz, J. (2013): Die psychologische und ökonomische Perspektive in der BWL: Eine Diskussion am Beispiel der Literatur zum Escalation of Commitment. In: Die Betriebswirtschaft, 73 (3): 205–219.

Kutschker, M./Schmid, S. (2011): Internationales Management. 7. Aufl., München u. a.: Oldenbourg.

Lachhammer, J. L. (1977): Investitionsrechnung und Investitionsentscheidungsprozess - Bd. 1: Elemente eines verhaltenswissenschaftlichen Erklärungsmodells. München u. a.: Ernst Reinhardt.

Laibson, D. (1997): Golden eggs and hyperbolic discounting. In: The Quarterly Journal of Economics, 112 (2): 443–477.

Laland, K. (2001): Imitation, social learning, and preparedness as mechanisms of bounded rationality. In: Gigerenzer, G./Selten, R. (Hg.): Bounded rationality – the adaptive toolbox. Cambridge: MIT Press, S. 233–247.

Laux, H./Gillenkirch, R. M./Schenk-Mathes, H. Y. (2018): Entscheidungstheorie. 10. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Laux, H./Liermann, F. (2005): Grundlagen der Organisation: Die Steuerung von Entscheidungen als Grundproblem der Betriebswirtschaftslehre. 6. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Ledwig, M. (2000): Newcomb's problem. Diss., Universität Konstanz.

Lengwiler, Y. (2009): The origins of expected utility theory. In: Hafner, W./Zimmermann, H. (Hg.): Vinzenz Bronzin's option pricing models - exposition and appraisal. Berlin u. a.: Springer, S. 535–545.

Lenzen, W. (1997): Die Newcomb-Paradoxie - und ihre Lösung. In: Lenzen, W. (Hg.): Das weite Spektrum der analytischen Philosophie – Festschrift für Franz von Kutschera. Berlin u. a.: de Gruyter, S. 160–177.

Levi, I. (1975): Newcomb's many problems. In: Theory and Decision, 6 (2): 161–175.

Levi, I. (1982): A Note on Newcombmania. In: The Journal of Philosophy, 79 (6): 337–342.

Lewis, D. (1979): Prisoners' dilemma is a Newcomb problem. In: Philosophy & Public Affairs, 8 (3): 235–240.

Li, Z./Zenker, F. (2021): Newcomb's problem isn't a choice dilemma. In: Synthese, im Druck: https://doi.org/10.1007/s11229-020-03018-y

Liebovitch L. S./Scheurle D. (2000): Two lessons from fractals and chaos. In: Complexity, 5 (4): 34–43.

Lindblom, C. E. (1959): The science of "muddling through". In: Public Administration Review, 19 (2): 79–88.

Linneweh, K./Hofmann, L. M. (2009): Persönlichkeitsmanagement. In: Rosenstiel, L. von/Regnet, E./Domsch, M. E. (Hg.): Führung von Mitarbeitern: Handbuch für erfolgreiches Personalmanagement. 6. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel, S. 317–335.

Loewenstein, G./Prelec, D. (1992): Anomalies in intertemporal choice: evidence and an interpretation. In: The Quarterly Journal of Economics, 107 (2): 573–597.

Loewenstein, G./Thaler, R. H. (1989): Anomalies: intertemporal choice. In: The Journal of Economic Perspectives, 3 (4): 181–193.

Lynch Jr., J. G./Zauberman, G. (2006): When do you want it? Time, decisions, and public policy. In: Journal of Public Policy & Marketing, 25 (1): 67–78.

Łukowski, P. (2011): Paradoxes. Heidelberg u. a.: Springer.

Machina, M. J. (1982): "Expected utility" analysis without the independence axiom. In: Econometrica, 50, (2): 277–323.

Machina, M. J. (1989): Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty. In: Journal of Economic Literature, 27 (4): 1622–1668.

Mallpress, D. E. W. (2021): Some theoretical notes on spatial discounting. In: Behavioural Processes, 186, im Druck: https://doi.org/10.1016/j.beproc.2021.104355.

March, J. G./Simon, H. A. (1958): Organizations. New York: John Wiley & Sons.

Mazur, J. E. (1987): An adjustment procedure for studying delayed reinforcement. In: Commons, M. L./Mazur, J. E./Nevins, J. A./Rachlin, H. (Hg.): Quantitative analysis of behaviour - vol. 5: The effect of delay and intervening events on reinforcement value. Hillsdale, NJ u. a.: Erlbaum, S. 55–73.

McAlvanah, P. (2010): Subadditivity, patience, and utility: The effects of dividing time intervals. In: Journal of Economic Behavior & Organization, 76 (2): 325–337.

McDonald, R. L/Chilton, S. M./Jones-Lee, M. W./Metcalf, H. R. T. (2017): Evidence of variable discount rates and non-standard discounting in mortality risk valuation. In: Journal of Environmental Economics and Management, 82 (March): 152–167.

Mead, R. (1994): International management – cross cultural dimensions. Cambridge: University Press.

Menger, K. (1934): Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre. In: Zeitschrift für Nationalökonomie, 51 (5): 459–485.

Menger, K. (1967): The role of uncertainty in economics. In: Shubik, M. (Hg.): Essays in mathematical economics in honor of Oskar Morgenstern. Princeton: University Press, S. 211–231.

Meschkowski, H. (1969): Wandlungen des mathematischen Denkens. 4. Aufl., Braunschweig: Vieweg.

Millner, A./Heal, G. (2018): Time consistency and time invariance in collective intertemporal choice. In: Journal of Economic Theory, 176 (July): 158–169.

Mongin, P. (2019): The Allais paradox: what it became, what it really was, what it now suggests to us. In: Economics & Philosophy, 35 (3): 423–459.

Moran, S./Ritov, I. (2002): Initial perception in negotiations: evaluation and response to 'logrolling' offers. In: Journal of Behavioural Decision Making, 15 (2): 101–124.

Morgenstern, O. (1976): The collaboration between Oskar Morgenstern and John von Neumann on the Theory of Games. In: Journal of Economic Literature, 14 (3): 805–816.

Muck, P. M. (2006): Persönlichkeit und berufsbezogenes Sozialverhalten. In: Schuler, H. (Hg.): Lehrbuch der Personalpsychologie. 2. Aufl., Göttingen u. a.: Hogrefe, S. 527–577.

Müller, D. (2004): Realoptionsmodelle und Investitionscontrolling im Mittelstand. Wiesbaden: DUV.

Müller, D./Münnich, A. (2008): Implikationen internationaler Rechnungslegung für das Investitionscontrolling international tätiger Unternehmen. In: Funk, W./Rossmanith, J. (Hg.): Internationale Rechnungslegung und Internationales Controlling. Wiesbaden: Gabler, S. 517–543.

Neumann, J. M. von/Morgenstern, O. (1953): Theory of games and economic behavior. 3. Aufl., Princeton: University Press.

Nitzsch, R. von (2021): Entscheidungslehre. 11. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Northcraft, G. B./Neale, M. A. (1987): Experts, amateurs, and reale estate: anchoring-and-adjustment perspective on property pricing decisions. In: Organizational Behaviour and Human Decision Processes, 39 (1): 84–97.

Nozick, R. (1969): Newcomb's problem and two principles of choice. In: Rescher, N. (Hg.): Essays in honor of Carl G. Hempel: A tribute on the occasion of his sixty-fifth birthday. Dordrecht: Reidel, S. 114–146.

O'Brien, J./Folta, T. (2009): Sunk costs, uncertainty and market exit: a real options perspective. In: Industrial and Corporate Change, 18 (5): 807–833.

Ok, E. A./Masatlioglu, Y. (2007): A theory of (relative) discounting. In: Journal of Economic Theory, 137 (1): 214–245.

Okabe, T./Nii, M./Yoshimura, J. (2019): The median-based resolution of the St. Petersburg paradox. In: Physical Letters A, 383 (26): 1–4.

Pelzmann, L. (2012): Wirtschaftspsychologie: Behavioral Economics, Behavioral Finance, Arbeitswelt. 6. Aufl., Wien: Verlag Österreich.

Pfister, H.-R./Jungermann, H./Fischer, K. (2017): Die Psychologie der Entscheidung. 4. Aufl., Heidelberg u. a.: Spektrum, Akademie Verlag.

Phelps, E. S./Pollak, R. A. (1968): On second-best national saving and game-equilibrium growth. In: The Review of Economic Studies, 35 (2): 185–199.

Picot, A./Lange, B. (1979): Synoptische versus inkrementale Gestaltung des strategischen Planungsprozesses: Theoretische Grundlagen und Ergebnisse einer Laborstudie. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 31 (8): 569–596.

Popkowski Leszczyz, P. T. L./Pracejus, J. W./Shen, Y. (2008): Why more can be less: An inference-based explanation for hyper-subadditivity in bundle valuation. In: Organizational Behavior and Human Decision Processes, 105 (2): 233–246.

Prelec, D. (2004): Decreasing impatience: A criterion for non-stationary time preference and "hyperbolic" discounting. In: Scandinavian Journal of Economics, 106 (3): 511–532.

Prelec, D./Loewenstein, G. (1991): Decision making over time and under uncertainty: A common approach. In: Management Science, 37 (7): 770–786.

Rabin, M. (2000): Risk aversion and expected-utility theory: A calibration theorem. In: Econometrica, 68 (5): 1281–1292.

Rambaud, S. C./Fernández, P. O. (2020): Delay effect and subadditivity. Proposal of a new discount function: The asymmetric exponential discounting. In: Mathematics, 8 (3): 367. https://doi.org/10.3390/math8030367.

Rammsayer, T./Weber, H. (2016): Differentielle Psychologie – Persönlichkeitstheorien. 2. Aufl., Göttingen u. a.: Hogrefe.

Read, D. (2001): Is time-discounting hyperbolic or subadditive? In: Journal of Risk and Uncertainty, 23 (1): 5–32.

Read, D./Loewenstein, G./Kalyanaraman, S. (1999): Mixing virtue and vice: combining the immediacy effect and the diversification heuristic. In: Journal of Behavioral Decision Making, 12 (4): 257–273.

Read, D./Roelofsma, P. H. M. P. (2003): Subadditive versus hyperbolic discounting: A comparison of choice and matching. In: Organizational Behavior and Human Decision Processes, 91 (2): 140–153.

Richardson, R. (1998): Heuristics and satisficing. In: Bechtel, W./Graham, G. (Hg.): A companion to cognitive science. Malden u. a.: Blackwell, S. 566–575.

Riesenhuber, M. (2006): Die Fehlentscheidung: Ursache und Eskalation. Wiesbaden: DUV.

Rieskamp, J./Hoffrage, U. (1999): When do people use simple heuristics, and how can we tell? In: Gigerenzer, G./Todd, P. M./ABC Research Group (Hg.): Simple heuristics that make us smart. Oxford: University Press, S. 141–167.

Roelofsma, P. H. M. P. (1996): Modelling intertemporal choices: An anomaly approach. In: Acta Psychologica, 93 (1–3): 5–22.

Roth, S./Robbert, T./Straus, L. (2015): On the sunk-cost effect in economic decision-making: a meta-analytic review. In: Business Research, 8 (1): 99–138.

Salois, M. J./Moss, C. B. (2011): A direct test of hyperbolic discounting using market asset data. In: Economics Letters, 112 (3): 290–292.

Samuelson, P. A. (1937): A note on measurement of utility. In: The Review of Economic Studies, 4 (2): 155–161.

Samuelson, P. A. (1960): The St. Petersburg paradox as a divergent double limit. In: International Economic Review, 1 (1): 31–37.

Samuelson, P. A. (1977): St. Petersburg paradoxes: defanged, dissected, and historically described. In: Journal of Economic Literature, 15 (1): 24–55.

Schäfer, H. (2005): Unternehmensinvestitionen. 2. Aufl., Heidelberg: Physica.

Schatzki, T. (2003): Options, uncertainty and sunk costs: an empirical analysis of land use change. In: Journal of Environmental Economics and Management, 46 (1): 86–105.

Schaub, H. (1997): Sunk Costs, Rationalität und ökonomische Theorie. Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Schmidt, U. (2004): Alternatives to expected utility: formal theories. In: Barberà, S./ Hammond, P. J./Seidl, C. (Hg.): Handbook of utility theory - vol. II - Extensions. Boston u. a.: Kluwer, S. 757–837.

Schneeweiß, H. (1966): Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin u. a.: Springer.

Schneider, D. (1980): Investition und Finanzierung. 5. Aufl., Wiesbaden: Gabler.

Schneider, D. (1981): Geschichte betriebswirtschaftlicher Theorie: Allgemeine Betriebswirtschaftslehre für das Hauptstudium. München u. a.: Oldenbourg.

Schneider, D. (2011): Betriebswirtschaftslehre als Einzelwirtschaftstheorie der Institutionen. Wiesbaden: Gabler.

Scholten, M./Read, D. (2006): Discounting by intervalls: A generalized model of intertemporal choice. In: Management Science, 52 (9): 1424–1436.

Seidenfeld, T. (1988): Decision theory without "independence" or without "ordering": what is the difference? In: Economics & Philosophy, 4 (2): 267–290.

Seidl, C. (2013): The St. Petersburg paradox at 300. In: Journal of Risk and Uncertainty, 46 (3): 247–264.

Shapley, L. S. (1977): The St. Petersburg paradox: A con game? In: Journal of Economic Theory, 14 (2): 439–442.

Simon, H. A. (1957): Models of man. New York u. a.: Wiley.

Simon, H. A. (1990): Invariants of human behavior. In: Annual Review of Psychology, 41 (1): 1–19.

Sofis, M. J/Jarmolowicz, D. P./Hudnall, J. L./Reed, D. D. (2015): On sunk costs and escalation. In: The Psychological Record, 65 (3): 487–494.

Staehle, W. (1999): Management: Eine verhaltenswissenschaftliche Perspektive. 8. Aufl., München: Vahlen.

Starmer, C./Sugden, R. (1993): Testing for juxtaposition and event-splitting effects. In: Journal of Risk and Uncertainty, 6 (3): 235–254.

Stalnaker, R. (2018): Game theory and decision theory (causal and evidential). In: Ahmed, A. (Hg.): Newcomb's problem. Cambridge: University Press, S. 180–200.

Staw, B. M. (1976): Knee-deep in the big muddy: a study of escalating commitment to a chosen course of action. In: Organizational Behavior and Human Performance, 16 (1): 27–44.

Stegmüller, W. (1979): Moderne Wissenschaftstheorie. Ein Überblick. Teil I: Moderne Logik und Grundlagen der Mathematik. In: Die Naturwissenschaften, 66 (8): 377–380.

Steinhaus, H. (1949): The so-called Petersburg paradox. In: Colloquium Mathematicum, 2 (1): 56–58.

Steinmann, H./Schreyögg, G./Koch, J. (2013): Management: Grundlagen der Unternehmensführung. 7. Aufl., Wiesbaden: Gabler.

Streich, P./Levy, J. S. (2007): Time horizons, discounting, and intertemporal choice. In: Journal of Conflict Resolution, 51 (2): 199–226.

Strotz, R. H. (1955/56): Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. In: The Review of Economic Studies, 23 (3): 165–180.

Strulik, H. (2021a): Intertemporal choice with health-dependent discounting. In: Mathematical Social Sciences, 111 (May): 19–25.

Strulik, H. (2021b): Hyperbolic discounting and the time-consistent solution of three canonical environmental problems. In: Journal of Public Economic Theory, 23 (3): 462–486.

Strulik, H./Trimborn, T. (2018): Hyperbolic discounting can be good for your health. In: Journal of Economic Psychology, 69 (Dez.): 44–57.

Sugimoto, Y. (2021): An introduction to Japanese society. 5. Aufl., Cambridge: University Press.

Székely, G. J./Richards, D. S. P. (2004): The St. Petersburg paradox and the crash of high-tech stocks in 2000. In: The American Statistician, 58 (3): 225–231.

Takemura, K. (2021): Behavioral decision theory. 2. Aufl., Singapore: Springer.

Thaler, R. H. (1980): Toward a positive theory of consumer choice. In: Journal of Economic Behavior & Organization, 1 (1): 39–60.

Thaler, R. H. (1981): Some empirical evidence on dynamic inconsistency. In: Economic Letters, 8 (3): 201–207.

Thaler, R. H./Shefrin, H. M. (1981): An economic theory of self-control. In: Journal of Political Economy, 89 (2): 392–406.

Thomas, D. C. (2008): Cross-cultural management. 2. Aufl., Los Angeles u. a.: Sage.

Todd, P. M./Gigerenzer, G. (2003): Bounding rationality to the world. In: Journal of Economic Psychology, 24 (2): 143–165.

Trost, R. (1991): Entscheidungen unter Risiko: Bernoulliprinzip und duale Theorie. Frankfurt/M. u. a.: Peter Lang.

Tversky, A./Fox, C. R. (1995): Weighing risk and uncertainty. In: Psychological Review, 102 (2): 269–283.

Tversky, A./Kahneman, D. (1974): Judgement under uncertainty: heuristics and biases. In: Science, 185 (4157): 1124–1131.

Tversky, A./Kahneman, D. (1981): The Framing of decisions and the psychology of choice. In: Science, 211 (4481): 453–458.

Tversky, A./Kahneman, D. (1983): Extensional versus intuitive reasoning: the conjunction fallacy in probability judgement. In: Psychological Review, 90 (4): 293–315.

Tversky, A./Kahneman, D. (1986): Rational choice and the framing of decisions. In: The Journal of Business, 59 (4/part 2): S 251–S 278.

Tversky, A./Kahneman, D. (1992): Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty. In: Journal of Risk and Uncertainty, 5(4): 297–323.

Tversky, A./Thaler, R. H. (1990): Anomalies: preference reversals. In: The Journal of Economic Perspectives, 4 (2): 201–211.

van der Pol, M./Cairns, J. (2002): A comparison of the discounted utility model and hyperbolic discounting models in the case of social and private intertemporal preferences for health. In: Journal of Economic Behavior & Organization, 49 (1): 79–96.

Vasconselos, M. (2020): The road ahead for sunk costs. In: Learning & Behavior, 48 (1): 1–2.

Vivian, R. W. (2003): Solving Daniel Bernoulli's St Petersburg paradox: The paradox which is not and never was. In: South African Journal of Economic and Management Sciences, 6 (2): 331–345.

Vivian, R. W. (2013): Ending the myth of the St. Petersburg paradox. In: South African Journal of Economic and Management Sciences, 16 (3): 347–364.

Voigt, K.-I. (1992): Strategische Planung und Unsicherheit. Wiesbaden: Gabler.

Vollmer, G. (1990): Paradoxien und Antinomien – Stolpersteine auf dem Weg zur Wahrheit. In: Naturwissenschaften 77 (2): 49–66.

Vollmer, G. (2002): Paradoxien und Antinomien. Stolpersteine auf dem Weg zur Wahrheit. In: Hagenbüchle, R./Geyer, P. (Hg.): Das Paradox - Eine Herausforderung des abendländischen Denkens. Würzburg: Königshausen & Neumann, S. 159–189.

Walther, H. (2010): Anomalies in intertemporal choice, time-dependent uncertainty and expected utility – A common approach. In: Journal of Economic Psychology, 31 (1): 114–130.

Webb, C. S. (2016): Continuous quasi-hyperbolic discounting. In: Journal of Mathematical Economics, 64 (Mai): 99–106.

Weber, B. J./Chapman, G. B. (2005): The combined effects of risk and time on choice: Does uncertainty eliminate the immediacy effect? Does delay eliminate the certainty effect? In: Organizational Behavior and Human Decision Processes, 96 (2): 104–118.

Weber, H./Rammsayer, T. (2012): Differentielle Psychologie: Persönlichkeitsforschung. Göttingen u. a.: Hogrefe.

Weber, T. A. (2016): A robust resolution of Newcomb's paradox. In: Theory and Decision, 81 (3): 339–356.

Weikard, H.-P. (2001): Zeitpräferenz und Zeitkonsistenz: Zur Rationalität sequenzieller Entscheidungen. In: Agrarwirtschaft, 50 (8): 490–497.

Winkler, B./Hofbauer, H. (2010): Das Mitarbeitergespräch als Führungsinstrument. Handbuch für Führungskräfte und Personalverantwortliche. 4. Aufl., München: Hanser.

Wiswede, G. (2012): Einführung in die Wirtschaftspsychologie. 5. Aufl., Stuttgart: UTB.

Wolf, J. (2020): Organisation, Management, Unternehmensführung: Theorien, Praxisbeispiele und Kritik. 6. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Wolpert, D. H./Benford, G. (2013): The lesson of Newcomb's paradox. In: Synthese, 190 (9): 1637–1646.

Ybema, S./Byun, H. (2009): Cultivating cultural differences in asymmetric power relations. In: International Journal of Cross Cultural Management, 9 (3): 339–358.

Yukalov, V. I. (2021): A resolution of St. Petersburg paradox. In: Journal of Mathematical Economics, im Druck: https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2021.102537.

Zauberman, G./Kim, B. K./Malkoc, S. A./Bettman, J. R. (2009): Discounting time and time discounting: Subjective time perception and intertemporal preferences. In: Journal of Marketing Research, 46 (4): 543–556.

Zauberman, G./Lynch Jr., J. G. (2005): Resource slack and propensity to discount delayed investments of time versus money. In: Journal of Experimental Psychology, 134 (1): 23–37.

Zayer, E. (2007): Verspätete Projektabbrüche in F&E: eine verhaltensorientierte Analyse. Wiesbaden: DUV.

Kapitel 3

Theorie und Praxis kollektiver Entscheidungen

3.1 Grundlagen

Es wurde schon herausgestellt, dass ein Großteil von investitionsrelevanten Entscheidungen nicht durch Einzelpersonen getroffen, sondern durch spezielle Entscheidungsgremien bzw. in Projektgruppen erarbeitet wird.[1] Eine Gruppe bzw. ein Gremium[2] ist allgemein gekennzeichnet durch:[3]

- mindestens drei Personen, zwischen denen eine direkte Kommunikation möglich ist,
- gemeinsame Aufgaben, die durch die gemeinsame Bearbeitung aller bzw. einzelner Bereiche der Problemstellung erfüllt werden,
- eine vorliegende Rollenverteilung, die dazu führt, dass die Mitglieder aufeinander angewiesen sind.

Diese Eigenschaften führen häufig dazu, dass sich die Personen selbst als Gruppe wahrnehmen („Wir-Gefühl") und einander als Gruppenmitglieder anerkennen. Zur Abgrenzung des Entscheidungsgremiums von anderen Gruppen, wie z. B. Arbeitsgruppen, ist die:

- **Autorisierung** und **klar definierte Beschlussfassungskompetenz** sowie
- **Zuweisung von Stimmrechten** für die Mitglieder

als Definitionsmerkmal hervorzuheben. Nach verschiedenen Gesichtspunkten können unterschiedliche Gruppenarten differenziert werden.[4]

Einerseits ist für die weitere Betrachtung die Unterscheidung zwischen **formellen und informellen Gruppen** wichtig. **Formelle Gruppen** ergeben sich aus der Organisation des Unternehmens, wie z. B. Abteilungen oder Projektgruppen. Von diesen im Hinblick auf die Aufgabenerfüllung geschaffenen Gruppen sind informelle Gruppen zu unterscheiden, die auf der Grundlage persönlicher Wünsche und Ziele entstehen. **Informelle Gruppen** können einen großen Einfluss haben und kaum wahrnehmbare, nicht vorgesehene Verbindungswege zwischen den Organisationseinheiten etablieren. Das Verhalten

[1] Vgl. 1. Band, Abschn. 2.1.3.1.1 auf S. 93.

[2] In der Literatur werden die Begriffe „Gremium", „Gruppe" und „Team" auch synonym verwendet. Vgl. Vahs (2012: 83).

[3] Vgl. Kirsch (1971: 53–59); Sader (2002: 39); Rosenstiel (2009: 325–330); Stock-Homburg/Groß (2019: 618).

[4] Vgl. Wegge (2006: 581–584).

© Der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

D. Müller, *Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36597-4_3

von Mitgliedern informeller Gruppen kann im Widerspruch zu den Aufgaben und Zielen der jeweiligen Mitglieder der formellen Gruppe stehen. Andererseits bewirken informelle Gruppen auch positive Effekte, wenn z. B. Lücken in der Organisation geschlossen oder unbürokratische kurze Wege zur Aufgabenerfüllung genutzt werden, welche von formellen Gruppen nicht geschaffen werden können.[5]

Andererseits kann zwischen rein ausführenden Gruppen sowie Arbeitsgruppen und Entscheidungsgremien differenziert werden. Im weiteren Verlauf werden ausführende Gruppen, in denen keine Problemlösung erfolgt, aus der Betrachtung ausgeschlossen.

Gremien werden gebildet, um letztendlich eine „bessere" Entscheidung im Vergleich mit der Individualentscheidung zu treffen. Diesen angestrebten positiven Effekten stehen häufig auch nicht beabsichtigte negative Effekte entgegen (vgl. Tabelle 3.1).

Tab. 3.1: Ausgewählte Effekte von Gruppenentscheidungen. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Auer-Rizzi (1998: 4–70); Sader (2002: 214–220); Eisenberg/Littkemann (2006: 684–685); Riesenhuber (2006: 132–135); Heil (2007: 202–206); Ponick (2007: 31–32); Dudda et al. (2010: 251).

Beabsichtigte Effekte	Unbeabsichtigte Effekte
– erhöhte Kapazität zur Aufnahme und Verarbeitung von Informationen – breitere Wissens- und Erfahrungsbasis – erhöhte Qualität und Quantität von Prognose- und Bewertungsprozessen sowie Lösungsvorschlägen – Ausgleich von Interessen und Irrtümern – erhöhte Legitimation und Akzeptanz der Ergebnisse – erhöhte Motivation	– kosten- und zeitintensive Diskussionsprozesse – Gefahr „fauler Kompromisse" – Gefahr von Dissens und Fehlinterpretation – Tendenz zur Konformität – Tendenz zur Polarisierung – Gruppenbefangenheit – Trittbrettfahrer-Effekte

Voraussetzung für die Abstimmung im Gremium ist dessen **Bildung**. Ein Gremium kann freiwillig oder auf Basis von Anweisungen bzw. gesetzlichen Vorschriften gebildet werden. Um ein Gremium zu bilden, ist festzulegen:

- wie groß das Gremium ist, also **wie viele Sitze** vergeben werden, und
- **nach welchen Kriterien** diese zu vergeben sind.

Diese Frage ist deshalb von grundlegender Bedeutung, da diese Festlegungen die Art der Zusammensetzung und die Größe des Gremiums determinieren

[5] Vgl. Berthel/Becker (2010: 112–113).

und den Rahmen für alle späteren kollektiven Entscheidungen aufspannen.[6] In diesem Zusammenhang ist zwischen den Elementen Mitglied, Sitz und Stimmrecht zu unterscheiden. Die Mitgliedschaft drückt die Zugehörigkeit zu einem Gremium aus und ist Voraussetzung für den Sitz und das Stimmrecht. Die Unterscheidung ist deshalb erforderlich, weil nicht in jedem Gremium automatisch jedes Mitglied über genau einen Sitz und genau ein Stimmrecht verfügt. Diese Relation muss durch Bestimmung der Zahl und der Vergabemodalitäten festgelegt werden.

Die Relation von Sitz und Mitglied kann nach dem einfachsten Prinzip mit einem Sitz pro Mitglied festgelegt werden. Denkbar ist jedoch auch die Zuteilung von mehreren Sitzen zu einem Mitglied.[7] Die Verteilung der Sitze kann entweder nach:

- inhaltlichen Kriterien,
- dem Rotationsprinzip oder
- dem Losverfahren

erfolgen.

Inhaltliche Kriterien, wie z. B. soziale, wirtschaftliche oder geografische Kriterien, sollen entweder die Betroffenheit von Personengruppen (z. B. Anspruchsgruppen) von den Entscheidungen des Gremiums widerspiegeln und eine adäquate Mitsprache ermöglichen oder durch die Einbindung von unbeteiligten Experten bzw. Ratgebern die Qualität der Entscheidung erhöhen.

Die **Turnus- oder Rotationsregel** ist ein Erbe der aristokratischen Staatsordnung, das schon in einigen Verfassungsentwürfen der athenischen Demokratie zu finden ist und die Idee der Gleichheit verfolgt. Dies wird erreicht, indem Entscheidungsträger turnusmäßig wechseln und deshalb nicht zu lange in der entsprechenden Position tätig sind.[8]

Das **Losverfahren** kommt i. d. R. nur zum Einsatz, wenn die soeben beschriebenen Verfahren zu einer Pattsituation der Sitzverteilung führen. Die Legitimation des Loses als quasi entscheidende Instanz ist nicht unumstritten, da anstelle von ausgesuchten und rational begründeten und begründbaren Kriterien der Zufall als Entscheidungskriterium tritt. Das Los kann jedoch als sach- und wertneutralstes Kriterium interpretiert werden, welches dann zum Einsatz kommt, wenn alle übrigen vorausgegangenen Begründungs- und Legitimationsverfahren zu keinem eindeutigen Ergebnis geführt haben. In diesem Falle wäre die Nichtauflösung der Pattsituation weniger rational als deren Auflösung durch das Losverfahren.[9]

[6] Vgl. Nitzsch (2021: 272–277).

[7] Ein Beispiel dafür ist die Sitzverteilung im Europäischen Parlament.

[8] Vgl. Thiele (2008: 200).

[9] Vgl. Thiele (2008: 206–207).

Nach der Festlegung der Sitzverteilung ist zu klären, welche Mitglieder über welche **Stimmenanzahl** verfügen. In politischen Gremien ist die Stimmenanzahl i. d. R. an die Sitzanzahl gekoppelt, weshalb ein Sitz einer Stimme entspricht. Demzufolge ist über die Sitzanzahl die Zuteilung von einer oder mehreren Stimmen pro Mitglied möglich. Darüber hinaus existieren jedoch auch einige Gremien, bei denen die Sitzverteilung von der Stimmverteilung abweicht.[10]

In einigen Gremien, wie z. B. der Hauptversammlung einer AG, ist die Kopplung „Mitglied–Sitz–Stimme" unüblich, weshalb die Stimmen direkt an Mitglieder gebunden sind. Auch in diesem Fall sind mehrere Stimmen je Mitglied möglich und gewollt. Für die Verteilung der Stimmenanzahl stehen wiederum diejenigen Kriterien zur Verfügung, welche auch zur Sitzverteilung herangezogen werden können. Dies sind inhaltliche Kriterien, wie z. B. die Stimmrechte bei Kapitalgesellschaften, oder auch das Rotationsprinzip, wie z. B. beim Rat der Europäischen Zentralbank seit 2015. In Abhängigkeit davon, wie das Problem und die Situation strukturiert sind, werden die folgenden Reinformen von Gruppenentscheidungen differenziert:[11]

- **Problemlösung:** Alle Gremienmitglieder verfolgen identische Ziele. Differenzen können im Hinblick auf die Bewertung und Auswahl der optimalen Alternative bestehen.
- **Überzeugung:** Die Gremienmitglieder verfolgen keine identischen Ziele. Diese Zieldivergenzen können jedoch durch Überzeugung überwunden werden.
- **Verhandlung:** Die Gremienmitglieder verfolgen keine identischen Ziele. Diese Divergenzen können nicht durch Überzeugung behoben werden, sondern bleiben im Prozess bestehen. Durch Verhandlungen wird nach einer Alternative gesucht, die von den Mitgliedern als fair empfunden und deshalb mitgetragen wird.
- **Politik:** Die Zielkonflikte zwischen den Mitgliedern sind offensichtlich. Ziel des Prozesses ist nicht die Findung einer fairen Lösung, sondern die Durchsetzung der Eigeninteressen der Mitglieder.

In den weiteren Darstellungen werden lediglich die Situationen „Problemlösung" und „Überzeugung" betrachtet.

Die Gruppenentscheidung entspricht der kollektiven Willensbildung und unterscheidet sich von der Individualentscheidung dadurch, dass der Entscheidungsprozess in allen Phasen oder in Teilphasen von mehreren Individuen gemeinsam durchlaufen wird, weshalb beide Prozesse einander ähneln.[12] **Ein wesentlicher Unterschied** besteht im Hinblick auf die Information wäh-

[10] Vgl. Thiele (2008: 263).

[11] Vgl. Eisenführ/Weber/Langer (2010: 368).

[12] Vgl. 1. Band, Abb. 1.1 auf S. 4.

rend der Teilphasen (vgl. Abbildung 3.1). Die Gremienmitglieder informieren sich, aber auch andere Mitglieder, bzw. werden von diesen informiert.

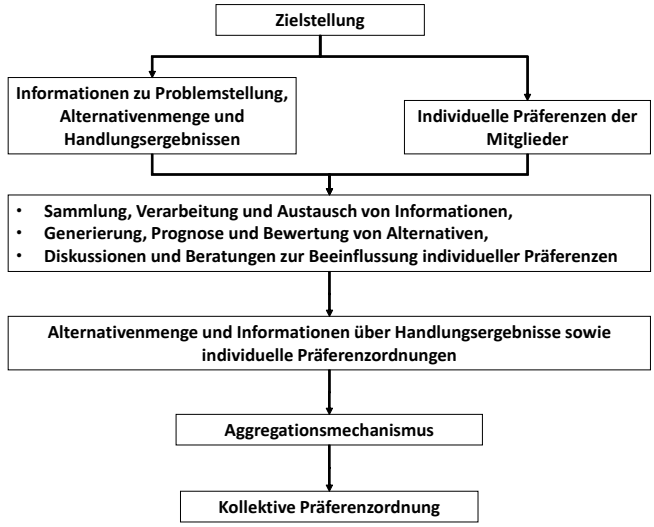


Abb. 3.1: Bildung der kollektiven Präferenzordnung. Quelle: Eigene Darstellung.

Ein weiterer Unterschied besteht in der **Beeinflussung** bzw. **Veränderung** der individuellen Präferenzordnungen. Dies geschieht im Rahmen von Diskussionen und Beratungen und spielt eine entscheidende Rolle in diesem Prozess. Aus Sicht eines Individuums kann es dabei zu einer – beabsichtigten oder auch unbeabsichtigten – Veränderung der eigenen Präferenzordnung oder zur Veränderung der Ordnungen anderer Mitglieder kommen. Deshalb werden die individuellen Präferenzordnungen am Ende des Problemlösungsprozesses i. d. R. anders aussehen als zu Beginn des Prozesses.[13] Für die weiteren Darstellungen ist folgende Grundkonstellation kennzeichnend:

- Die endliche, nicht leere Aktionenmenge $A = \{a_1, ..., a_m\}$ ist gegeben durch m Alternativen a_i mit $i = 1,....,m$, die sich gegenseitig ausschließen.
- Das Entscheidungsgremium besteht aus der endlichen, nicht leeren Menge an Mitgliedern $D = \{d_1, ..., d_n\}$, wobei $|D| \geq 2$.
- Auf diese Weise entsteht die Matrix der kollektiven Entscheidungssituation (vgl. Tab. 3.2).
- Jedes Gremienmitglied besitzt eine individuelle Präferenzordnung in Bezug auf A.

[13] Vgl. Laux/Gillenkirch/Schenk-Mathes (2018: 499–505).

Tab. 3.2: Grundstruktur der kollektiven Entscheidungssituation. Quelle: Eigene Darstellung.

Gremienmitglied / Aktion	d_1	d_2	d_3	$\cdots$	d_n
a_1				$\cdots$	
a_2				$\cdots$	
a_3				$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_m				$\cdots$	

- Die individuellen Präferenzordnungen müssen zu einer kollektiven Präferenzordnung zusammengefasst werden.

Die Situation aus Tab. 3.2 weist Ähnlichkeiten mit den bereits erläuterten Situationen auf.[14]

Die vorstehenden Darstellungen beziehen sich auf die rationelle Lösung von Sachproblemen. Konflikte, die nicht inhaltlicher Natur sind, sollten als solche identifiziert und von der Sachdiskussion losgelöst betrachtet werden.[15]

Der Fall, dass alle Mitglieder zu demselben Ergebnis kommen bzw. dieselbe Alternative als optimal identifizieren, wird höchst unwahrscheinlich sein. Gesucht wird ein Verfahren, welches die verschiedenen individuellen Präferenzordnungen zu einer kollektiven Ordnung zusammenfasst. Trotz der Ähnlichkeiten mit den bisher dargestellten Situationen lassen sich die bereits vorgestellten Verfahren nicht übertragen. Das liegt im Wesentlichen darin begründet, dass die Übereinstimmungen primär formaler Natur sind, jedoch liegen anstelle von Zeitpunkten oder Teilzielen nun Präferenzordnungen von selbstbestimmten Individuen vor. Diese können nicht mit den bisher bekannten Methoden bearbeitet werden. Es wird also ein Mechanismus gesucht, der die individuellen Präferenzen aggregiert. Dieser wird auch als **Aggregationsmechanismus** bezeichnet.[16] Prinzipiell sind als Aggregationsmechanismus zur Bildung der kollektiven Präferenz folgende Verfahren möglich:

- diktatorische Vorgabe (z. B. im Falle der Mafia, Familie, Orchester, Trainer),
- traditionelle bzw. rituelle Vorgaben (z. B. Weihnachten, Hochzeit, Beerdigung),
- Zufallsverfahren (z. B. Münzwurf, Würfeln) oder
- Abstimmungsregeln.

[14] Zum Beispiel mit multikriteriellen Entscheidungen vgl. Tab. 1.8 auf S. 48 und mit intertemporalen Entscheidungen vgl. Tab. 1.56 auf S. 188.

[15] Vgl. Nitzsch (2021: 277–285).

[16] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 212–214).

Für die hier vorliegende Darstellung ist lediglich die rationelle Vorgehensweise der Abstimmung relevant, die im Folgenden vorgestellt wird. Bei der Stimmabgabe drücken die Akteure ihre Ansicht bzw. die Ansicht derjenigen Interessengruppe aus, die sie in diesem Gremium vertreten. Der Wille des Gremiums wird durch die Zusammenfassung der Individualwillen gebildet. Es tritt die Frage auf, welche Abstimmungsregel dazu eingesetzt wird und in welcher Form die Alternativen einander gegenübergestellt werden.

Eisenberg/Littkemann führen aus, dass derartige Situationen in der Praxis vermieden werden, indem im Voraus die strittigen Probleme solange bearbeitet werden, bis ein Problem „*entscheidungsreif*“ ist. Die Abstimmung hätte demnach lediglich deklaratorischen Charakter, da in der Sache Einmütigkeit besteht und das Problem schon vor der Abstimmung entschieden ist.[17] Dies mag oftmals zutreffen und durchaus erstrebenswert sein. Jedoch verbleibt für diejenigen Situationen, in welchen dieser Idealzustand nicht erreicht wird, die weitere Vorgehensweise zu klären. Aus diesen Gründen werden im Folgenden Abstimmungen genauer betrachtet.

3.2 Regeln für Abstimmungen in Gruppen

3.2.1 Einführung

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie idealerweise kollektive Entscheidungen getroffen werden sollten. Dies ist eine Ergänzung zur Theorie der individuellen Entscheidungen.[18] Die Ausführungen stellen deshalb einen weiteren Teilbereich der präskriptiven Entscheidungstheorie dar, weshalb der Ausgangspunkt der Betrachtungen auch hier der idealtypische, rationale Akteur – der **homo oeconomicus** ist. Dieses Konzept wurde bereits beschrieben[19] und auch kritisiert.[20]

Ähnlich wie im Kontext individueller Entscheidungen existiert eine Reihe von Anforderungen an eine rationale bzw. gerechte Abstimmung. Diese werden im nächsten Abschnitt erläutert.

[17] Vgl. Eisenberg/Littkemann (2006: 681).
[18] Vgl. Kapitel 1 auf S. 3.
[19] Vgl. Abschn. 1.1 auf S. 3.
[20] Vgl. Abschn. 2.1 auf S. 287.

3.2.2 Anforderungen an eine gerechte Abstimmung

Eine Grundlage für die Durchführung der Abstimmung bzw. deren Gültigkeit ist die **Beschlussfähigkeit**. Es können verschiedene Regeln zur Festlegung der Beschlussfähigkeit unterschieden werden. Eine wichtige Form ist das **Quorum**, bei dem eine Mindestgröße – in absoluten oder relativen Größen – erforderlich ist, damit eine Entscheidung getroffen werden kann. Es kann zwischen dem Beteiligungs-, dem Zustimmungs- und dem Ablehnungsquorum unterschieden werden. Ein **Beteiligungsquorum** liegt vor, wenn eine Mindestquote an Wahlbeteiligung erreicht werden muss, so dass die Bezugsbasis die stimmberechtigten Mitglieder sind. Im Fall des **Zustimmungsquorums** ist eine Mindestquote bzw. Mindeststimmenanzahl für die Zustimmung zu einer Alternative erforderlich, wobei diese Quote/Anzahl auf die stimmberechtigten oder auf die teilnehmenden Mitglieder bezogen sein kann. Wenn anstelle der Zustimmung eine Ablehnung erforderlich ist, liegt ein **Ablehnungsquorum** vor, das als Pendant zum Zustimmungsquorum gestaltet ist.[21]

Damit ein Abstimmungsverfahren als fair und gerecht von den Beteiligten eingestuft und demzufolge akzeptiert wird, ist eine Reihe von Anforderungen zu erfüllen. Diese wünschenswerten Eigenschaften konkretisieren den Gedanken der Fairness und sind in Tabelle 3.3 dargestellt.

Die ersten Anforderungen aus Tabelle 3.3 wurden von Kenneth Arrow 1950[22] aufgestellt und sind als klassische Anforderungen an gerechte und gleichzeitig effiziente Entscheidungsregeln bekannt und weit verbreitet. Deshalb wird auf die dortige Darstellung verwiesen.[23] Von den übrigen in der Tabelle 3.3 dargestellten Anforderungen werden im Folgenden das **Monotonie-Kriterium**, das **Teilnahme-Kriterium**, das **Klon-Kriterium** sowie das **Later-no-harm-Kriterium** erläutert.

[21] Vgl. Thiele (2008: 384–401).

[22] Vgl. Arrow (1950: 334–339).

[23] Vgl. Altmann (1977: 81); Laukamm (1979: 89–90); Rommelfanger/Eickemeier (2002: 198–200); Ponick (2007: 37–40); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 216–219).

Tab. 3.3: Anforderungen an einen Aggregationsmechanismus. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Arrow (1950: 334–339); Arrow (1951: 24–30); Gäfgen (1974: 429–430); Ray (1986); Holzman (1988/89); Moulin (1988); Woodall (1997: 84–86); Stahl/Johnson (2007: 127); Tideman (2009: 237); Rothe et al. (2012: 150–165).

Klassische Anforderungen von Arrow

Anforderung 3.1 (Allgemeingültigkeit): *Keine individuelle Präferenzordnung und kein Gremienmitglied darf ausgeschlossen werden.*

Anforderung 3.2 (Diktaturverbot): *Keine interne oder externe individuelle Präferenzordnung darf zur Präferenzordnung der Gruppe erhoben werden.*

Anforderung 3.3 (Pareto-Kriterium): *Wenn alle Gremienmitglieder Alternative A gegenüber Alternative B bevorzugen, so muss dies auch in der kollektiven Präferenzordnung gelten.*

Anforderung 3.4 (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen): *Für eine kollektive Präferenzordnung, welche lautet $A \succ B \succ C \succ D$, muss bei Wegfall der Alternative C weiterhin gelten $A \succ B \succ D$.*

Ergänzende Anforderungen

Anforderung 3.5 (Majoritäts-Kriterium): *Wählt eine absolute Mehrheit eine Alternative als optimal, dann muss diese auch durch den Aggregationsmechanismus als optimale Alternative identifiziert werden.*

Anforderung 3.6 (Condorcet-Kriterium): *Wird eine Alternative im paarweisen Vergleich gegenüber allen anderen Alternativen bevorzugt, dann muss diese Alternative auch durch den Aggregationsmechanismus als optimale Alternative aus der Gesamtmenge identifiziert werden.*

Anforderung 3.7 (Monotonie-Kriterium): *Ist nach der Entscheidung die kollektive Reihenfolge $A \succ B \succ C \succ D$, dürfen Stimmveränderungen, die die bisherige individuelle Präferenzreihenfolge $B \succ A \succ C \succ D$ verändern zu $A \succ B \succ C \succ D$, nicht dazu führen, dass als kollektive Reihenfolge $B \succ A \succ C \succ D$ resultiert.*

Anforderung 3.8 (Teilnahme-Kriterium): *Ist nach der Entscheidung die kollektive Reihenfolge $A \succ B$, dürfen zusätzliche Stimmabgaben mit der individuellen Präferenzreihenfolge $A \succ B$ nicht dazu führen, dass als kollektive Reihenfolge $B \succ A$ resultiert.*

Anforderung 3.9 (Unabhängigkeit von Klon-Alternativen): *Das Ergebnis der kollektiven Abstimmung ändert sich nicht, wenn eine identische Alternative mehrfach, jedoch mit anderer Bezeichnung (geklont) zur Auswahl steht.*

Anforderung 3.10 (Later-no-harm-Kriterium): *Eine Alternative, welche von einem Gremienmitglied bevorzugt wird, darf nicht durch die Abgabe nachrangiger Präferenzwerte an andere Alternativen schlechter gestellt werden.*

Anforderung 3.11 (Konsistenz-Kriterium): *Wird das Entscheidungsgremium in zwei Gruppen geteilt und wird eine Alternative in den beiden Teilgremien als optimale Alternative identifiziert, dann muss der Aggregationsmechanismus diese Alternative auch als optimale Alternative des Gesamtgremiums identifizieren.*

Das **Monotonie-Kriterium** ist offenbar einsichtig, da es der Grundlogik von Abstimmungen Rechnung trägt. Mehr Stimmen für eine Alternative dürfen nicht dazu führen, dass diese Alternative schlechter abschneidet. Dabei ist es jedoch wichtig, dass diese Mehrstimmen für eine Alternative bei identischer Wahlbeteiligung erreicht werden. Dieses Kriterium wird jedoch im deutschen Wahlrecht – noch immer – durch die Zweitstimmenregel verletzt und wird als negatives Stimmgewicht bezeichnet. Mehr Zweitstimmen für eine Partei können u. U. dazu führen, dass diese Partei deshalb weniger Sitze erhält.[24]

Zur Erläuterung wird das Beispiel 3.1 eingeführt.

Beispiel 3.1:

Im Rahmen einer Abstimmung stehen drei Alternativen zur Auswahl, die von 35 Gremienmitgliedern bewertet werden. Diese Mitglieder zerfallen in vier Fraktionen (vgl. Tabelle 3.4). Wird nun so vorgegangen, dass im ersten Wahlgang die Alternative mit den wenigsten Erststimmen eliminiert wird (in diesem Fall C) und im zweiten Wahlgang diejenige Alternative mit den meisten Erststimmen gewinnt, resultiert die Alternative A als optimale Alternative, da sie mit 24 zu 11 Stimmen gegen B gewinnt.[25]

Tab. 3.4: Beispiel zur Nichterfüllung des Monotonie-Kriteriums. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Börgers (2010: 43–44).

Ursprüngliche Stimmenverteilung

Fraktion 1 (14 Stimmen)	Fraktion 2 (3 Stimmen)	Fraktion 3 (8 Stimmen)	Fraktion 4 (10 Stimmen)
A	*B*	*B*	*C*
B	*A*	*C*	*A*
C	*C*	*A*	*B*

Veränderte Stimmenverteilung

A	*A*	*B*	*C*
B	*B*	*C*	*A*
C	*C*	*A*	*B*

Wird nun angenommen, dass die Mitglieder der Fraktion 2 ihre Meinung ändern und sich der Präferenzordnung der Fraktion 1 anschließen, ergibt dies für die Alternative A einen Zuwachs von drei Erststimmen. Es wäre nun zu erwarten, dass A weiterhin die optimale Alternative bleibt. Eine Anwendung der soeben beschriebenen Vorgehensweise führt jedoch zur Alternative C als optimaler Alternative, da nun B im ersten Wahlgang eliminiert wird und C im zweiten Wahlgang mit 18 zu 17 Stimmen gegen A gewinnt. Damit ist das Monotonie-Kriterium verletzt, da A durch einen Stimmenzuwachs bei gleichbleibender Anzahl an Gesamtstimmen vom Gewinner zum Verlierer wird.

---

[24] Vgl. Nurmi (1983: 193–194); Schauenberg (1992: 431–432); Behnke (2010); Börgers (2010: 43–45).

[25] Dieses Vorgehen entspricht der sog. HARE-Regel, die im weiteren Verlauf noch vorgestellt wird.

Das **Teilnahme-Kriterium** fordert, dass es unmöglich für Gremienmitglieder sein muss, durch taktische Nicht-Teilnahme an der Abstimmung der von ihnen präferierten Alternative zum Sieg zu verhelfen. Dieses Phänomen ist auch als **No-show-Paradox** bekannt und wird am Beispiel 3.2 erläutert.

Beispiel 3.2:

21 Gremienmitglieder müssen eine Entscheidung über drei Alternativen herbeiführen.[26] *In Tabelle 3.5 sind die Präferenzordnungen der Gremienmitglieder zu sehen. Die Stimmenverteilung gestaltet sich so, dass im ersten Wahldurchgang die Alternativen, die sich auf den ersten beiden Präferenzplätzen befinden, je eine Stimme erhalten. Die Alternative mit den wenigsten Stimmen wird danach eliminiert. Im nächsten Wahlgang erhält lediglich die Alternative auf dem ersten Platz des Präferenzordnungsprofiles eine Stimme. Im vorliegenden Fall erhält im ersten Durchgang A 15 Stimmen, B 14 Stimmen und C erhält 13 Stimmen, weshalb C eliminiert wird. Im anschließenden Wahldurchgang siegt Alternative B mit 11 zu 10 Stimmen über Alternative A. Die kollektive Präferenzordnung wäre demnach:* $B \succ A \succ C$.

Tab. 3.5: Beispiel zum No-show-Paradox. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Gehrlein (2006: 27–28).

Fraktion 1 (3 Stimmen)	Fraktion 2 (5 Stimmen)	Fraktion 3 (5 Stimmen)	Fraktion 4 (2 Stimmen)	Fraktion 5 (3 Stimmen)	Fraktion 6 (3 Stimmen)
A	*A*	*B*	*C*	*B*	*C*
B	*C*	*A*	*A*	*C*	*B*
C	*B*	*C*	*B*	*A*	*A*

Wird nun angenommen, dass zwei Mitglieder der Fraktion 1 nicht zur Sitzung erschienen wären, so wäre das Stimmenverhältnis im ersten Durchgang gewesen: A erhält 13 Stimmen, auf B entfallen 12 Stimmen und C erhält 13 Stimmen. Dann wäre B eliminiert worden, was zu einer Stichwahl zwischen A und C geführt hätte, die A mit 11 Stimmen gegen C mit 8 Stimmen gewonnen hätte. Die kollektive Präferenzordnung wäre nun: $A \succ C \succ B$. *Dies ist aus Sicht der Fraktion 1* ***paradox****, da die Mitglieder der von ihnen präferierten Alternative zum Sieg verholfen haben, indem sie* ***nicht mitgestimmt*** *haben.*

Das Paradox kann auch bei einer Gremienentscheidung auftreten, die als Beteiligungsquorum durchgeführt wird. In diesem Fall ist es denkbar, dass Stimmen gegen die Vorlage zu der notwendigen Überschreitung der erforderlichen Quote und damit zur Gültigkeit der Abstimmung führen. Wenn anschließend die entsprechende Vorlage angenommen wird, liegt ebenfalls das No-show-Phänomen vor. Es kann deshalb unter Umständen von Vorteil für eine Alternative sein, wenn deren Vertreter nicht an der Abstimmung teilnehmen. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass aus der Nicht-Erfüllung des Monotonie-Kriteriums nicht automatisch auf die Nicht-Erfüllung des Teilnahme-Kriteriums geschlossen werden kann.[27]

[26] Vgl. Ray (1986); Gehrlein (2006: 27–28).

[27] Vgl. Campbell/Kelly (2002).

Die Beispiele haben den wesentlichen Unterschied zwischen dem Monotonie- und dem Teilnahme-Kriterium gezeigt. Das Monotonie-Kriterium bezieht sich auf den Stimmenzuwachs bzw. auf Stimmenveränderungen für eine Alternative bei einer gleichbleibenden Anzahl an Gesamtstimmen. Das Teilnahme-Kriterium hingegen ist auf Stimmenveränderungen für eine Alternative bei gleichzeitig veränderter Gesamtstimmenzahl ausgerichtet.

Die **Unabhängigkeit von geklonten Alternativen** fordert, dass es unmöglich sein muss, eine Alternative B, die im direkten Vergleich mit Alternative A nicht vorteilhaft wäre, durch Hinzufügen einer inhaltlich identischen Alternative, welche jedoch nur einen anderen Namen trägt A' zur vorteilhaften Alternative zu identifizieren. Beispiel 3.3 illustriert diese Situation.

Beispiel 3.3:

Die heute als „Thunder Bay" bekannte Stadt in Kanada entstand 1969 aus der Fusion mehrerer Gemeinden. Zur Namensfindung im Zusammenhang mit der Fusion wurde eine Volksabstimmung durchgeführt, in deren Vorfeld sich zwei konkurrierende Namen herauskristallisierten: „Thunder Bay" und „Lakehead". Letztendlich wurden die Alternativen „Thunder Bay", „Lakehead" und „The Lakehead" zur Abstimmung gestellt. Durch Mehrheitswahl gewann die Alternative „Thunder Bay" mit 15870 Stimmen, während die Alternative „Lakehead" auf 15302 Stimmen kam und 8377 Wähler für „The Lakehead" stimmten. Die Variante „Thunder Bay" konnte nur deshalb gewinnen, weil sich die Anhänger der Gegenpartei aufteilten und zwei Klon-Alternativen zur Abstimmung stellten.[28]

Zur Erklärung des **Later-no-harm-Kriteriums** wird eine Wahl betrachtet, bei der die Gremienmitglieder nicht nur eine Stimme für die von ihnen präferierte Alternative abgeben können, sondern alle zur Verfügung stehenden Alternativen in eine Rangfolge (Präferenzordnung) bringen müssen. In diesem Fall stehen die Mitglieder häufig vor folgendem Dilemma: Wenn die Präferenzordnung ehrlich angegeben wird und die zweitbeste Alternative nach der Erstbesten gereiht wird, kann es dazu kommen, dass letztendlich die zweitbeste Alternative der individuellen Präferenzordnung als erstbeste Alternative der kollektiven Präferenzordnung resultiert. Durch die ehrliche Angabe der Zweitpräferenz hat das Gremienmitglied die eigene Erstpräferenz demzufolge ausgeschaltet. Dieser Effekt führt dazu, dass in Gremienentscheidungen mit vollständiger Präferenzordnung über alle Alternativen die Tendenz existiert, potenzielle Konkurrenten (Zweitpräferenzkandidaten) deutlich tiefer zu platzieren, um zu vermeiden, dass diese den eigenen Erstpräferenz-Kandidaten verhindern. Die Later-no-harm-Anforderung an einen Aggregationsmechanismus zielt genau auf die Vermeidung dieses taktischen Verhaltens ab. Durch die Angabe von niedrigen Präferenzplätzen darf die Alternative mit der Erstpräferenz nicht beeinträchtigt werden.

[28] Vgl. Schulze (2011: 291).

Im Laufe der Zeit ist eine ganze Reihe von Wahlregeln und Abstimmungsverfahren entstanden. Diese werden unter dem Begriff „Sozialwahltheorie“ in angrenzenden Fachbereichen (wie z. B. Volkswirtschaftslehre, Politikwissenschaft) umfangreich diskutiert. An dieser Stelle wird lediglich auf einige ausgewählte Prinzipien und Regeln eingegangen, die exemplarisch für Entscheidungen im Investitionsbereich sind. Für eine umfangreichere Darstellung wird auf die Literatur verwiesen.[29]

3.2.3 Vorstellung und Analyse ausgewählter Verfahren

3.2.3.1 Grundprinzipien und Mehrheitswahlregeln

Die **Einstimmigkeitsregel** erfordert, dass sich alle Mitglieder für dieselbe Alternative entscheiden. Diese Abstimmungsform kann so ausgestaltet werden, dass nicht von jedem Mitglied die ausdrückliche Zustimmung erforderlich ist, also Stimmenthaltungen möglich sind. In diesem Fall gilt ein Beschluss als angenommen, wenn die Mitglieder dafür bzw. nicht dagegen stimmen. Aber auch die strikte Ausgestaltung ist möglich, bei der die ausdrückliche Zustimmung jedes Mitglieds erforderlich ist.[30]

In engem Zusammenhang mit dem Prinzip der Einstimmigkeit steht das **Vetorecht**. Wird das Einstimmigkeitsprinzip in der strikten Auslegung angewendet, resultiert aus der nicht erteilten ausdrücklichen Zustimmung eines Mitgliedes die Ablehnung des Beschlusses. Demzufolge verfügen die Mitglieder über ein De-facto-Vetorecht. Das explizit formulierte Vetorecht stellt den ausdrücklichen Gegenwillen heraus und erlaubt es jedem Mitglied, das über eine Stimme verfügt, den Beschluss der anderen Mitglieder durch das Dagegenstimmen zu blockieren.[31] Dies geschieht unabhängig davon, in welcher Form (absolute oder relative Mehrheit) die Abstimmung erfolgen soll. Diese Abstimmungsform bzw. die Ausstattung der Mitglieder mit diesem Stimmrecht zielt zwar auf die Einstimmigkeit der Beschlüsse und damit auf die breitest mögliche Legitimationsbasis, erweist sich jedoch in der Praxis als äußerst kompliziert bzw. führt dazu, dass Beschlüsse selten oder erst nach langwierigen Diskussionen gefasst werden.[32].

[29] Vgl. Weimann (2006: 155–220); Börgers (2010); Sunken/Schubert (2018).

[30] Vgl. Ponick (2007: 59–61).

[31] Zur Unterscheidung zwischen einem formalen und einem faktischen Veto-Recht des Controllers vgl. Weber et al. (2006: 19).

[32] Vgl. Eisenberg/Littkemann (2006: 683). Es ist bezeichnend für die „Effizienz“ des Vetorechtes (lat. liberum veto), dass in der Zeit von dessen Verwendung durch den Sejm in Polen von 1736 bis 1763 kein einziger Beschluss gefasst werden konnte. Vgl. Thiele (2008: 39–40).

Ebenfalls in Verbindung mit der Einstimmigkeitsregel steht der Konsens als Quasi-Einstimmigkeit. Für eine Konsensentscheidung reicht es, wenn keine Gegenstimme auftritt. Der Konsens wird deshalb zwischen der Einstimmigkeitsregel und der Mehrheitsregel eingeordnet, [33] die im Folgenden dargestellt wird.

Die Einstimmigkeitsregel erfordert die Zustimmung oder Nicht-Ablehnung einer Alternative durch alle Gremienmitglieder. Da dies besonders bei großen Gremien mit unterschiedlichen Interessen nicht praktikabel ist, entstand die Regel der Mehrheit, die die höchste Praktikabilität und weiteste Verbreitung gefunden hat. Diese Regel ermöglicht die Beschlussfassung mittels Akzeptanz durch die Mehrheit der Stimmen. Zu unterscheiden sind folgende Mehrheitsbegriffe:[34]

- **Relative Mehrheit:** Diese Mehrheit ist gegeben, wenn von zwei zu wählenden Alternativen eine Alternative mindestens eine Stimme mehr erhält als die andere. Deshalb wird in jedem Fall – unabhängig von der Grundgesamtheit der Gremienmitglieder und von Stimmenthaltungen – immer eine Alternative als vorteilhaft identifiziert, es sei denn, es resultiert Stimmengleichheit.
- **Einfache Mehrheit:** Um gewählt zu werden, muss eine Alternative mehr als 50 % der abgegebenen Stimmen erhalten. Es wird demzufolge ebenfalls kein Bezug zu der Grundgesamtheit des Gremiums hergestellt, Stimmenthaltungen reduzieren die Anzahl der abgegebenen Stimmen. Dies kann dazu führen, dass bezogen auf die Grundgesamtheit des Gremiums eine Minderheit des Gremiums eine Entscheidung durch einfache Mehrheit fällt.
- **Absolute Mehrheit:** Um den soeben beschriebenen Minderheiten-Effekt zu vermeiden, kann gefordert werden, dass mehr als 50 % der stimmberechtigten Gremienmitglieder für eine Alternative stimmen. Dies wird als absolute Mehrheit bezeichnet.
- **Qualifizierte Mehrheit:** Um als vorteilhaft identifiziert zu werden, muss eine Alternative einen Anteil, welcher 50 % einer Bezugsmenge übersteigt, auf sich vereinen. Bei dem Anteil kann es sich z. B. um 2/3 oder 3/4 handeln und die Bezugsmenge ist entweder die Anzahl der abgegebenen Stimmen oder die Anzahl der stimmberechtigten Mitglieder.

Im Fall der Regeln der einfachen, der absoluten und der qualifizierten Mehrheit ist es möglich, dass keine Alternative die erforderliche Stimmenanzahl auf sich vereint. In diesem Fall muss in der Wahlordnung festgelegt werden, wie oft diese Mehrheitsregel wiederholt angewendet wird, bevor - für den Fall, dass auch bei wiederholten Wahlgängen keine Alternative die erforderliche Stimmenanzahl erreicht - auf eine andere Mehrheitsregel ausgewichen wird.

[33] Vgl. Thiele (2008: 284).

[34] Vgl. Altmann (1977: 112–114); Thiele (2008: 304–324).

Das Recht der Mehrheit ist - so einleuchtend und praktikabel es erscheinen mag - nicht ohne Kritik geblieben und nicht für jede Art von Problementscheidung anwendbar. Streng genommen liegt dem Mehrheitsprinzip die Annahme zugrunde, dass die Mehrheit der Gesamtheit entspricht. Dass dabei Minderheiten benachteiligt werden, ist offensichtlich.[35] So stellten bei der Begründung der Zweidrittelmehrheit im kanonischen Recht die zwei Drittel einer Grundgesamtheit im Vergleich mit dem verbleibenden Drittel das Ganze dar, weshalb dieses Drittel vernachlässigt werden kann.[36]

Die bisherigen Darstellungen verdeutlichen das Problem, dass über die Form der kollektiven Willensbildung - also die Abstimmungsvariante - ebenfalls abzustimmen ist, wofür wiederum eine Abstimmungsvariante festzulegen ist. Zur Vermeidung eines infiniten Regresses muss die Abstimmungsform deshalb zu einem Zeitpunkt als gegeben hingenommen werden bzw. über das Losverfahren entschieden werden.

Nachdem festgelegt wurde, wie viele Stimmen die vorteilhafte Alternative auf sich vereinen muss, ist zu bestimmen, in welcher Form und Reihenfolge die Alternativen verglichen werden. Die bisher dargestellten Mehrheitsregeln können auf die Menge aller zur Verfügung stehenden Alternativen angewendet werden und mit der einmaligen Stimmabgabe entschieden werden.

Zum besseren Verständnis wird im Folgenden jede Abstimmungsregel in einem sog. Kurzportrait zusammengefasst vorgestellt.

Kurzportrait Regel der Mehrheit	
Art der Gegenüberstellung:	Sämtliche Alternativen gemeinsam
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Eine Stimme
Vergabe der Stimmen:	Alternative, die in der individuellen Präferenzordnung an erster Stelle steht
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition
Beendigung des Verfahrens:	Wenn eine Alternative die Mehrheit erreicht hat
Regeln für folgende Wahldurchgänge:	Zuteilung, Vergabe und Zusammenfassung der Stimmen sowie Alternativenmenge bleiben unverändert

Das Verfahren wird spezifiziert, indem festgelegt wird, welche Mehrheit (relative, einfache, absolute oder qualifizierte Mehrheit) erreicht werden muss. Im weiteren Verlauf werden verschiedene Abstimmungsregeln vorgestellt. Dazu wird Beispiel 3.4 eingeführt.

[35] So bezeichnet Schneider Mehrheitsentscheidungen auch als **„Diktatur der Mehrheit“**. Vgl. Schneider (1995: 156).

[36] Vgl. Thiele (2008: 36).

Beispiel 3.4:

Ein Entscheidungsgremium muss über fünf Alternativen A, B, C, D und E abstimmen. Das Gremium besteht aus 43 Personen, die sich in sechs Fraktionen aufgespalten haben. Die Präferenzordnungsprofile der Fraktionen sind in der Tabelle 3.6 zu sehen.

Tab. 3.6: Ausgangssituation der Gremienentscheidung. Quelle: Eigene Darstellung.

Fraktion und Stimmenzahl / Rang der Alternative	F_1 (8)	F_2 (6)	F_3 (6)	F_4 (4)	F_5 (9)	F_6 (10)
1.	*A*	*D*	*B*	*C*	*C*	*E*
2.	*C*	*B*	*E*	*A*	*A*	*B*
3.	*D*	*C*	*D*	*B*	*E*	*A*
4.	*E*	*E*	*A*	*E*	*D*	*D*
5.	*B*	*A*	*C*	*D*	*B*	*C*

*Nach der Regel der **relativen Mehrheit** ergibt sich die kollektive Präferenzordnung: $C \succ E \succ A \succ D \sim B$. Die Anwendung der Regel der **absoluten Mehrheit** erbringt im 1. Wahlgang keine Alternative mit der absoluten Mehrheit. Alternative C mit 13 Stimmen und Alternative E mit 10 Stimmen sind die bestplatzierten Kandidaten, die in die nächste Wahlrunde gehen. Wird davon ausgegangen, dass die übrigen Fraktionen ihre Präferenzordnungen beibehalten und im zweiten Wahlgang auf den Vergleich C vs. E anwenden, resultiert ein Stimmenverhältnis von* $27 : 16$ *für Alternative C.*

Die Mehrheitsregel ist weder unabhängig von irrelevanten Alternativen noch von Klon-Alternativen und verletzt das CONDORCET-Kriterium.[37] Eine weitere Schwäche besteht darin, dass lediglich eine Stimme vergeben werden kann, sich die Gremienmitglieder also nur für eine Alternative entscheiden und alle anderen Alternativen unbeachtet lassen. Wenn die Entscheidung im ersten Wahlgang nicht fällt, wird im 2. Wahlgang ebenfalls nur eine Erststimme vergeben.

Nun ist es in der Realität jedoch häufig der Fall, dass die Akteure sehr wohl zwischen allen Alternativen eine Rangfolge bilden, so wie es auch in der Tabelle 3.6 zu sehen ist. Diese Präferenzrangfolge kann zu einem differenzierten Meinungsbild genutzt werden. Regeln, die die Präferenzrangfolgen verwenden, werden als Präferenzwahlregeln bezeichnet.

[37] Vgl. Tideman (1987: 197); Tideman (2009: 237); Schulze (2011: 301); Rothe et al. (2012: 170).

3.2.3.2 Präferenzwahlregeln

Basierend auf dem Kriterium der absoluten Mehrheit entstand 1909 die Bucklin-Methode.[38] Basis sind die individuellen Präferenzordnungen, die in einem ersten Schritt daraufhin überprüft werden, ob eine Alternative die absolute Mehrheit der Erstpräferenzen erreicht. Ist dies nicht der Fall, werden die Zweitpräferenzen der Gremienmitglieder zu den Erstpräferenzen addiert und es wird erneut überprüft, ob diese Summe zu der absoluten Mehrheit einer Alternative führt. Ist dies nicht der Fall, wird das Verfahren so lange fortgeführt, bis eine Alternative auf diese Weise die absolute Mehrheit erreicht.

Kurzportrait Bucklin-Methode	
Art der Gegenüberstellung:	Sämtliche Alternativen gemeinsam
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Eine Stimme
Vergabe der Stimmen:	Jede Alternativen in der individuellen Präferenzordnung erhält eine Stimme
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition nach Rangordnung, beginnend mit Erstplatzierung
Beendigung des Verfahrens:	Wenn eine Alternative die absolute Mehrheit erreicht hat
Regeln für folgende Wahldurchgänge:	Zuteilung und Vergabe der Stimmen sowie Alternativenmenge bleiben unverändert, jedoch werden im zweiten Wahldurchgang zusätzlich zu den Stimmen der Erstplatzierung die Stimmen der Zweitplatzierung summiert, im dritten Wahlgang die Drittplatzierungen usw.

Anwendung der Bucklin-Regel auf das Beispiel 3.4 von S. 402:

Für das Beispiel ergibt sich nach dem 1. Wahlgang keine absolute Mehrheit. Deshalb wird ein zweiter Bewertungsschritt durchgeführt, der zu der Stimmenverteilung führt, die in Tabelle 3.7 zu sehen ist. Die optimale Alternative entsprechend der Bucklin-*Methode ist die Alternative B, die die absolute Mehrheit nach Berücksichtigung des 2. Präferenzplatzes erreicht hat.*

[38] Benannt nach dem Begründer James W. Bucklin. Vgl. Haines/Haines (1921: 152).

Tab. 3.7: Ergebnisse der BUCKLIN-Methode. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.6.

Alternative	Stimmenanzahl der Erstpräferenzen	Zusätzliche Stimmen der Zweitpräferenzen	Gesamtstimmen aus Erst- und Zweitpräferenzen
A	8	13	**21**
B	6	16	**22**
C	13	8	**21**
D	6	0	**6**
E	10	6	**16**

Die BORDA-Regel[39] beruht auf der Zuweisung von Stimmen in Höhe der Anzahl der Alternativen. Möglich sind unterschiedliche Zuordnungen. So wird bei m Alternativen die Gesamtanzahl der zu vergebenden Stimmen mit m oder mit $m-1$ angegeben. Die Mitglieder teilen die maximale Stimmenzahl der von ihnen präferierten Alternative zu. Die in ihrer Präferenzordnung nächstbeste Alternative erhält dann eine Stimme weniger.

Kurzportrait BORDA-Methode	
Art der Gegenüberstellung:	Sämtliche Alternativen gemeinsam
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Soviel Stimmen, wie es Alternativen gibt (hier: m)
Vergabe der Stimmen:	Alternative auf erstem Platz in der individuellen Präferenzordnung erhält m Stimmen, Alternative auf dem zweiten Platz erhält $m-1$ Stimmen usw.
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition
Beendigung des Verfahrens:	nach einem Wahlgang wird Alternative mit einfacher Mehrheit gewählt
Regeln für folgende Wahldurchgänge:	keine

Anwendung der BORDA-Regel auf das Beispiel 3.4 von S. 402:

Die Fortführung des Eingangsbeispiels ergibt mit $m=5$ und der Anwendung der BORDA-*Regel die Ergebnisse in Tabelle 3.8.*

[39] Benannt nach dem Begründer JEAN-CHARLES DE BORDA (1733–1799). Vgl. Black (1958: 156–159).

Tab. 3.8: Anwendung der Borda-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.6.

Fraktion / Alternative	F_1 (8)	F_2 (6)	F_3 (6)	F_4 (4)	F_5 (9)	F_6 (10)	Summe
A	5	1	2	4	4	3	**140**
B	1	4	5	3	1	4	**123**
C	4	3	1	5	5	1	**131**
D	3	5	3	1	2	2	**114**
E	2	2	4	2	3	5	**137**

Nach der Borda*-Regel ergibt sich die kollektive Präferenzordnung:* $A \succ E \succ C \succ B \succ D$.

Dieses Verfahren ist weder unabhängig von irrelevanten Alternativen noch von Klon-Alternativen. Darüber hinaus verletzt es das Condorcet-Kriterium, das Mehrheits-Kriterium sowie das Later-no-harm-Kriterium.[40] Dass dieses Verfahren nicht unabhängig gegenüber irrelevanten Alternativen ist, wird kurz demonstriert. Dazu wird aus dem ursprünglichen Alternativenset die Alternative C eliminiert. Es ergeben sich die Resultate gemäß Tabelle 3.9.

Tab. 3.9: Einfluss einer irrelevanten Alternative auf die Borda-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.6.

Fraktion / Alternative	F_1 (8)	F_2 (6)	F_3 (6)	F_4 (4)	F_5 (9)	F_6 (10)	Summe
A	4	1	1	4	4	2	**116**
B	1	3	4	3	1	3	**101**
D	3	4	2	1	2	1	**92**
E	2	2	3	2	3	4	**121**

Die kollektive Präferenzordnung lautet nun: $E \succ A \succ B \succ D$. Die relative Vorteilhaftigkeit von A und E hat sich verändert, obwohl eine Alternative entfernt wurde, welche auf die Relation der Rangfolge dieser Alternativen keinen direkten Einfluss haben dürfte.

Eine Kombination aus Bucklin- und Borda-Verfahren ist die Nanson-Regel.[41] Die Anzahl der zu vergebenden Stimmen ist wie bei der Borda-Regel abhängig von der Zahl der Alternativen und die Vergabeordnung ist ebenfalls identisch. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, dass bei

[40] Vgl. Tideman (1987: 197); Tideman (2009: 237); Schulze (2011: 301); Rothe et al. (2012: 170).

[41] Benannt nach dem Begründer Edward Nanson (1850–1936). Vgl. Nanson (1882: 210–228); Haines/Haines (1921: 152–153).

diesem Verfahren die Alternative mit der geringsten Gesamtstimmenzahl aus dem Verfahren eliminiert wird. In der nächsten Runde wird die Gesamtanzahl an zu vergebenden Stimmen um eine Stimme reduziert und das Verfahren wird wiederholt. Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis ein Gewinner feststeht.[42]

Kurzportrait Nanson-Methode	
Art der Gegenüberstellung:	Sämtliche Alternativen gemeinsam
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Soviel Stimmen, wie es Alternativen gibt (hier: m)
Vergabe der Stimmen:	Alternative auf erstem Platz in der individuellen Präferenzordnung erhält m Stimmen, Alternative auf dem zweiten Platz erhält $m-1$ Stimmen usw.
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition
Beendigung des Verfahrens:	Relative Mehrheit nach dem $m-1$-ten Wahlgang
Regeln für folgende Wahldurchgänge:	Die Alternative mit der geringsten Stimmenzahl wird eliminiert, darauf aufbauende Zuteilung und Vergabe der Stimmen bleiben unverändert.

Nach der Beschreibung wird die Methode auf das Beispiel angewendet.

Anwendung der Nanson-Regel auf das Beispiel 3.4 von S. 402:

Tab. 3.10: Darstellung der Nanson-Regel. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.6 auf S. 402.

Fraktion / Alternative	F_1 (8)	F_2 (6)	F_3 (6)	F_4 (4)	F_5 (9)	F_6 (10)	Summe
1. Wahlgang ≙ Tabelle 3.8 auf S. 405 → Elimination von D und daraus folgender 2. Wahldurchgang mit i=4							
A	4	1	2	3	3	2	**109**
B	1	4	4	2	1	3	**103**
C	3	3	1	4	4	1	**110**
E	2	2	3	1	2	4	**108**
→ Elimination von B und 3. Wahldurchgang mit i=3							
A	3	1	2	2	2	2	**88**
C	2	3	1	3	3	1	**89**
E	1	2	3	1	1	3	**81**
→ Elimination von E und 4. Wahldurchgang mit i=2							
A	2	1	2	1	1	2	**67**
C	1	2	1	2	2	1	**62**

[42] Vgl. Meyer (1983: 39); Nurmi (2007: 112).

Die kollektive Präferenzordnung gemäß der Nanson*-Regel ist demnach* $A \succ C \succ E \succ B \succ D$ *(vgl. Tab. 3.10).*

Dieses Verfahren ist weder unabhängig von irrelevanten Alternativen noch von Klon-Alternativen. Darüber hinaus verletzt es das Teilnahme-, das Monotonie- und das Konsistenz-Kriterium.[43]

Ein anderes Verfahren zur Feststellung einer absoluten Mehrheit stellt ein Verfahren dar, das im englischsprachigen Raum als Instant-runoff-Voting bezeichnet und im deutschsprachigen Raum häufiger Hare-Regel[44] genannt wird. Bei dieser Methode wird wiederum auf Basis der Präferenzordnungsprofile in einem ersten Schritt geprüft, ob eine Alternative die absolute Mehrheit der Erststimmen erreicht. Ist das nicht der Fall, so wird diejenige Alternative, auf die die wenigsten Erststimmen entfallen sind, aus dem weiteren Prozess eliminiert. In der Präferenzordnung, in welcher die unterlegene Alternative eliminiert wurde, steigen die verbleibenden Alternativen einen Präferenzordnungsrang höher. Das Verfahren wird so lange fortgeführt, bis eine Alternative die absolute Mehrheit erreicht. Das Verfahren kann auch dergestalt durchgeführt werden, dass lediglich eine Stimme abgegeben und dann nach der beschriebenen Vorgehensweise verfahren wird.[45]

Kurzportrait Hare-Regel bzw. Instant-runoff-Methode	
Art der Gegenüberstellung:	Sämtliche Alternativen gemeinsam
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Soviel Stimmen, wie es Alternativen gibt (hier: m)
Vergabe der Stimmen:	Alternative auf erstem Platz in der individuellen Präferenzordnung erhält m Stimmen, Alternative auf dem zweiten Platz erhält $m-1$ Stimmen usw.
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition
Beendigung des Verfahrens:	Absolute Mehrheit der Erststimmen im ersten Wahldurchgang oder relative Mehrheit nach dem $m-1$-ten Wahlgang
Regeln für folgende Wahldurchgänge:	Die Alternative mit der geringsten Erststimmenzahl wird eliminiert, darauf aufbauende Zuteilung und Vergabe der Stimmen bleiben unverändert.

Nach der Beschreibung wird die Methode auf das Beispiel angewendet.

---

[43] Vgl. Tideman (1987: 197); Tideman (2009: 237); Schulze (2011: 301).

[44] Benannt nach dem Begründer Thomas Hare (1806–1891).

[45] Vgl. Schauenberg (1992: 428–430); Richie (2004).

Anwendung der HARE-Regel auf das Beispiel 3.4 von S. 402:

Für das Beispiel ergibt sich nach dem 1. Wahlgang keine absolute Mehrheit. Jedoch werden die Alternativen B und D mit jeweils sechs Stimmen als diejenigen Alternativen mit der geringsten Stimmenanzahl festgestellt und aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. In der zweiten Bewertungsrunde resultieren für die Alternative A weiterhin acht Stimmen. Aufgrund der veränderten Präferenzordnungsprofile der Fraktion 2 und der Fraktion 3 jedoch erhalten Alternative C und Alternative E jeweils sechs Stimmen mehr. Das führt zu 19 Stimmen für C und zu 16 Stimmen für E, womit jedoch immer noch keine absolute Mehrheit erreicht ist. Deshalb wird ein weiterer Wahlgang durchgeführt, aus dem die Alternative A ausgeschlossen wird, da diese die wenigsten Stimmen verzeichnet (lediglich acht Stimmen). Durch das damit veränderte Präferenzordnungsprofil von Fraktion 1 erhält C acht Stimmen mehr und erzielt insgesamt 27 Stimmen, womit die absolute Mehrheit erreicht ist.

Die HARE-Regel verletzt das CONDORCET-Kriterium, das Konsistenz-Kriterium, das Monotonie-Kriterium sowie das Teilnahme-Kriterium und ist nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen.[46]

Bei den bisher vorgestellten Verfahren haben die Gremienmitglieder **alle** zur Auswahl stehenden Alternativen **insgesamt** betrachtet und gegeneinander abgewogen bzw. in eine gemeinsame Reihenfolge gebracht. Es existiert jedoch eine Reihe von Abstimmungsverfahren, die auf einem direkten Vergleich von lediglich zwei Alternativen beruhen. Diese Verfahren werden als Paarvergleichsregeln oder auch CONDORCET-Verfahren bezeichnet.[47] Eines dieser Verfahren besteht in der Regel der **Mehrheit der Paarvergleiche**. Dabei werden alle Alternativenpaare paarweise gegenübergestellt. Jedes Gremienmitglied verfügt über eine Stimme, die der jeweils präferierten Alternative zugewiesen wird. Die unterlegene Alternative erhält keine Stimme. Die Gremienmitglieder müssen so oft abstimmen, wie es Alternativenpaare gibt. Bei m Alternativen sind $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1)$ Paarvergleiche erforderlich. Eine Patt-Situation zwischen zwei Alternativen muss verhindert werden (z. B. durch Entscheid des Vorsitzenden oder durch Los). Die kollektive Präferenzordnung wird im Anschluss an die paarweise Gegenüberstellung durch die Regel der relativen Mehrheit bestimmt.[48]

[46] Vgl. Schauenberg (1992: 431); Schulze (2011: 301). Zur Verletzung des Monotonie-Kriteriums durch die HARE-Regel vgl. Beispiel 3.1.

[47] Benannt nach dem Begründer MARIE JEAN ANTOINE NICOLAS CARITAT, MARQUIS DE CONDORCET (1743–1794). Vgl. Black (1958: 159–180).

[48] Vgl. Brams (1994: 1069–1075).

Kurzportrait Regel der Mehrheit der Paarvergleiche	
Art der Gegenüberstellung:	Paarweise Gegenüberstellung sämtlicher Alternativen
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Pro Paarvergleich eine Stimme
Vergabe der Stimmen:	Präferierte Alternative erhält eine Stimme
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition
Beendigung des Verfahrens:	Relative Mehrheit aller $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1)$ Paarvergleiche

Anwendung der Regel der Mehrheit der Paarvergleiche auf das Beispiel 3.4 von S. 402:

Die Ergebnisse der Anwendung der Regel der Mehrheit der Paarvergleiche für das Beispiel 3.4 zeigt Tabelle 3.11. Als Endergebnis ist festzuhalten, dass Alternative E drei Direktvergleiche gewinnt, die Alternativen A, B und D jeweils zwei Vergleiche für sich entscheiden und Alternative C in lediglich einem Vergleich siegt. Die kollektive Präferenzordnung ist demzufolge: $E \succ A \sim B \sim D \succ C$. Gäbe es eine Alternative, die in sämtlichen paarweisen Gegenüberstellungen siegen würde, wäre dies die Condorcet-Alternative.

Tab. 3.11: Ergebnisse des direkten Paarvergleiches. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.6.

Gegenüberstellung	Stimmenverhältnis	Gegenüberstellung	Stimmenverhältnis
A vs. B	21 : 22	**B vs. D**	20 : 23
A vs. C	24 : 19	**B vs. E**	16 : 27
A vs. D	31 : 12	**C vs. D**	21 : 22
A vs. E	21 : 22	**C vs. E**	27 : 16
B vs. C	22 : 21	**D vs. E**	14 : 29

Die paarweise Gegenüberstellung kann auch derart spezifiziert werden, dass die unterlegene Alternative aus dem Betrachtungsprozess eliminiert wird. Dies geschieht bei der **Regel der sukzessiven Paarvergleiche**. Bei dieser Regel kann es zu einem Phänomen kommen, das als **Condorcet-Paradox** bezeichnet wird.

Kurzportrait Regel der sukzessiven Paarvergleiche	
Art der Gegenüberstellung:	Paarweise Gegenüberstellung der Alternativen in ausgewählter Reihenfolge
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Pro Paarvergleich eine Stimme
Vergabe der Stimmen:	Präferierte Alternative erhält eine Stimme
Zusammenfassung der Stimmen:	Addition
Beendigung des Verfahrens:	Relative Mehrheit nach $m-1$ Paarvergleichen

Anwendung der Regel der sukzessiven Paarvergleiche auf das Beispiel 3.4:

Ausgangssituation ist das Beispiel 3.4. Der sukzessive Paarvergleich wird eröffnet mit der Gegenüberstellung A vs. B. Das Ergebnis (21 : 22) *ist bekannt und führt dazu, dass A aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen wird. Mit Blick auf die Tabelle 3.11 wird deutlich, dass wiederum mehrere Alternativen als direkte Gegenkandidaten zur Auswahl stehen. Wird der Vergleich B vs. C gewählt, gewinnt wiederum B und die Alternative C wird aus der Betrachtung eliminiert. Im nächsten Schritt tritt B gegen D an, was zu dem Sieger D führt, welcher mit der verbleibenden Alternative E verglichen wird. In diesem direkten Vergleich gewinnt E mit* (14 : 29) *Punkten und ist deshalb die beste Alternative. Folgende alternative Abstimmungsreihenfolgen sind möglich:*

$$C \textit{ vs. } E \to C \textit{ vs. } B \to B \textit{ vs. } D \to D \textit{ vs. } A \to A \textit{ dominiert}$$

$$C \textit{ vs. } E \to C \textit{ vs. } D \to D \textit{ vs. } A \to A \textit{ vs. } B \to B \textit{ dominiert}$$

$$E \textit{ vs. } D \to E \textit{ vs. } A \to E \textit{ vs. } B \to E \textit{ vs. } C \to C \textit{ dominiert}$$

$$A \textit{ vs. } E \to E \textit{ vs. } B \to E \textit{ vs. } C \to C \textit{ vs. } D \to D \textit{ dominiert}$$

$$A \textit{ vs. } B \to B \textit{ vs. } C \to B \textit{ vs. } D \to D \textit{ vs. } E \to E \textit{ dominiert}$$

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass nicht ausschließlich die Präferenzen der Entscheidungsträger, sondern die Reihenfolge der Abstimmung entscheidend für das Ergebnis ist. Es besteht also die Möglichkeit, dass zyklische Mehrheiten existieren und es eröffnet sich für den Wahlleiter die Möglichkeit, mit der Bestimmung der Abstimmungsreihenfolge den Wahlausgang zu beeinflussen.

Das bedeutet, dass trotz transitiver individueller Präferenzen die resultierende kollektive Präferenz intransitiv ist. Die Condorcet-Methode verletzt das Later-no-harm-Kriterium, das Konsistenz-Kriterium sowie das Teilnahme-Kriterium. Darüber hinaus ist das Verfahren nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen und gegenüber Klonalternativen.[49]

Ein Verfahren, das die Abhängigkeit von Klonalternativen beheben möchte und trotzdem auf dem paarweisen Alternativenvergleich beruht, ist die Schulze-Methode.[50] Ausgangspunkt dieses Verfahrens sind die Ergebnisse des paarweisen Alternativenvergleichs, wie sie in Tabelle 3.11 dargestellt sind.

[49] Vgl. Tideman (1987: 194); Moulin (1988); Woodall (1997: 86); Schulze (2011: 297).
[50] Vgl. Schulze (2003); Schulze (2011); Müller (2015).

Kurzportrait Schulze-Methode	
Art der Gegenüberstellung:	Paarweise Gegenüberstellung sämtlicher Alternativen
Zuteilung der Stimmen pro Alternative:	Pro Paarvergleich eine Stimme
Vergabe der Stimmen:	Präferierte Alternative erhält eine Stimme
Zusammenfassung der Stimmen:	Graphentheoretische Identifikation der Maxima der schwächsten Verbindungen
Beendigung des Verfahrens:	Relative Mehrheit der Paarvergleiche der dominierenden Verbindungen

Die Ergebnisse dieser Vergleiche werden nun jedoch in einer Matrix dargestellt und bilden die Grundlage für die Erstellung eines Beziehungsgraphen (vgl. Tabelle 3.12).

Tab. 3.12: Grundstruktur der Matrix der paarweisen Vergleiche. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Schulze (2011: 274).

	$\mathbf{v}[^*;\mathbf{A}]$	$\mathbf{v}[^*;\mathbf{B}]$	...	$\mathbf{v}[^*;\mathbf{Y}]$	$\mathbf{v}[^*;\mathbf{Z}]$
$\mathbf{v}[\mathbf{A};^*]$	0	$v[A;B]$	$v[A;...]$	$v[A;Y]$	$v[A;Z]$
$\mathbf{v}[\mathbf{B};^*]$	$v[B;A]$	0	$v[B;...]$	$v[B;Y]$	$v[B;Z]$
⋮	⋮	⋮	0	⋮	
$\mathbf{v}[\mathbf{Y};^*]$	$v[Y;A]$	$v[Y;B]$	$v[Y;...]$	0	$v[Y;Z]$
$\mathbf{v}[\mathbf{Z};^*]$	$v[Z;A]$	$v[Z;B]$	$v[Z;...]$	$v[Z;Y]$	0

Die Notation $v[A;B]$ gibt die Stimmenanzahl der Alternative A im paarweisen Vergleich mit B wieder. Die Stimmenanzahl von B im direkten Vergleich mit A wird durch die Notation $v[B;A]$ ausgedrückt. Für das Ausgangsbeispiel ergibt sich die Darstellung in Tabelle 3.13.

Tab. 3.13: Matrix der Paarvergleiche. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tab. 3.11 auf S. 409.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	21	24	31	21
B	22	0	22	20	16
C	19	21	0	21	27
D	12	23	22	0	14
E	22	27	16	29	0

Der Lösungsansatz der Schulze-Methode besteht in der Identifikation der Beziehungen zwischen den Alternativen, die in diesem Fall als Pfade betrachtet werden. Ein Weg zwischen zwei Alternativen A und B ist die geordnete Menge an Alternativen a_1,....a_n mit den folgenden Eigenschaften:[51]

[51] Vgl. Schulze (2003: 16–17); Schulze (2011: 271).

$$a_1 = A$$
$$a_n = B$$
$$v[a_i,a_{i+1}] - v[a_{i+1},a_i] > 0 \mid i = 1,...,(n-1)$$

Die Stärke eines Pfades wird definiert durch:

$$min\left(v[a_i,a_{i+1}] - v[a_{i+1},a_i] \mid i = 1,...,(n-1) \right)$$

Das bedeutet, dass der Pfad lediglich so stark ist, wie dessen schwächstes Verbindungsstück.[52] Zur Lösung des Problems wird derjenige Pfad gesucht, bei dem das schwächste Verbindungsstück der Relationen zwischen den Alternativen ein Maximum erreicht. Dazu wird mit $p[A;B]$ die Stärke des stärksten Pfades von A nach B bezeichnet und formuliert:[53]

$$p[A;B] = max\left[min\left(v[a_i,a_{i+1}] - v[a_{i+1},a_i] \mid i = 1,...,(n-1) \right) \right]$$

Existiert keine Verbindung zwischen den Alternativen, folgt: $p[A;B] = 0$. Die Verbindungen zwischen den Alternativen werden nun entsprechend dieses Kriteriums analysiert, wobei neben **direkten** auch **alle indirekten Wege** zwischen den Alternativen berücksichtigt werden. Eine Begründung für diese Vorgehensweise wurde bei der Regel der sukzessiven Paarvergleiche schon mit der Problematik des Condorcet-Paradox angeschnitten. Unterschiedliche Vergleichsreihenfolgen führten zu unterschiedlichen Siegern. Im Beispiel ging bei einem direkten Vergleich von D und E die Alternative E als Sieger hervor. Wurde jedoch die Vergleichsreihenfolge geändert und zuerst E mit C verglichen, so war C der Sieger. Trat diese Alternative nun gegen D an, ging D als Sieger hervor. Demzufolge konnte D die Alternative E schlagen, jedoch über den Umweg über C. Deshalb werden bei der Schulze-Methode alle Beziehungen zwischen den Alternativen auf das Maximum der minimalen Verbindungsstücke hin untersucht.[54] Zur Erläuterung wird aus der Tabelle 3.11 das soeben erläuterte Beispiel der Alternativen C, D und E herausgegriffen. Aus diesen Werten resultiert der Beziehungsgraph, der in Abbildung 3.2 zu sehen ist.

[52] Vgl. Stahl/Johnson (2007: 120).
[53] Vgl. Schulze (2003: 17).
[54] Vgl. Börgers (2010: 37–42).

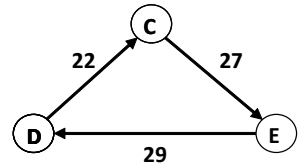


Abb. 3.2: Ausschnitt aus Pfadabbildung des Paarvergleiches. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.11.

Die Werte der schwächsten Glieder der möglichen Verbindungen werden festgestellt und jeweils dem Gegenweg gegenübergestellt. Es resultiert:

$$p[C;D] = 27 \Leftrightarrow p[D;C] = 22 \rightarrow C \textit{ dominiert über } D$$
$$p[C;E] = 27 \Leftrightarrow p[E;C] = 22 \rightarrow C \textit{ dominiert über } E$$
$$p[D;E] = 22 \Leftrightarrow p[E;D] = 29 \rightarrow E \textit{ dominiert über } D$$

Die kollektive Präferenzfolge ist demzufolge $C \succ E \succ D$.

Anwendung der Schulze-Methode auf das Beispiel 3.4 von S. 402:

Werden sämtliche Alternativen aus der Tabelle 3.6 in die Betrachtung einbezogen, entsteht der Beziehungsgraph, der in Abbildung 3.3 zu sehen ist.

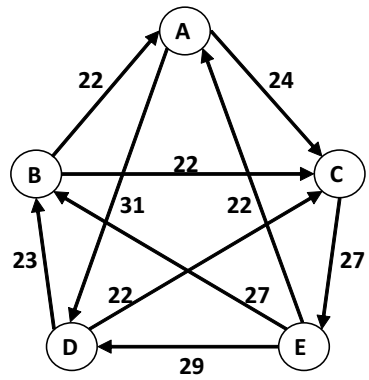


Abb. 3.3: Vollständige Pfadabbildung aller direkten Paarvergleiche. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Tabelle 3.11.

Für sämtliche direkte und indirekte Verbindungen der Abbildung 3.3 werden die Maxima der schwächsten Glieder ermittelt. Diese sind in Tabelle 3.14 dargestellt.

Tab. 3.14: Matrix der Maxima der schwächsten Glieder. Quelle: Eigene Darstellung, auf Basis der Tab. 3.13 von S. 411.

von \ nach	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	24	24	31	24
B	22	0	22	22	22
C	22	27	0	27	27
D	22	23	22	0	22
E	22	27	22	29	0

Die Gegenüberstellung der Werte von den korrespondierenden Hin- und Rückwegen ergeben folgende Präferenzrelationen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \succ \mathbf{B}\ (\mathbf{24}:\mathbf{22}) \\ \mathbf{A} \succ \mathbf{C}\ (\mathbf{24}:\mathbf{22}) \\ \mathbf{A} \succ \mathbf{D}\ (\mathbf{31}:\mathbf{22}) \\ \mathbf{A} \succ \mathbf{E}\ (\mathbf{24}:\mathbf{22})\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{C} \succ \mathbf{B}\ (\mathbf{27}:\mathbf{22}) \\ \mathbf{C} \succ \mathbf{D}\ (\mathbf{27}:\mathbf{22}) \\ \mathbf{C} \succ \mathbf{E}\ (\mathbf{27}:\mathbf{22})\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{E} \succ \mathbf{B}\ (\mathbf{27}:\mathbf{22}) \\ \mathbf{E} \succ \mathbf{D}\ (\mathbf{29}:\mathbf{22})\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{D} \succ \mathbf{B}\ (\mathbf{23}:\mathbf{22})$$

Die Präferenzordnung mittels der Schulze*-Methode:* lautet: $A \succ C \succ E \succ D \succ B$.

Ein Vergleich der Tabelle 3.13 mit der Tabelle 3.14 erklärt den Unterschied in der kollektiven Präferenzordnung nach der Schulze-Methode im Vergleich zur Mehrheit der Paarvergleiche ($E \succ A \sim B \sim D \succ C$). Alternative A ist in der Lage, über „Umwege“ alle anderen Alternativen zu schlagen. Diese Vorgehensweise konnte weder durch die Methode der sukzessiven Paarvergleiche noch durch die Regel der Mehrheit der Paarvergleiche abgebildet werden.

Zu kritisieren ist, dass diese Methode das Konsistenz-Kriterium, das Laterno-harm-Kriterium und das Teilnahme-Kriterium nicht erfüllt und ebenfalls nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.[55]

Die scheinbare Komplexität des Verfahrens hingegen kann durch einfache Programme deutlich reduziert werden. Dies führt dazu, dass das Verfahren in einigen Organisationen bereits standardmäßig eingesetzt wird, häufig bei Software-Unternehmen oder Internet-Plattformen wie zum Beispiel der Wikimedia Foundation und Ubuntu oder beim Berufsverband der Kinder- und Jugendärzte. Aktuell nutzen mehr als 60 Organisationen mit insgesamt mehr als 100.000 stimmberechtigten Mitgliedern dieses Verfahren.[56] Die Verwen-

[55] Vgl. Stahl/Johnson (2007: 127); Schulze (2011: 301).

[56] Vgl. Müller (2015: 57).

dung der SCHULZE-Methode verhindert die Möglichkeit der gezielten Einbringung einer Klon-Alternative zur Manipulation von Wahlen. Damit ist sie der in den Unternehmen sehr verbreiteten Mehrheitswahl deutlich überlegen.

3.2.3.3 Zwischenfazit

In der Tabelle 3.15 sind die Ergebnisse der bisher behandelten Entscheidungsregeln und -prinzipien auf die Ausgangssituation zusammengefasst.

Tab. 3.15: Zusammenfassung der Ergebnisse kollektiver Entscheidungsregeln. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tabelle 3.6 von S. 402.

Aggregationsregel	**Resultierende kollektive Präferenzordnung**
Einfache Mehrheit	$C \succ E \succ A \succ D \sim B$
Absolute Mehrheit	C
BUCKLIN-Regel	B
HARE-Regel	C
Mehrheit der Paarvergleiche	$E \succ A \sim B \sim D \succ C$
Sukzessive Paarvergleiche	In Abhängigkeit von der gewählten Reihenfolge kann **jede** Alternative als optimal resultieren.
BORDA-Regel: – mit allen fünf Alternativen – ohne Alternative C	 $A \succ E \succ C \succ B \succ D$ $E \succ A \succ B \succ D$
NANSON-Regel:	$A \succ C \succ E \succ B \succ D$
SCHULZE-Methode	$A \succ C \succ E \succ D \succ B$

Eine identische Ausgangslage führt in Abhängigkeit von der verwendeten Aggregationsregel zu verschiedenen Ergebnissen. Um die Qualität von Entscheidungsregeln beurteilen zu können, sind in der Tabelle 3.16 die nicht erfüllten Anforderungen an die bisher dargestellten kollektiven Aggregationsregeln zusammenfassend dargestellt.

Tab. 3.16: Erfüllung der Anforderungen durch Abstimmungsregeln. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Nurmi (1983: 206); Tideman (1987); Schauenberg (1992: 431); Woodall (1997); Tideman (2009: 237); Schulze (2011: 301); Rothe et al. (2012: 170).

Aggregationsregel	**Nicht erfüllte Anforderungen** (Zur Darstellung aller Anforderungen vgl. Tabelle 3.3 auf S. 395)
Mehrheits-Regel	– Unabhängigkeit von Klon-Alternativen – Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen – Condorcet-Kriterium
Nanson-Regel	– Unabhängigkeit von Klon-Alternativen – Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen – Teilnahme-Kriterium – Konsistenz-Kriterium – Monotonie-Kriterium – Later-no-harm-Kriterium
Bucklin-Regel	– Unabhängigkeit von Klon-Alternativen – Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen – Condorcet-Kriterium – Teilnahme-Kriterium – Konsistenz-Kriterium – Later-no-harm-Kriterium
Borda-Regel	– Unabhängigkeit von Klon-Alternativen – Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen – Condorcet-Kriterium – Majoritäts-Kriterium – Later-ho-harm-Kriterium
Hare-Regel (syn.: Instant-runoff-Voting)	– Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen – Condorcet-Kriterium – Teilnahme-Kriterium – Konsistenz-Kriterium – Monotonie-Kriterium
Schulze-Regel	– Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen – Teilnahme-Kriterium – Konsistenz-Kriterium – Later-no-harm-Kriterium

Aus der Tab. 3.16 wird deutlich, dass das Teilnahme- und das Konsistenz-Kriterium inhaltliche Überschneidungen aufweisen. Ein Verfahren, welches eines der Kriterien erfüllt, erfüllt automatisch auch das andere Kriterium. Auch die umgekehrte Relation ist gültig: Erfüllt ein Verfahren eines der Kriterien nicht, wird das andere Kriterium ebenfalls nicht erfüllt.

Der Leser mag etwas irritiert sein und sich an ein ähnliches Ergebnis in Bezug auf die individuellen Entscheidungsregeln unter Unsicherheit erinnert fühlen.[57] Deshalb ist das Fazit für kollektive Entscheidungsregeln identisch zu denen der individuellen Entscheidungen: Eine objektive Rationalität kann es bei derartigen Entscheidungen nicht geben, das Ergebnis ist abhängig vom gewählten Verfahren. Während diese Feststellung bei individuellen Entscheidungen zwar als problematisch, insgesamt jedoch lediglich als desillusionie-

[57] Vgl. Tabelle 1.55 auf S. 179.

rend bezeichnet werden kann, hat diese Feststellung im Fall kollektiver Entscheidungen weitreichende Folgen. Wenn das Ergebnis von Gremienentscheidungen durch die Wahl der Abstimmungsregel beeinflusst werden kann, so ist der Ausgang der Abstimmung beeinflussbar. Anders ausgedrückt: Bei Kenntnis unterschiedlicher Abstimmungsverfahren lässt sich das Ergebnis durch die Gremienmitglieder oder allein durch den Wahlleiter „**manipulieren**".

Im Gegensatz zur Theorie individueller Entscheidungen konnten für kollektive Entscheidungen **drei fundamentale Erklärungsansätze** für die Eigenschaften von Abstimmungsregeln entwickelt werden: Das Theorem von Arrow, das Theorem von Black sowie das Theorem von Gibbard und Satterthwaite.

Mit Bezug auf die „klassischen" Anforderungen an kollektive Entscheidungsregeln[58] konnte Arrow diejenigen Bedingungen nachweisen, bei welchen keine Entscheidung unter Erfüllung sämtlicher klassischer Anforderungen möglich ist.[59]

Theorem von Arrow:

Bei Existenz:

- von **mindestens drei Alternativen** und
- einem Gremium, das
  - aus **mindestens zwei Mitgliedern**,
  - aber einer **begrenzten Anzahl an Mitgliedern** besteht,

existiert **kein** kollektives Entscheidungsverfahren, das die Anforderungen:

- Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen,
- Pareto-Optimalität,
- Universalität,
- Diktatorverbot,

erfüllt.

Dies ist das bekannteste Theorem der kollektiven Entscheidungsfindung und hat eine weite Verbreitung erfahren.[60] Arrow zeigte, dass jede Methode zur Aggregation kollektiver Präferenzen, die das Condorcet-Kriterium erfüllt, automatisch die Forderung nach Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen verletzt.[61]

[58] Vgl. Tab. 3.3 auf S. 395.

[59] Vgl. Arrow (1950: 342); Arrow (1951: 51). Kenneth Arrow (1921–2017) erhielt 1972 zusammen mit John Hicks den „Wirtschaftsnobelpreis".

[60] Vgl. Krelle (1968: 99); Gäfgen (1974: 430); Altmann (1977: 82–83); Laukamm (1979: 89–90); Rommelfanger/Eickemeier (2002: 200); Ponick (2007: 40); Thiele (2008: 368–369). Der Hinweis auf die endliche Anzahl an Gremienmitgliedern ist erforderlich, da schon frühzeitig nachgewiesen werden konnte, dass bei einer **unendlichen Anzahl** an Gremienmitgliedern die vier Forderungen erfüllbar sind. Vgl. Fishburn (1970: 104–106); Taylor/Pacelli (2008: 214); Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 218).

[61] Es sei hier darauf hingewiesen, dass dieses Theorem häufig auch als Unmöglichkeits-Theorem bezeichnet wird, wohingegen Arrow selbst seine Feststellung als **„General Possibility Theorem"** bezeichnete. Vgl. Arrow (1951: 59).

Daraus lässt sich ein **erster Schluss** ziehen:[62] Die Reduktion auf zwei Alternativen ermöglicht eine Entscheidung, die den klassischen Anforderungen von Arrow genügt.[63] Die Gremienmitglieder – insbesondere der Wahlleiter – müssten aus Gerechtigkeits- und Rationalitätsgründen die Diskussion und die Abstimmung so steuern, dass schlussendlich nur noch über zwei Alternativen abgestimmt wird. Dies ist jedoch nur möglich, wenn andere Alternativen vorher aus dem Diskussionsprozess eliminiert werden. Mit welcher Begründung dies geschieht, ist wiederum fraglich. Auch kann diese Elimination u. U. gegen eine der Anforderungen verstoßen, weshalb das Problem nicht gelöst, sondern nur „wegdiskutiert“ wurde.

Ein **zweiter Schluss** besteht in der Feststellung, dass eine Entscheidung durch einen Diktator sehr wohl die übrigen Anforderungen erfüllt. Dies begründet auch das Konstrukt des **„wohlwollenden bzw. wohlmeinenden Diktators“**, das in der Realität häufig bei kollektiven Entscheidungen in sozialen Einheiten (Familie, Orchester, Sportgruppen) auftritt und durchaus berechtigt ist. Die Lösung des Problems durch einen wohlwollenden Diktator setzt jedoch voraus, dass diesem Diktator sämtliche individuellen Präferenzordnungen bekannt sind. Demzufolge müssen diese Informationen wahrheitsgemäß an den Diktator übermittelt werden und es müsste ein – wie auch immer gestalteter – Anreiz existieren, der die Individuen zu einer solchen Bekanntgabe veranlasst. Wenn es nicht gelingt, diese Präferenzordnungen wahrheitsgemäß zu ermitteln, kann der Diktator auch keine „wohlwollende“ Entscheidung treffen.[64] Für unternehmerische Entscheidungen ist dieser Lösungsansatz deshalb wenig praktikabel.

Einen anderen Lösungsansatz des Problems bietet das Konzept der **Eingipfligkeit**, das auf Duncan Black zurückgeht.[65] Bei diesem Ansatz wird versucht, ein Mindestmaß an Homogenität unter den zur Verfügung stehenden Alternativen zu fordern und im Entscheidungsprozess zu nutzen. Die Überprüfung der Präferenzordnungsprofile der Gremienmitglieder geschieht durch die grafische Darstellung derselben so, dass die Alternativen auf der Abzisse und die Präferenzen auf der Ordinate abgetragen werden.[66] Für jedes Gremienmitglied wird die Präferenz für die Alternativen eingetragen, wobei die Präferenzdimension lediglich ordinal erfasst wird. Diese Punkte werden miteinander verbunden, was zu einem entsprechenden Polygonzug führt (vgl. Abbildung 3.4). In diesem Beispiel gilt für zwei Gremienmitglieder $a_2 \succ a_1$ sowie $a_2 \succ a_3$. Weiterhin gilt für zwei Mitglieder $a_1 \succ a_3$, woraus die kollektive Präferenzordnung folgt: $a_2 \succ a_1 \succ a_3$.

[62] Die theoretische Lösungsmöglichkeit einer unendlich großen Anzahl an Gremienmitgliedern wird hier als nicht praktisch verworfen.

[63] Vgl. Arrow (1951: 48). Arrow bezeichnete dies als **„Possibility Theorem for two Alternatives“**.

[64] Vgl. Weimann (2006: 200–203).

[65] Duncan Black (1908–1991).

[66] Vgl. Black (1948). Für einen Beweis des Theorems vgl. Arrow (1951: 77–79).

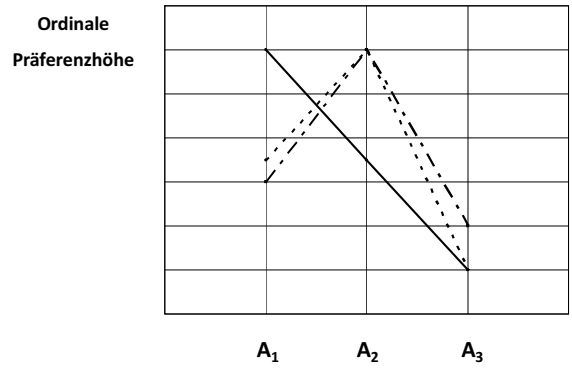


Abb. 3.4: Eingipfligkeit bei vollständiger Präferenzordnung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Ponick (2007: 97).

Die Überprüfung auf Eingipfligkeit wird an den möglichen Darstellungsvariationen bzw. -permutationen geprüft. Eingipfligkeit ist dann gegeben, wenn eine einzige aller möglichen Darstellungen der Präferenzordnungsprofile eingipflig ist. In diesem Fall ist ein Grad an Homogenität vorhanden, der für eine bestimmte Gremienzusammensetzung die Erfüllung der Theoreme von Arrow ermöglicht. Dies ist im Theorem von Black zusammengefasst.[67]

Theorem von Black:

Bei Existenz:

- von **eingipfligen Präferenzordnungsprofilen** und
- eines Gremiums, das aus einer **ungeraden Anzahl an Mitgliedern** besteht,

ermöglicht der **Mehrheitsentscheid** eine Entscheidung, die die Anforderungen:

– Diktatorverbot,
– Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen
– Pareto-Optimalität,

erfüllt.

Damit besteht eine weitere Möglichkeit, durch geringe Einschränkungen – hier wird das Universalitäts-Kriterium nicht erfüllt – eine Entscheidung zu treffen, die den übrigen Anforderungen genügt. Die Ausführungen verdeutlichen jedoch, dass es vom Prinzip her nur durch die Einschränkung einer der Anforderungen gelingt, die übrigen zu erfüllen. Damit wird die Richtigkeit und Relevanz des Theorems von Arrow deutlich.

Ein weiteres Problem wurde im Zusammenhang mit dem No-show-Paradox und dem Later-no-harm-Kriterium schon ersichtlich. Dort wurde dargelegt, dass die Gremienmitglieder durch gezieltes, unehrliches Abstimmungsverhal-

[67] Vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp (2019: 220–221).

ten das Ergebnis zu ihren Gunsten beeinflussen können.[68] Wünschenswert wäre es, wenn es Aggregationsmechanismen gäbe, die dieses unerwünschte Verhalten unmöglich machen. Leider konnte schon frühzeitig nachgewiesen werden, dass dies für alle Abstimmungsregeln, die auf Präferenzordnungsprofilen basieren, unmöglich ist.[69] Das GIBBARD-SATTERTHWAITE-Theorem besagt, dass jede Abstimmung auf Basis von Präferenzwahlregeln durch strategisches Stimmverhalten manipulierbar ist.[70]

Theorem von Gibbard und Satterthwaite:

Bei einer Abstimmung über **drei oder mehr Alternativen** auf Basis einer **Präferenzwahlregel**:

ist **entweder**
- die Diktator-Bedingung verletzt

oder
- die Souveränität der Gremienmitglieder verletzt

oder
- das Verfahren manipulierbar.

Die Souveränität der Gremienmitglieder soll sicherstellen, dass alle Alternativen dieselben Chancen haben. Demzufolge erfüllt ein Abstimmungsverfahren immer nur zwei der vorstehend genannten Bedingungen. Entweder ist es nichtmanipulierbar und nichtdiktatorisch, so existiert jedoch eine Alternative, die keine reelle Chance hat, als optimale Alternative zu resultieren. Oder alle Alternativen gehen gleichberechtigt in die Abstimmung und das Verfahren ist nichtmanipulierbar, dann ist die Abstimmung diktatorisch.[71] Es wird deutlich, dass das Theorem von ARROW und das GIBBARD–SATTERTHWAITE-Theorem zwar auf unterschiedliche Weise, jedoch gemeinsam auf die logische Begrenztheit der Rationalität kollektiver Entscheidungen hindeuten.[72]

3.2.3.4 Indikatoren der Abstimmungsstärke

Neben einem **nominellen** Stimmengewicht der Gremienmitglieder existiert bei **Mehrheitswahlregeln** auch ein **reales** Gewicht der Mitglieder. Die Abstimmungsstärke gibt deshalb an, über welches **reale Stimmengewicht** die einzelnen Gremienmitglieder verfügen. Die Differenz aus nominellem und reellem Stimmengewicht ergibt sich aus der erforderlichen Stimmenanzahl und den unterschiedlichen Konstellationen bzw. möglichen Koalitionen. Durch Bildung dieser Koalitionen ist es für die Mitglieder möglich, sich zusammen-

[68] Vgl. Beispiel 3.2 auf S. 397.

[69] Vgl. Gibbard (1973); Satterthwaite (1975).

[70] Vgl. Taylor/Pacelli (2008: 222–224); Börgers (2010: 71–74); Rothe et al. (2012: 155–156).

[71] Vgl. Moulin (1994: 1102); Trapp (2000: 322–323).

[72] Vgl. Reny (2001).

zuschließen, um einen Antrag oder ein Vorhaben zu unterstützen oder zu verhindern. In Abhängigkeit von der konkreten Konstellation verfügen die Mitglieder also über eine Abstimmungsstärke bzw. Verhandlungsmacht. Die Indikatoren zur Messung dieser Stärke werden deshalb auch als Machtindex bezeichnet. Aus der Reihe der verfügbaren Indizes werden im Folgenden der Shapley-Shubik-Index und der Penrose-Banzhaf-Index vorgestellt. Für weitere Darstellungen und Anwendungsbeispiele wird auf die Literatur verwiesen.[73]

Shapley und Shubik begründeten 1954 in Anlehnung an die Shapley-Lösung[74] den nach ihnen benannten Index.[75] Grundgedanke dieses Indizes ist die **Permutation sämtlicher prinzipieller Koalitionsbildungen**. **Im ersten Schritt** wird betrachtet, zu welcher Koalition das Mitglied einen entscheidenden Beitrag leistet. „Entscheidend" in diesem Kontext bedeutet, dass die Koalition, zu der das Mitglied hinzutritt, zur Gewinnerkoalition wird (bzw. alternativ die Koalition, aus der das Mitglied austritt, zur Verliererkoalition wird). Dies wird als „Swing" bezeichnet.[76] Deshalb wird im **zweiten Schritt** für diese Kombinationen der Beitrag jedes Gremienmitgliedes daraufhin untersucht, ob es sich um ein derartiges Swing-Ereignis handelt oder nicht. Von Relevanz für die weitere Analyse sind nur die Swing-Beiträge eines Mitglieds. Im **dritten Schritt** wird untersucht, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für diese Kombination ist. Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Swing-Beitrags für ein Mitglied werden im **letzten Schritt** aufsummiert. Bei m Gremienmitgliedern sind $n!$ Permutationen zu berücksichtigen.

Definition 3.1: *Wird mit S_i eine Swing-Koalition benannt und wird durch $|S_i \backslash i|$ die Anzahl der Mitglieder der Swing-Koalition vor dem Beitritt des Mitglieds i zu dieser Koalition bezeichnet, resultiert der* Shapley-Shubik-*Index des Mitglieds i (SSI_i) aus:*[77]

$$SSI_i = \sum_{S_i} \frac{|S_i \backslash i|! \ (n - |S_i \backslash i| - 1)!}{n!}$$

Ausgangspunkt der Analyse ist immer die erforderliche zu erreichende Stimmenanzahl. Diese ist abhängig von der verwendeten Mehrheitsregel und von der festgelegten Beschlussfähigkeit. Ausgehend von dieser Anzahl werden an-

[73] Vgl. Nurmi (1997); Kirstein (2010); Holler/Illing/Napel (2019: 329–335).

[74] Vgl. Abschn. 4.5.2 auf S. 500.

[75] Vgl. Shapley/Shubik (1954). Lloyd S. Shapley (1923–2016) und Martin Shubik (1926–2018). Im Jahr 2012 erhielt Lloyd S. Shapley den „Wirtschaftsnobelpreis".

[76] Vgl. Leech (1990: 294). Dies wird in der Literatur auch als Pivotbeitrag bezeichnet bzw. das Mitglied wird als Pivotmitglied bezeichnet. Vgl. Hu (2006: 230).

[77] Vgl. Leech (1990: 294). Ein Vergleich dieser Definition mit der Ermittlungsvorschrift der Shapley-Lösung in Definition 4.16 auf S. 500 zeigt, dass es sich bei dem Shapley-Shubik-Index um eine Anwendung der Shapley-Lösung auf einfache Abstimmungsspiele handelt. Vgl. Feltkamp (1995).

schließend sämtliche Koalitionsmöglichkeiten durchgespielt und die Anzahl der Swing-Beiträge der Gremienmitglieder wird ermittelt.

Zur Erläuterung wird das folgende Beispiel diskutiert:[78] Es werden drei Gremienmitglieder betrachtet. Demzufolge sind 3! Permutationen möglich. Mitglied 1 verfügt über 55 Stimmen, Mitglied 2 über 25 Stimmen und Mitglied 3 erhält 20 Stimmen. Die – für die Annahme oder Ablehnung eines Antrags – notwendige, zu erreichende Stimmenanzahl beträgt 70 Stimmen.

Aus der Shapley-Shubik-Formel ergeben sich die folgenden Gewichtungsfaktoren für die Beiträge in Abhängigkeit von der Beitrittsreihenfolge:

- Eintritt an erster Stelle: $\frac{0!\ (3-0-1)!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Eintritt an zweiter Stelle: $\frac{1!\ (3-1-1)!}{3!} = \frac{1}{6}$
- Eintritt an dritter Stelle: $\frac{2!\ (3-2-1)!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Die Gewichtung des Beitrags des Mitgliedes 1 ist sowohl an erster als auch an letzter Stelle identisch, da in diesen Fällen die Ergebnisse der bisher existierenden Koalitionen identisch sind. Lediglich bei dem Beitritt an zweiter Stelle ist zu unterscheiden, ob Mitglied 2 schon in der Koalition existierte oder ob Mitglied 3 schon existierte.

Mitglied 1 kann jeweils durch den Beitritt zu einem der anderen beiden Mitglieder eine Swing-Koalition herbeiführen. Darüber hinaus benötigen die anderen beiden Mitglieder, auch wenn sie schon zu einer Koalition zusammengeschlossen sind, das Mitglied 1 in jedem Fall zur Bildung einer Swing-Koalition. Mitglied 1 ist also zwei Mal an zweiter Stelle und zwei Mal an dritter Stelle an der Bildung einer Swing-Koalition beteiligt. Der Beitrag, den Mitglied 1 an dritter Stelle erbringt, ist unabhängig davon, wie die bestehende Koalition (Mitglied 2 und Mitglied 3) gebildet wurde.

Deshalb resultiert der SSI für Mitglied 1 aus:

$$
\begin{aligned}
SSI_1 &= 0 \cdot \underbrace{\frac{0!(3-0-1)!}{3!}}_{Erstbeitritt} + \underbrace{1 \cdot \frac{1!(3-1-1)!}{3!}}_{Beitritt\ zu\ Mitglied\ 2} + \underbrace{1 \cdot \frac{1!(3-1-1)!}{3!}}_{Beitritt\ zu\ Mitglied\ 3} + \underbrace{1 \cdot \frac{2!(3-2-1)!}{3!}}_{Beitritt\ an\ 3.\ Stelle} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\
&= \frac{4}{6}
\end{aligned}
$$

Es wird deutlich, dass es sich bei diesen Werten um die Wahrscheinlichkeiten des Zustandekommens der Swing-Koalition durch den Beitritt des Mitglieds 1 handelt. In 2/6 aller Fälle tritt das Mitglied 1 als letztes Mitglied der Swing-Koalition bei. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mitglied 1 zu Mitglied 2 hinzutritt

[78] Vgl. Holler/Illing/Napel (2019: 314).

und daraus eine Swing-Koalition entsteht, beträgt $\frac{1}{6}$. Für die Wahrscheinlichkeit des Hinzutritts zu Mitglied 3 gilt derselbe Wert.

Die Mitglieder 2 und 3 können jeweils nur einmal an zweiter Position zu einer Swing-Koalition führen, weshalb gilt:

$$SSI_2 = SSI_3 = \frac{1!(3-1-1)!}{3!} = \frac{1}{6}$$

Die alternative Darstellung mittels tabellarischer Auflistung der Permutationen für das Beispiel ist in der Tabelle 3.17 zu sehen.

Tab. 3.17: Alternative Ermittlung des Shapley-Shubik-Index. Quelle: Eigene Darstellung.

	Mitglieder		
Permutationen	**Mitglied 1 (55 Stimmen)**	**Mitglied 2 (25 Stimmen)**	**Mitglied 3 (20 Stimmen)**
(**1**,**2**,**3**)	–	1	–
(**1**,**3**,**2**)	–	–	1
(**2**,**1**,**3**)	1	–	–
(**2**,**3**,**1**)	1	–	–
(**3**,**1**,**2**)	1	–	–
(**3**,**2**,**1**)	1	–	–
Summe der verursachten Swing-Ereignisse	4	1	1
Shapley-Shubik-Index	$4/6 = 2/3$	$1/6$	$1/6$

Es wird deutlich, dass das Mitglied 1 den größten Machtindex hat, da es durch den Zusammenschluss mit jedem anderen Gremienmitglied in der Lage ist, über Annahme oder Ablehnung eines Antrags zu entscheiden. Für eine Kritik dieses Ansatzes kann auf die Kritik der zugrunde liegenden Shapley-Lösung an entsprechender Stelle verwiesen werden.[79]

Ein weiterer Index, der häufig nach Banzhaf benannt wird,[80] jedoch in Grundzügen erstmals von Penrose entwickelt wurde,[81] basiert nicht wie der Shapley-Shubik-Index auf der Analyse der Permutationen aller denkbaren Koalitionen. Stattdessen wird lediglich die **Anzahl** derjenigen Koalitionen festgestellt, die durch den Hinzutritt bzw. durch das Verlassen eines Mitglieds entscheidend beeinflusst werden, also die Swing-Ereignisse.

Für die normalisierte bzw. standardisierte Version des Penrose-Banzhaf-Index wird in einem **ersten Schritt** für jedes Gremienmitglied festgestellt, an der Bildung welcher Anzahl Swing-Koalitionen das Mitglied beteiligt ist,

[79] Vgl. Abschnitt 4.5.2.2.

[80] Vgl. Banzhaf (1965); Banzhaf (1968). John F. Banzhaf III, geb. 1940.

[81] Vgl. Penrose (1946). Lionel S. Penrose (1898–1972).

also welche Anzahl an Swing-Ereignissen ein Mitglied bewirken kann. Im **nächsten Schritt** wird die Gesamtanzahl dieser Swing-Ereignisse ermittelt. Im **dritten Schritt** wird der normalisierte Penrose-Banzhaf-Index ermittelt, indem der erste Wert zum zweiten Wert in Relation gesetzt wird.

Definition 3.2: *Der* Penrose-Banzhaf*-Index PBI des Mitglieds i resultiert aus:*[82]

$$PBI_i = \frac{Anzahl\ der\ von\ i\ verursachten\ Swings}{Gesamtanzahl\ an\ Swings}$$

Häufig wird die Penrose-Banzhaf-Wahrscheinlichkeit zur Ermittlung des Index herangezogen. Diese ist definiert durch die Anzahl der von einem Mitglied verursachten Swings bezogen auf die **prinzipiell möglichen Swings**. Diese ergeben sich aus der Anzahl aller Koalitionen, an denen das Mitglied i (noch) nicht beteiligt ist, wie folgt: 2^{n-1}. Dabei beschreibt n die Gesamtmenge an Spielern bzw. stimmberechtigten Mitgliedern. Damit resultiert die Penrose-Banzhaf-Wahrscheinlichkeit (PBI-Wahrscheinlichkeit) des Mitglieds i aus:

$$PBI_i - Wahrscheinlichkeit = \frac{Anzahl\ der\ von\ i\ verursachten\ Swings}{2^{n-1}}$$

Dieser Wert wird auch als nicht-normalisierter Penrose-Banzhaf-Index bezeichnet.[83] Die Normalisierung geschieht durch die Berücksichtigung der Summe aller PBI-Wahrscheinlichkeiten wie folgt:

$$PBI_i = \frac{PBI_i - Wahrscheinlichkeit}{Gesamtsumme\ aller\ PBI - Wahrscheinlichkeiten}$$

Wird das Beispiel aus Tabelle 3.17 von S. 423 herangezogen, so kann für Gremienmitglied 1 festgestellt werden, dass es für drei Koalitionen wesentlich ist, für die Koalitionen (1,2), (1,3) sowie (1,2,3). Für diese Koalitionen führt Mitglied 1 das Swing-Ereignis herbei. Mitglied 2 kann lediglich für die Koalition (1,2) ein Swing-Ereignis herbeiführen, während Mitglied 3 wesentlich für die Koalition (1,3) ist. Die Gesamtsumme an Swing-Ereignissen beträgt demzufolge fünf. Mitglied 1 hat daran einen Anteil von $3/5$, und die Mitglieder 2 und 3 haben einen Anteil von jeweils $1/5$.

Die Ermittlung über die PBI-Wahrscheinlichkeit für das Mitglied 1 führt zu: $PBI_1 - Wahrscheinlichkeit = 3/4$. Überleitung über die Summe aller PBI-Wahrscheinlichkeiten führt wiederum zu dem bereits ermittelten Wert: $PBI_1 = \frac{3/4}{5/4} = 3/5$. Für die übrigen zwei Mitglieder ist die Vorgehensweise identisch.

[82] Vgl. Leech (1990: 294–295); Holler/Illing/Napel (2019: 324).

[83] Vgl. Holler/Illing/Napel (2019: 324).

Der Vergleich der Ergebnisse von Penrose-Banzhaf-Index und Shapley-Shubik-Index zeigt keinen Unterschied in der Rangfolge der Mitglieder. Mitglied 1 ist bei Verwendung beider Berechnungsvorschriften das mächtigste und deshalb einflussreichste Mitglied. Lediglich im Hinblick auf die absoluten Index-Werte kann festgestellt werden, dass das Mitglied 1 bei der Verwendung des Shapley-Shubik-Index bessergestellt wird. Die grundlegende Argumentation des Penrose-Banzhaf-Index ist im Vergleich zum Shapley-Shubik-Index als realitätsnäher zu bezeichnen. Es ist noch einmal darauf hinzuweisen, dass diese Indizes nur auf **Mehrheitsentscheidungen** anwendbar sind.

3.2.4 Zusammenfassende Kritik

Es wurde gezeigt, dass eine Reihe von wünschenswerten Anforderungen an eine rationale Entscheidungsfindung existiert, jedoch kein Verfahren in der Lage ist, diese sämtlich zu erfüllen. Verschiedene Verfahren führen zu unterschiedlichen Ergebnissen. Der Entscheidungsträger bzw. der Modellkonstrukteur muss entscheiden, welches Kriterium in der jeweiligen Situation wichtig ist. Ohne diese normative Entscheidung ist die Auswahl des passenden Verfahrens nicht möglich. Dies ist jedoch keine Besonderheit kollektiver Entscheidungen, sondern auch in anderen Bereichen der Entscheidungstheorie anzutreffen, so z. B. in der kooperativen Spieltheorie.[84]

3.3 Eigenschaften und Verhalten von Gruppen

3.3.1 Eigenschaften von Gruppen

Da die Einbindung von Personen in Gruppen häufig die Verhaltensweise der Personen verändert, wird nun auf diese Spezifika detaillierter eingegangen. Auf das Gruppenverhalten nehmen die Gruppenmitglieder und die Organisationsumwelt der Gruppe im Unternehmen Einfluss (vgl. Abbildung 3.5).

[84] Vgl. Abschn. 4.5.6 auf S. 527.

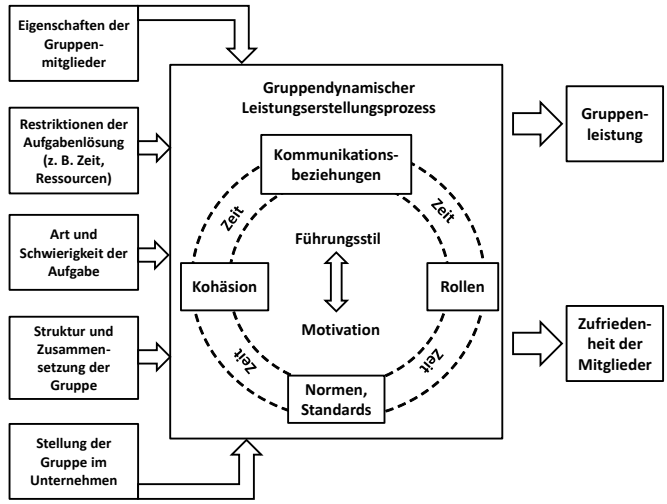


Abb. 3.5: Einflussvariablen der Gruppenarbeit. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Staehle (1999: 286); Berthel/Becker (2010: 123).

Jedes einzelne Gruppenmitglied wird durch Persönlichkeitsaspekte beschrieben. Der Grad der Übereinstimmung dieser Merkmale beschreibt die Homogenität bzw. Heterogenität der Gruppe, die sich durch die Interaktion der Gruppenmitglieder mit der Organisationsumwelt formiert und entwickelt. Die idealtypischen Phasen der Gruppenbildung sind aus der Tabelle 3.18 ersichtlich.

Tab. 3.18: Idealtypische Phasen der Gruppenentwicklung. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Jung (2011: 488).

Phase	Merkmale
Kennenlernen	Unsicherheit bezüglich anderer Personen sowie der Aufnahme der eigenen Person
Orientierung	Feststellung der Aufgabe und der Vorgehensweise
Machtkampf	Macht- und Interessenkonflikte treten offen hervor
Organisation	Hierarchie wird etabliert, Positionen werden zugeteilt, Vorgehensweise wird abgestimmt
Produktion	Erfüllung der Aufgabe, Entstehen von Gruppenkohäsion und Zufriedenheit
Auflösung	Aufgabe ist erfüllt, persönliche Distanzierung

Neben der 6-Phasen-Einteilung aus Tabelle 3.18 ist die 4-Phasen-Einteilung „Forming-Storming-Norming-Performing“ gebräuchlich.[85]

[85] Vgl. Schulte-Zurhausen (2014: 188–189); Stock-Homburg/Groß (2019: 647–649).

Innerhalb von Gruppen findet in jedem Fall Kommunikation statt, also der gegenseitige Austausch von Signalen zwischen Sender und Empfänger. Dieser Austausch kann verbal oder nonverbal erfolgen, eine ausbleibende Reaktion auf eine Mitteilung ist selbst wieder eine Mitteilung.[86] Jede Nachricht wird durch vier in gleichem Maße bedeutende Dimensionen gekennzeichnet:[87]

- **inhaltliche Dimension**: Diese wird durch den Sachinhalt bzw. die Sachinformation bestimmt.
- **Dimension der Selbstoffenbarung**: Mit jeder Nachricht übermittelt der Sender, beabsichtigt oder auch nicht, Informationen über seine eigene Persönlichkeit.
- **Beziehungsdimension**: Durch die Art der Formulierung, der Mimik und Gestik während der Informationsübermittlung gibt der Sender zu verstehen, wie er den Empfänger einschätzt. Zusätzlich macht der Sender deutlich, in welcher Beziehung er zum Empfänger steht.
- **Appelldimension**: Diese Dimension der Nachricht zielt auf die Einflussnahme des Empfängers.

Wenn der Empfänger in Abhängigkeit von seiner Persönlichkeit, der Beziehung zum Sender und der spezifischen Situation die einzelnen Dimensionen der Nachricht anders wahrnimmt und einstuft als vom Sender beabsichtigt, resultieren Kommunikationsstörungen. Diese sind deshalb so schwer zu erkennen und zu beheben, weil jede Person die vier Dimensionen unbewusst verwendet. Außerdem lässt sich ein Konsens in Bezug auf die Wertung der Dimensionen nur schwer herstellen.

Neben der bei Sender und Empfänger unterschiedlichen Wahrnehmung und Verarbeitung dieser vier Dimensionen resultieren Kommunikationsstörungen aus dem Informationsverlust, der im Verlauf der Erzeugung, Übermittlung, Aufnahme und Verarbeitung von Informationen auftreten kann (Stille-Post-Problem).

Neben der Kommunikation sind folgende Beschreibungs- und Ausprägungsmerkmale für Gruppen relevant:[88]

- Gruppenkohäsion,
- Normen und Standards,
- interne Sozialstruktur und
- kollektive Handlungsmuster.

Gruppenkohäsion (Zusammenhalt, Festigkeit) beschreibt die Fähigkeit der Gruppe, auch dann als Gruppe zu existieren, wenn deren Mitglieder Druck

[86] Vgl. Winkler/Hofbauer (2010: 216–222).
[87] Vgl. Fiege/Muck/Schuler (2006: 473–478).
[88] Vgl. Rosenstiel (2009: 329–330); Steinmann/Schreyögg/Koch (2013: 545).

und Stress ausgesetzt sind. Gruppenkohäsion wird von folgenden Faktoren positiv beeinflusst:[89]

- geringe Mitgliederzahl,
- demokratisches Führungsverhalten,
- große Homogenität der Mitglieder,
- hohe gegenseitige Abhängigkeit,
- hohe Attraktivität der Gruppe,
- häufige Interaktion,
- Einigkeit über Gruppenziele,
- Erfolg.

Kohäsion beeinflusst auf unterschiedlichen Ebenen das Gruppenverhalten. Die Wirkung der Kohäsion auf die Gruppenleistung hängt vom Verhältnis zwischen den Zielen der Gruppe zu den Unternehmenszielen bzw. den Zielen des Aufgabenstellers ab. Wenn diese übereinstimmen, wirkt sich Kohäsion positiv auf die Gruppenleistung aus. Sind die Ziele konträr, beeinflusst eine hohe Kohäsion die Gruppenleistung negativ. Neben Auswirkungen auf das Leistungsverhalten sind psychische Folgen der Gruppenkohäsion festzustellen. So bewirkt eine hohe Kohäsion abnehmende Ängste und Spannungen sowie eine geringere wahrgenommene Belastung. Zusätzlich ist die Zufriedenheit der Mitglieder in hochkohäsiven Gruppen größer, was zu geringeren Fehlzeiten und niedrigerer Mitarbeiterfluktuation führt.[90]

Die Herausbildung eigener Normen und Standards ergibt sich aus der Interaktion von Mitgliedern und Umwelt und bietet die Möglichkeit, sich von anderen Gruppen abzugrenzen. Gruppennormen formulieren Anforderungen der Gruppe in Bezug auf die Denk- und Verhaltensweise in bestimmten Situationen. Standards sind Verhaltenserwartungen, die durch informelle Richtlinien und Richtwerte ausgedrückt werden. Häufig setzen Gruppen eigene Leistungsstandards, an denen sich die Mitglieder orientieren bzw. nach denen sie sich verhalten müssen. Sowohl das Überschreiten (Normbrecher) als auch das Unterschreiten (Drückeberger) der Norm wird in diesen Fällen durch die übrigen Gruppenmitglieder sanktioniert (z. B. durch Kommunikationsausschluss, Beschimpfungen, Einschränkung der Kooperation).[91]

Führungsaufgabe ist es, eine Konformität von Gruppennormen und Zielvorgaben zu erreichen. Dazu ist es erforderlich, dass die Ziele herausfordernd, aber erreichbar sind. Zusätzlich können Gruppenmitglieder an der Zielformulierung beteiligt werden und durch schnelle Rückmeldung über die Qualität der Arbeitsergebnisse informiert werden. Anreizsysteme, die die Akzeptanz und Erfüllung der Zielvorgaben honorieren, können ebenfalls zur Konformitätserhöhung von Gruppennormen bzw. -zielen und Unternehmenszielen eingesetzt werden. Von Gruppen wird eine eigene Struktur entwickelt, die interne Sozialstruktur, die die Unterschiede innerhalb der Gruppe widerspiegelt

[89] Vgl. Staehle (1999: 283); Comelli/Rosenstiel/Nerdinger (2014: 163–164); Nitzsch (2021: 288).

[90] Vgl. Wegge (2006: 593–598).

[91] Vgl. Holtbrügge (2018: 178–179).

und den einzelnen Mitgliedern die Zielerreichung und Bedürfnisbefriedigung ermöglicht. Die interne Sozialstruktur wird durch die:

- Statusstruktur,
- Rollenstruktur und
- Führungsstruktur

gekennzeichnet. Der Status beschreibt die Wertschätzung, die die Mitglieder eines sozialen Systems einer Position zuweisen. Die Position beschreibt wertneutral die Einordnung der Stelle in der Organisation. Status ist eine soziale Konstruktion, die von den Personen abhängig ist, die die Einstufung vornehmen, und von Organisation zu Organisation unterschiedlich sein kann. Durch den Status können sich Gruppenmitglieder gegenüber anderen Mitgliedern abgrenzen, Selbstwertgefühle verstärken und das Bedürfnis nach Fremdwertschätzung befriedigen. Mit dem Status sind die Handlungsfreiheiten und Umgangsformen von Personen vorgegeben, wodurch das Verhalten von Gruppenmitgliedern beeinflusst wird.

Während der Status das Ansehen einer Person beschreibt, umfasst die Rolle ein Bündel von Erwartungen, das vorgibt, wie sich der Inhaber einer Position zu verhalten hat. Rollen werden von allen Individuen an eine Person herangetragen, weshalb ein Positionsinhaber in einem Unternehmen i. d. R. mehrere Rollen einnimmt (z. B. in den Augen aktueller Kollegen, aus der Sicht des Vorgesetzten, aus der Sicht von ehemaligen Kollegen). Neben diesen Rollen im Unternehmen werden an Personen auch außerhalb des Unternehmens Rollen herangetragen (vgl. Abbildung 3.6).[92]

Für das Verhalten in Gruppen sind die Rollenerwartungen und das Rollenverhalten von wesentlicher Bedeutung.[93] Rollenanforderungen werden nicht explizit gegeben, sondern sind vom Rolleninhaber aus der Organisationsumwelt aufzunehmen und zu interpretieren. Tritt ein neues Mitglied in die Gruppe ein, kann es erst nach und nach die Rollenanforderungen erkennen, interpretieren und dann entscheiden, ob und wie es diesen Anforderungen gerecht wird. Die Vielzahl von Rollen, die ein und derselben Person zugewiesen wird, kann zu Rollenkonflikten führen.[94]

[92] Vgl. Macharzina/Wolf (2018: 572).
[93] Vgl. Hoffjan (2003: 1026–1027).
[94] Vgl. Weibler (2016: 41–43).

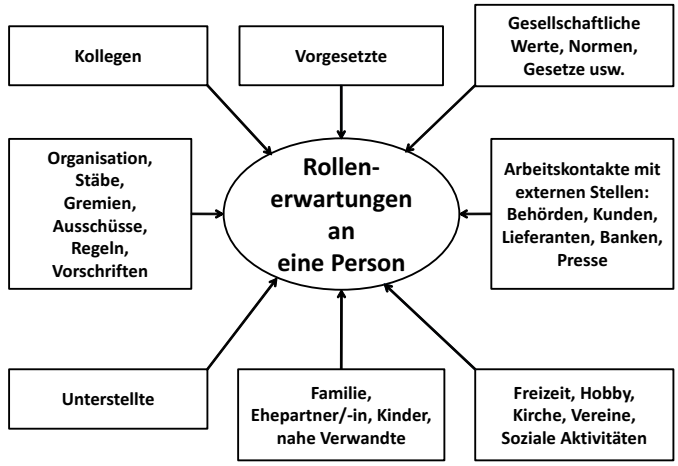


Abb. 3.6: Mögliche Rollenerwartungen an eine Person. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Berthel/Becker (2010: 131).

Konflikte sind zwischen unterschiedlichen Rollen einer Person, aber auch zwischen der Person und der von ihr erwarteten Rolle möglich. Mit dem Begriff „Rollensender" wird in diesem Zusammenhang die Person bezeichnet, welche die Erwartungen an eine Person heranträgt. „Rollenempfänger" ist diejenige Person, die die Rollenerwartungen erfüllen soll. Es werden unterschieden:[95]

- **Intra-Sender-Konflikt:** Erwartungen und Anweisungen ein und desselben Senders sind widersprüchlich. Dies wäre der Fall, wenn der Geschäftsführer vom Controlling in einem Quartal eine prinzipiell kritische Haltung gegenüber den eingereichten Investitionsanträgen einfordert, im nächsten Quartal hingegen jedwede Kritik an diesen Plänen ablehnt.
- **Inter-Sender-Konflikt:** Erwartungen und Aufforderungen mehrerer Sender widersprechen sich. Dies ist der Fall, wenn aus dem Management und aus der Belegschaft gegensätzliche Ansprüche an den Controller herangetragen werden.
- **Inter-Rollen-Konflikt:** Aufgrund unterschiedlicher Rollen, welche an ein und dieselbe Person herangetragen werden, können Konflikte beim Rollenempfänger entstehen, die sich im Extremfall widersprechen. Wenn zu viele Rollen an ein und dieselbe Person herangetragen werden, kann es zur Rollenüberladung kommen.
- **Person-Rollen-Konflikt:** Jede Person ist durch subjektive Ansprüche und Rollenverständnisse gekennzeichnet. Die Möglichkeit und die Motivation zur aktiven Gestaltung einer Rolle wird als *role making* bezeichnet.

[95] Vgl. Scheytt/Unterrieder/Becker (2005: 99–104); Wiswede (2012: 300); Steinmann/Schreyögg/Koch (2013: 561).

> Wenn das Selbstverständnis der Controllingakteure den Erwartungen an diese Akteure widerspricht, resultieren Konflikte zwischen diesen Rollenbildern.[96]

Zusätzliche Einflüsse auf das Gruppenverhalten gehen von formellen und informellen Gruppenführern aus. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden besteht in der Legitimation. Während der formelle Gruppenführer durch seine Position in der Organisation legitimiert ist, wird dem informellen Gruppenführer aufgrund seiner Qualifikation oder anderer Persönlichkeitsmerkmale von der Gruppe Macht zuerkannt.[97]

3.3.2 Konsequenzen für den Entscheidungsprozess

Aufbauend auf der bereits dargestellten Kritik der präskriptiven Entscheidungstheorie[98] und in Ergänzung zur Erforschung individueller, realer Entscheidungsprozesse[99] entstanden in dem Bereich der Unternehmensführung Strukturierungsansätze für kollektive Entscheidungsprozesse, die im Folgenden kurz dargestellt werden. Es sind dies:

- das Politik-Modell der Entscheidung,
- das Konflikt-Modell der Entscheidung sowie
- das Modell der organisierten Anarchie.

Politik-Modell der Entscheidung: Der bisher betrachtete Akteur kann sich allein seine Ziele setzen, kann die beste Problemlösung allein erarbeiten und muss bei deren Umsetzung nicht mit Widerstand rechnen. In realen unternehmerischen Entscheidungssituationen müssen die Ziele jedoch häufig in Verhandlungsprozessen zwischen Organisationsmitgliedern entwickelt werden und es ist sowohl in der Planungs- als auch in der Umsetzungsphase mit Widerstand bzw. Einflussnahme durch andere Akteure zu rechnen. Der Politik-Modell-Ansatz konzentriert sich auf Multipersonalität im Rahmen der **Zielsetzung** von Entscheidungsprozessen und interpretiert das Unternehmen als politisches System. Die zu erreichenden Ziele werden demzufolge zwischen den Vertretern unterschiedlicher Anspruchsgruppen ausgehandelt.

Das Modell unterscheidet zwischen zwei Gruppentypen: Die **Kerngruppe** ist kraft Satzung zur Festlegung der Unternehmensziele legitimiert. Da am Leistungserstellungsprozess des Unternehmens jedoch viele Individuen beteiligt

[96] Vgl. Knollmann/Hirsch/Weber (2007: 367–370).
[97] Vgl. Vahs (2012: 125–127).
[98] Vgl. Abschnitt 2.
[99] Vgl. Abschnitt 2.3.3.

sind, die in entsprechenden Interessens- und Anspruchsgruppen zusammengefasst werden können, sind auch diese Gruppen zu berücksichtigen. Diese werden als sog. **Satellitengruppen** in dem Modell erfasst. Satellitengruppen beeinflussen die Zielbildung durch Verhandlungen mit der Kerngruppe. Entscheidungen sind aus diesem Blickwinkel Resultat von langwierigen Verhandlungen auf mehreren Ebenen der Unternehmenshierarchie. Der Prozess ist komplex und langwierig, kann jedoch deshalb als rational bezeichnet werden, da er der Berücksichtigung aller beteiligten Interessen dient und aus langfristiger Sicht zur Stabilität des Unternehmens beiträgt.[100] Es muss jedoch die Frage gestellt werden, ob es für derartige Problemstellungen eine rationale Entscheidung bzw. einen rationalen Entscheidungsprozess gibt.[101]

Konflikt-Modell: Das Konflikt-Modell integriert explizit die Gefühle der Beteiligten in die Erklärung der Entscheidungsprozesse. Oftmals sind wichtige Entscheidungen mit unsicheren Konsequenzen verbunden, verwickeln die Akteure deshalb in massive Konflikte und erzeugen Gefühle wie Hass, Angst oder Stress. Logischerweise – und aus Sicht der Individuen auch rational – versuchen diese, entsprechende Situationen zu vermeiden. Dies führt zu einem Entscheidungsprozess, der als prozedural rational zu bezeichnen ist. Die Hauptaussage des Konflikt-Modells ist, dass die Entscheidung in großem Maße von der Informationssuche abhängt, deren Qualität wiederum von dem wahrgenommen Konflikt- und Stressniveau bestimmt wird. Bei zu geringem Stressniveau wird die Informationssuche vernachlässigt, wohingegen zu viel Stress zur Resignation und ebenfalls zu einer nachlässigen Informationssuche führt. Das Modell identifiziert Situationen, in denen der Akteur aufgrund der soeben beschriebenen Zusammenhänge eine qualitativ hochwertige Informationssuche betreibt.[102]

Modell der organisierten Anarchie: Die bisher dargestellten Modellkonzeptionen des Planungs- und Entscheidungsverhaltens basierten auf der Annahme und auch auf der Beobachtung, dass die Beziehung von Problemlage, Entscheidungsfeld, Entscheidungsgelegenheit und Akteuren zweifelsfrei und stabil geklärt ist. Für bestimmte Problemklassen kommen nur bestimmte Lösungsalternativen in Frage, die durch bestimmte Personen bewertet und ausgewählt werden. Die Entscheidung verläuft in Entwicklungsbahnen, die den Prozess und dessen Ergebnis – zumindest zu einem gewissen Teil – prognostizierbar machen. Der Kontext des Entscheidungsprozesses hat darauf keinen Einfluss. In einer Reihe von Organisationen ist diese Relation und Kon-

[100] Vgl. Staehle (1999: 499–500).

[101] *„Politische Entscheidungsprobleme sind also schlecht-strukturierte, komplexe Probleme, bei denen eine Vielzahl individueller, in unterschiedlichen Kontexten definierter Systeme von Werten und Überzeugungen relevant sind. Die Frage, wie derartige Entscheidungsprobleme ‚rational' und ‚sachlich' zu bewältigen sind, ist so lange eine ‚sinnlose' Frage, als nicht geklärt ist, was ‚rational' und ‚sachlich' in diesem Zusammenhang bedeutet."* Kirsch/Bamberger (1976: 343), Hervorh. im Original.

[102] Vgl. Staehle (1999: 498–499).

textunabhängigkeit jedoch **nicht** gegeben, was zur Entwicklung des Modells der organisierten Anarchie führte. Dieses Modell – das auch als **Mülleimer-Modell** bezeichnet wird – zielt auf die Erklärung von Entscheidungsprozessen in Organisationen mit:[103]

- inkonsistenten und schlecht-definierten Zielen,
- wechselnden Entscheidern und unklaren Kompetenzen,
- wechselnden Interessen der Akteure sowie
- unklaren Problemursachen, Umweltbedingungen und Handlungskonsequenzen.

Die Zuordnung von Entscheidungsträgern, Problemen, Lösungen und Entscheidungsgelegenheiten ist stochastischer Natur und sehr stark abhängig vom Kontext, in dem die Entscheidungen zu fällen sind. Das Mülleimer-Modell beschreibt den Entscheidungsprozess als zufälliges Zusammenfließen der folgenden Elemente:[104]

- **Probleme** entspringen den verschiedenen Interessen, Forderungen und Ansprüchen der einzelnen Gruppen und stammen nicht zwangsläufig aus dem beruflichen Umfeld, sondern können auch privaten Ursprungs sein.
- **Lösungen** werden nicht – wie es die Bezeichnung bisher suggerierte – zur Lösung eines Problems eingesetzt und in die Entscheidung eingebracht. Aus dem Potential an Lösungsmöglichkeiten (Ideen, Technologien, Produkte) über die die Individuen verfügen, werden hingegen Lösungen angeboten, für die ein Problem noch gefunden werden muss.
- **Entscheidungen** entwickeln sich nicht durch sachliche, unternehmerische Intention als Abschluss eines vorgelagerten Prozesses, sondern entstehen en passant aus anderen Gelegenheiten.
- Anzahl und Aufmerksamkeit der **Teilnehmer** hängen nicht von dem zu betrachtenden Problem ab, sondern werden vielmehr durch andere, parallele Entscheidungen determiniert.

In den Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass der Entscheidungsprozess abhängig ist vom **Zeitpunkt** des Eintretens bzw. Zusammentreffens der Ströme, vom **Aufwand**, der zur Problemlösung erforderlich ist, vom **Zugang** von Problemen und Teilnehmern zu Entscheidungsgelegenheiten. Als mögliche Lösungsalternativen derartiger Prozesse besteht das **Übersehen der Probleme** (trotzdem sofortige Entscheidungsfindung), die **Flucht vor Problemen** (Aufschieben der Entscheidung bis es sich von selbst löst) oder die wirkliche **Lösung des Problems**.

Ein für die Unternehmensführung wichtiges Verhaltensmerkmal von Gruppen sind kollektive Handlungsmuster. Dabei handelt es sich um Verhaltensweisen

[103] Vgl. Schreyögg/Geiger (2016: 325–326).

[104] Vgl. Berger/Bernhard-Mehlich (2006: 187–188).

von Gruppenmitgliedern in Situationen, die sich durch bestimmte Merkmale auszeichnen. Von den zahlreichen prinzipiell möglichen Verhaltensweisen werden im Folgenden lediglich:[105]

- das Risikoschub-Phänomen,
- das social loafing und Trittbrettfahrer sowie
- die Gruppenbefangenheit dargestellt.

In zahlreichen Experimenten wurde nachgewiesen, dass sich Gruppen risikoreicher verhalten als der Durchschnitt der einzelnen Gruppenmitglieder (Risky-Shift-Phänomen). Dieser sog. **Risikoschub** kann durch die Verteilung von Verantwortung sowie durch das höhere Informationsniveau, das sich in der Gruppe ergibt, erklärt werden.[106] Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass dieser Effekt lediglich experimentell festgestellt wurde.

Von weitaus größerer praktischer Relevanz ist das **social loafing**, das sog. „soziale Faulenzen". Einzelne Gruppenmitglieder reduzieren ihr tatsächliches Leistungsvermögen bzw. schöpfen ihr individuelles, aktuelles Leistungspotenzial nicht aus, was zu Lasten der Gesamtleistung der Gruppe geht. Das heißt, die Summe der potenziellen Einzelleistungen ist größer als die tatsächlich realisierte Gesamtleistung. Umstände, die ein derartiges Verhalten fördern, sind folgende:[107]

- Die schwere Identifizierbarkeit der Individualleistung führt zu einer ebenso schweren Bewertbarkeit.
- Mitglieder erkennen, dass die Zielstellung auch ohne ihre Unterstützung erreicht werden kann.
- Mitglieder nehmen soziales Faulenzen bei anderen Gruppenmitgliedern wahr, das nicht sanktioniert wird.

Dieser Effekt wird vom Individuum nicht beabsichtigt, sondern entsteht aus dem Motivationsverlust durch die Gruppenarbeit. In engem Zusammenhang mit dem sozialen Faulenzen steht der **Trittbrettfahrer-Effekt**. Auch bei diesem wird das individuelle Leistungsvermögen nicht voll ausgeschöpft. Der Unterschied zum sozialen Faulenzen besteht jedoch darin, dass diese Leistungsreduktion bewusst geschieht.[108]

Ein anderes Phänomen, die **Gruppenbefangenheit** (groupthink), tritt in Gruppen mit einer hohen Kohäsion und in Situationen mit hohem gesellschaftlichem und zeitlichem Druck auf.[109] Der Gruppenzwang führt zu einer stark reduzierten Problemerkennungs- und -lösungsfähigkeit. Beispiele für derartiges Gruppenverhalten sind u. a. die Entwicklung der A-Klasse

[105] Vgl. Steinmann/Schreyögg/Koch (2013: 566–571).
[106] Vgl. Staehle (1999: 291–293).
[107] Vgl. Stock-Homburg/Groß (2019: 649–651).
[108] Vgl. Wegge (2006: 596–597).
[109] Vgl. Auer-Rizzi (1998: 184–189); Wunderer (2011: 284–285).

bei Mercedes-Benz 1997 und die gescheiterte Schweinebucht-Invasion 1961. Randbedingungen für die Entstehung von Gruppenbefangenheit sind:[110]

- hohe Gruppenkohäsion,
- strukturelle Fehler der Organisation: Abschottung nach Außen, direktive Führung, Fehlen standardisierter Entscheidungsprozeduren, homogener sozialer und ideologischer Hintergrund,
- provokativer situationaler Kontext: hoher, extern bedingter Stress.

Die Symptome der Gruppenbefangenheit sind:

- **Selbstüberschätzung der Gruppe**: Illusion der Unverwundbarkeit sowie der Glaube, hohe moralische Standards zu vertreten.
- **Engstirnigkeit**: Kollektive Rationalisierungen in Verbindung mit der Abqualifizierung externer Kritik.
- **Uniformitätsdruck**: Selbstzensur der Mitglieder als Individuen und der Gruppe als Ganzes, Illusion der Einmütigkeit.

Resultat ist eine selektive und auf Selbstbestätigung ausgerichtete Informationsverarbeitung, die Vernachlässigung von Handlungsalternativen und die Erstellung schlechter Realisierungspläne, sodass in der Konsequenz die Erfolgswahrscheinlichkeit äußerst gering ist. Um der Gefahr der Gruppenbefangenheit zu begegnen, sollte die Gruppenführung ausdrücklich Kritik einfordern und in der Frühphase der Entscheidungsfindung selbst keine Lösungsalternative eindeutig favorisieren. Zusätzlich kann eine Person zum advocatus diaboli bestimmt werden, deren Hauptaufgabe das Auffinden von Schwachstellen und Fehlern ist.[111]

[110] Vgl. Berthel/Becker (2010: 140–142).

[111] Vgl. Comelli/Rosenstiel/Nerdinger (2014: 197–198); Scherpereel/Gaul/Muhr (2015: 36–37).

3.4 Aufgaben und Lösungen

3.4.1 Aufgaben

Aufgabe 3.1:

Bei einer bevorstehenden Gremienwahl sind 47 Personen aufgerufen, ihre Stimme abzugeben. Es stehen 5 Kandidaten zur Auswahl (A bis E). Trotz der hohen Anzahl an Wählern können sechs identische Präferenzordnungen beobachtet werden (vgl. Tab. 3.19).

Tab. 3.19: Ausgangssituation des ersten Abstimmungsproblems.

Rang \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)
1	A	C	B	D	E	D
2	C	E	A	B	A	B
3	D	A	E	A	D	C
4	E	D	C	C	B	E
5	B	B	D	E	C	A

a) Wenden Sie die nachfolgenden Abstimmungsregeln auf das beschriebene Beispiel an:

- Borda-Regel,
- Bucklin-Regel,
- Instant-Runoff-Regel,
- Nanson-Regel,
- Schulze-Methode!

b) Welche Aussage lässt sich über die Wahl der Abstimmungsregel treffen?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 440.

Aufgabe 3.2:

Ein neues Mitglied für den Unternehmensbeirat soll gewählt werden. Der Gesellschafterversammlung mit 24 stimmberechtigten Mitgliedern stehen drei Kandidaten zur Auswahl. Gemäß der geordneten Präferenzen resultieren fünf Fraktionen, wie in Tabelle 3.20 zu sehen ist.

Tab. 3.20: Ausgangssituation des zweiten Abstimmungsproblems.

Rang \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (4)	F_3 (4)	F_4 (7)	F_5 (6)
1	A	A	B	B	C
2	B	C	A	C	A
3	C	B	C	A	B

a) Wenden Sie zur Entscheidungsfindung die NANSON-Regel an!

b) Welches Ergebnis resultiert, wenn die Mitglieder der dritten Fraktion sich kurz vor der Wahl umentscheiden und sich der Präferenzordnung der ersten Fraktion anschließen? Welches Kriterium wird dabei verletzt?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 446.

Aufgabe 3.3:

Ein siebenköpfiges Entscheidungsgremium berät über Erweiterungsinvestitionen zur Erschließung neuer internationaler Märkte. Das Ziel der Investition ist neben der Erhöhung des Absatzes auch die Ausnutzung der Produktionskapazitäten. Dabei stehen drei Alternativen zur Diskussion: Alternative A sieht den Export der Produkte, Alternative B die Gründung einer Auslandsniederlassung und Alternative C die Vergabe einer Produktionslizenz vor. Die Mitglieder des Gremiums haben hinsichtlich der Alternativen unterschiedliche Präferenzen. Vier Mitglieder bevorzugen $A \succ B \succ C$, zwei Mitglieder $B \succ A \succ C$ und ein Mitglied $C \succ B \succ A$.

a) Wenden Sie zur Entscheidungsfindung die BORDA-Regel an!

b) Welches Kriterium wird im vorliegenden Fall durch die Änderung der Präferenzordnung $B \succ A \succ C$ zu $B \succ C \succ A$ verletzt?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 447.

Aufgabe 3.4:

Auf einem Parteitag stimmen die Delegierten über ihren zukünftigen Spitzenkandidaten ab. Dabei stehen drei Kandidaten zur Auswahl. Von den 145 Wahlberechtigten favorisieren 55 Wähler den Kandidaten C. Die restlichen Mitglieder lehnen diesen aber strikt ab. Als Kompromisslösung wäre für die Anhänger des Kandidaten C der Kandidat A eine denkbare Alternative. Von den restlichen Parteimitgliedern bevorzugen 40 Wahlberechtigte Kandidat A vor B und 50 Wahlberechtigte Kandidat B vor A.

a) Wenden Sie zur Entscheidungsfindung die Instant-Runoff-Methode an!

b) Welches Ergebnis resultiert, wenn 16 Mitglieder, die Kandidat C bevorzugen, sich nicht an der Wahl beteiligen? Welches Kriterium wird dabei verletzt?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 448.

Aufgabe 3.5:

Bei der Hauptversammlung einer Aktiengesellschaft soll darüber abgestimmt werden, ob der erwirtschaftete Gewinn in Form einer Dividende an die Aktionäre ausgeschüttet werden soll. Die Entscheidung über eine Ausschüttung erfolgt mit einer Mehrheit von 51 % der Stimmrechte. Des Weiteren soll abgestimmt werden, ob eine Kapitalerhöhung stattfinden soll. Da es sich hierbei um eine Entscheidung mit besonderer Tragweite handelt, ist laut Aktiengesetz eine Zustimmung von 75 % der Stimmrechte nötig.

Die Aktionärsstruktur des Unternehmens setzt sich aus vier Investorengruppen zusammen. Die Mehrheit der Aktien (41 %) wird von einem Großaktionär gehalten. Weiterhin befinden sich 26 %, 13 % und 20 % im Besitz anderer Aktionäre. Es ist anzunehmen, dass alle Investorengruppen auf der Hauptversammlung vertreten sind. Berechnen Sie:

a) den Shapley-Shubik-Index und
b) den Penrose-Banzhaf-Index

für die Abstimmung über die Dividendenausschüttung und für die Abstimmung über die Kapitalerhöhung!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 449.

Aufgabe 3.6:

Ein 9-köpfiger Aufsichtsrat einer Gesellschaft setzt sich aus drei Interessengruppen zusammen. Drei Mitglieder des Aufsichtsrates vertreten die Interessen der Eigentümerfamilie. Weitere vier Mitglieder vertreten die Interessen weiterer Anteilseigner. Zusätzlich sind zwei Arbeitnehmervertreter Bestandteil des Aufsichtsrates. Da die Gesellschaft dem Drittelbeteiligungsgesetz unterliegt, besteht die Notwendigkeit den Aufsichtsrat je zu $^2/_3$ mit Vertretern der Arbeitgeber und mit $^1/_3$ aus Vertretern der Arbeitnehmer zu besetzen. Um die gesetzlichen Vorgaben zu erfüllen und die Interessen der Belegschaft besser zu wahren, fordern die Arbeitnehmervertreter einen Platz der Anteilseigner im Aufsichtsrat mit einem zusätzlichen Vertreter der Belegschaft zu besetzen.

Beurteilen Sie den Vorschlag der Arbeitnehmervertreter im Bezug auf die drei im Aufsichtsrat vorhandenen Interessengruppen unter Verwendung des Penrose-Banzhaf-Indexes! Entscheidungen im Aufsichtsrat werden mit einfacher Mehrheit getroffen.

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 453.

Aufgabe 3.7:

Zu Beginn der neunziger Jahre wurde bei Mercedes-Benz die Entwicklung eines Pkws der Kompaktklasse vorangetrieben, welche unter der Bezeichnung A-Klasse in das Produktportfolio aufgenommen wurde. Bei der Entwicklung des Modells traten verschiedene Ereignisse ein, die maßgeblich den Erfolg des Projektes beeinflussten. Bereits vor Beginn der Entwicklung verließ eine Führungsfigur das Unternehmen, die bis dahin entscheidend die Entwicklung neuer Fahrzeuge beeinflusst hatte. Als Nachfolge wurden junge, z.T. unerfahrene Führungskräfte eingestellt, die jedoch hoch motiviert waren, durch innovative Ideen den Fahrzeugbau zu revolutionieren. Gleichzeitig war die Gruppe durch ein hohes Gemeinschaftsgefühl gekennzeichnet. Bei der Entwicklung des Kleinwagens sollten innovative Ideen mit einfließen. Dabei lag die Innovation in der Kombination der Eigenschaften eines Kleinwagens mit den Sicherheitseigenschaften einer Limousine, welche bis dato als konkurrierende Eigenschaften angesehen wurden. In diesem Zusammenhang wurde eine vollkommen neue Karosserie entwickelt, bei der der Motor einen höheren Schwerpunkt aufweist. Zusätzlich wurde - bisher unüblich - ein Frontantrieb entwickelt. Die nötigen Testversuche wurden hauptsächlich mit Computern simuliert. Ein nach der Markteinführung durchgeführter Test - der sog. Elchtest - legte schonungslos die Defizite des Kleinwagens offen. Bei Ausweichmanövern kippte der Pkw zur Seite und blieb auf dem Dach liegen. Mercedes-Benz musste alle Modelle nachrüsten. Neben den finanziellen Verlusten, war vor allem der Imageschaden enorm.

Erklären Sie am dargestellten Beispiel das Phänomen des Groupthink!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 454.

Aufgabe 3.8:

Frau Siegel arbeitet im Projekt-Controlling eines mittelständischen Planungsbüros. Das Unternehmen ist laut interner Agenda auf eine Profitmaximierung des Projekt-Portfolios ausgerichtet. Die Richtungsentscheidungen zu einem großen Prestige-Projekt wurden zuletzt mehrmals in Konferenzen verschoben. Zu anderen Projekten wurden Planungsentscheidungen oft in der Kaffeeküche bei zufälligen Treffen mit den Führungskräften getroffen und nicht schriftlich fixiert. Dadurch wurden auch einige Projekte fortgeführt, die Frau Siegel hinsichtlich Wertschöpfung und Projektrisiken als bedenklich eingestuft hat. Das Revidieren dieser Entscheidungen erfolgt trotz ihrer Hinweise generell jedoch nicht. Durch die fehlende Dokumentation von derartigen Entscheidungen beruhten Frau Siegels Präsentationen in diversen Konferenzen zudem häufig unwissentlich auf veralteten Tatsachen.

a) Auf welches Organisationsmodell deuten diese Entwicklungen hin? Wie erfolgt die Problemlösung?

b) An welcher Stelle sollte der Entscheidungsprozess verändert werden um sich vom aktuellen Modell zu entfernen?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 454.

Aufgabe 3.9:

Herr Neumann hat seinen ersten Arbeitstag bei seinem neuen Arbeitgeber. Der Bereichsleiter führt ihn herum und stellt ihn in den diversen Büros seinen neuen Kollegen vor. Im Accounting weist der Bereichsleiter nebenbei den für das Reporting zuständigen Mitarbeiter freundlich darauf hin, dass es einige kleine Fehler im letzten Geschäftsbericht gab. Der Mitarbeiter solle sich künftig mehr Zeit nehmen, ihn gründlicher zu prüfen. Beim Besuch im Vertragsmanagement präsentiert der Bereichsleiter stolz den frisch zum Teamleader beförderten Herrn Jung und bezeichnet ihn als zukünftigen Eckpfeiler des Unternehmens. Er teilt diesem bei der Gelegenheit zudem mit, dass man sich für ihn als Datenschutzbeauftragten entschieden habe und die notwendige Ausbildung bald beginnen werde. Nervös bedankt sich Herr Jung. Als die Runde fortgesetzt werden soll, gibt der Bereichsleiter Herrn Neumann noch den Hinweis, sich bei IT-Problemen am besten an Herrn Jung zu wenden. In den letzten Jahren hätte man sich dabei immer auf ihn verlassen können. Im Gang treffen beide schließlich auf die Abteilungsleiterin Accounting. Nach der Bekanntmachung mit Herrn Neumann teilt der Bereichsleiter ihr mit, dass er aufgrund einer Dienstreise die Geschäftsberichte drei Tage vor der üblichen Deadline benötigt. Die Vorstellungsrunde ist anschließend beendet und der Bereichsleiter wünscht Herrn Neumann viel Erfolg.

Welche Rollenkonflikte konnte Herr Neumann bereits an seinem ersten Tag im neuen Unternehmen beobachten?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 455.

3.4.2 Lösungen

Lösung zur Aufgabe 3.1 auf S. 436:

Borda-Regel:

Diese Regel basiert auf Zuweisung von Stimmen, die der Präferenz der Wählergruppen entspricht. Die Alternative mit der höchsten Präferenz erhält die höchste Stimmenanzahl, die nächstbeste Alternative erhält eine Stimme weniger usw. Für Kandidat A ergibt sich folgendes Ergebnis: $5 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 = 154$. Die Ergebnisse aller Kandidaten sind in Tabelle 3.21 dargestellt.

Tab. 3.21: Lösung mit BORDA-Regel.

Fraktion / Kandidat	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)	Summe
A	5	3	4	3	4	1	**154**
B	1	1	5	4	2	4	**138**
C	4	5	2	2	1	3	**130**
D	3	2	1	5	3	5	**138**
E	2	4	3	1	5	2	**145**

Nach der Borda-Regel ergibt sich die Präferenzordnung: $A \succ E \succ B \sim D \succ C$.

BUCKLIN-Methode:

Zuerst wird überprüft, ob eine absolute Mehrheit vorliegt (vgl. Tab. 3.22).

Tab. 3.22: Summation der Erstpräferenzen.

1. Runde					
Kandidat:	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Erstpräferenz:	3	10	11	14	9

Da dies nicht der Fall ist, werden im nächsten Schritt (vgl. Tabelle 3.23) die Zweitpräferenzen berücksichtigt.

Tab. 3.23: Summation von Erst- und Zweitpräferenzen.

2. Runde					
Kandidat:	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Erstpräferenz:	3	10	11	14	9
Zweitpräferenz:	19	14	3	0	11
Gesamt:	22	24	14	14	20

Der Kandidat B erreicht nun die absolute Mehrheit. Nach der Bucklin-Regel ergibt sich folgende kollektive Präferenzordnung: $B \succ A \succ E \succ C \sim D$.

Instant-Runoff-Regel:

Zuerst wird überprüft, ob eine Alternative die absolute Mehrheit an Erststimmen erreicht (vgl. Tabelle 3.24). Das Ergebnis ist identisch zu Tab. 3.22.

Tab. 3.24: Erste Summation der Erstpräferenzen.

Anzahl der Erstpräferenzen					
Kandidat:	A	B	C	D	E
Erstpräferenz:	3	10	11	14	9

Keine Alternative erreicht eine absolute Mehrheit an Erstpräferenzen. Alternative A wird eliminiert, da sie die geringste Stimmenanzahl erhielt. In der Präferenzordnung, in welcher die Alternative A eliminiert wurde, steigen die verbleibenden Kandidaten einen Rang höher (vgl. Tabelle 3.25).

Tab. 3.25: Zweite Summation der Erstpräferenzen nach Elimination von A.

Präferenzordnungen						
Rang \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)
1	C	C	B	D	E	D
2	D	E	E	B	D	B
3	E	D	C	C	B	C
4	B	B	D	E	C	E

Anzahl der Erstpräferenzen				
Kandidat:	B	C	D	E
Erstpräferenz:	10	14	14	9

Im nächsten Schritt wird überprüft, ob nach der Elimination von Alternative A eine absolute Mehrheit vorliegt. Da wieder keine absolute Mehrheit vorliegt, erfolgt die Elimination von Alternative E und ein erneuter Wahlgang (vgl. Tabelle 3.26).

Tab. 3.26: Dritte Summation der Erstpräferenzen nach Elimination von E.

Präferenzordnungen						
Rang \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)
1	C	C	B	D	D	D
2	D	D	C	B	B	B
3	B	B	D	C	C	C

Anzahl der Erstpräferenzen			
Kandidat:	B	C	D
Erstpräferenz:	10	14	23

Da wieder keine absolute Mehrheit vorliegt, erfolgt die Elimination von Alternative B und eine erneute Abstimmung (vgl. Tabelle 3.27).

Tab. 3.27: Vierte Summation der Erstpräferenzen nach Elimination von B.

Präferenzordnungen						
Rang \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)
1	C	C	C	D	D	D
2	D	D	D	C	C	C

Anzahl der Erstpräferenzen		
Kandidat:	C	D
Erstpräferenz:	24	23

Abschließend stehen sich die Alternativen C und D gegenüber. In diesem Fall erreicht Alternative C die absolute Mehrheit an Stimmen. Nach der Instant-Runoff-Regel ergibt sich folgende Präferenzordnung: $C \succ D \succ B \succ E \succ A$.

Nanson-Regel:

Die Anzahl der zu vergebenden Stimmen und deren Vergabeordnung ist wie bei der Borda-Regel gestaltet. Jedoch wird die Alternative mit der gerings-

ten Gesamtstimmenzahl eliminiert. In jeder Runde wird die Gesamtanzahl der zu vergebenden Stimmen um eine Stimme reduziert. Im Beispiel erhält die Alternative C im ersten Durchgang die wenigsten Stimmen und wird deshalb eliminiert (vgl. Tabelle 3.28).

Tab. 3.28: Erster Wahlgang bei der NANSON-Regel.

Kandidat \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)	Summe
A	5	3	4	3	4	1	**154**
B	1	1	5	4	2	4	**138**
C	4	5	2	2	1	3	**130**
D	3	2	1	5	3	5	**138**
E	2	4	3	1	5	2	**145**

Anschließend an die Elimination von Kandidat C werden nach diesem Prinzip weitere Wahlgänge durchgeführt (vgl. Tabelle 3.29).

Tab. 3.29: Zweiter Wahlgang bei der NANSON-Regel.

Zweiter Wahlgang							
Kandidat \ Fraktion	F_1 (3)	F_2 (11)	F_3 (10)	F_4 (8)	F_5 (9)	F_6 (6)	Summe
A	4	3	3	2	3	1	**124**
B	1	1	4	3	1	3	**105**
D	3	2	1	4	2	4	**115**
E	2	4	2	1	4	2	**126**
Dritter Wahlgang							
A	3	2	3	2	2	1	**101**
D	2	1	1	3	1	3	**78**
E	1	3	2	1	3	2	**103**
Vierter Wahlgang							
A	2	1	2	2	1	1	**68**
E	1	2	1	1	2	2	**73**

Im letzten Wahlgang setzt sich Kandidat E gegenüber Kandidat A durch. Nach der NANSON-Regel ergibt sich somit folgende kollektive Präferenzordnung: $E \succ A \succ D \succ B \succ C$.

SCHULZE-Regel:

Diese Methode beruht auf dem Verfahren der paarweisen Alternativenvergleiche. Die Ergebnisse des paarweisen Alternativenvergleichs sind in Tabelle 3.30 dargestellt. Die Notation v[A;B] gibt die Stimmenanzahl der Alternative A im paarweisen Vergleich mit Alternative B wieder. Die Stimmenanzahl von B im direkten Vergleich mit A wird durch die Notation v[B;A] ausgedrückt.

Tab. 3.30: Direkter Paarvergleich der Alternativen.

nach / von	A	B	C	D	E
A	-	23	30	33	21
B	24	-	33	10	24
C	17	14	-	24	28
D	14	37	23	-	17
E	26	23	19	30	-

Werden sämtliche Alternativen aus der Tabelle 3.30 in die Betrachtung einbezogen, entsteht der Beziehungsgraph, der in Abbildung 3.7 zu sehen ist.

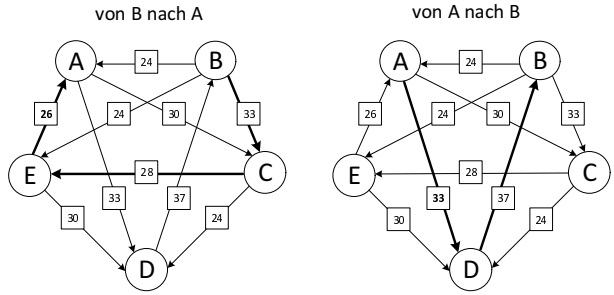


Abb. 3.7: Beziehungsgraph des Paarvergleichs A vs. B.

Neben den direkten Verbindungen werden bei der SCHULZE-Methode auch alle indirekten Verbindungen betrachtet. Die Ermittlung der direkten und indirekten Verbindungen soll am Beispiel der Alternativen A und B in Abbildung 3.7 verdeutlicht werden. Neben dem direkten Weg von B nach A besteht die Möglichkeit, über eine indirekte Verbindung von B über C und E nach A zu gelangen. Gesucht wird das Maximum der minimalen Verbindungsstücke. Im dargestellten Beispiel beträgt der maximale Wert des minimalen Verbindungsstückes von B nach A 26. Von A nach B beträgt der maximale Wert des minimalen Verbindungsstückes 33. Anschließend werden die ermittelten Werte der Verbindungen gegenübergestellt: $p[A;B] = 33 \Leftrightarrow p[B;A] = 26 \rightarrow$ A dominiert B.

Diese Analyse muss für alle Verbindungsrichtungen sämtlicher Alternativen durchgeführt werden, um das Maximum der schwächsten Teilstücke zu identifizieren (vgl. Abbildung 3.8). Lediglich diese Maxima der schwächsten Glieder sind für das weitere Vorgehen von Interesse.

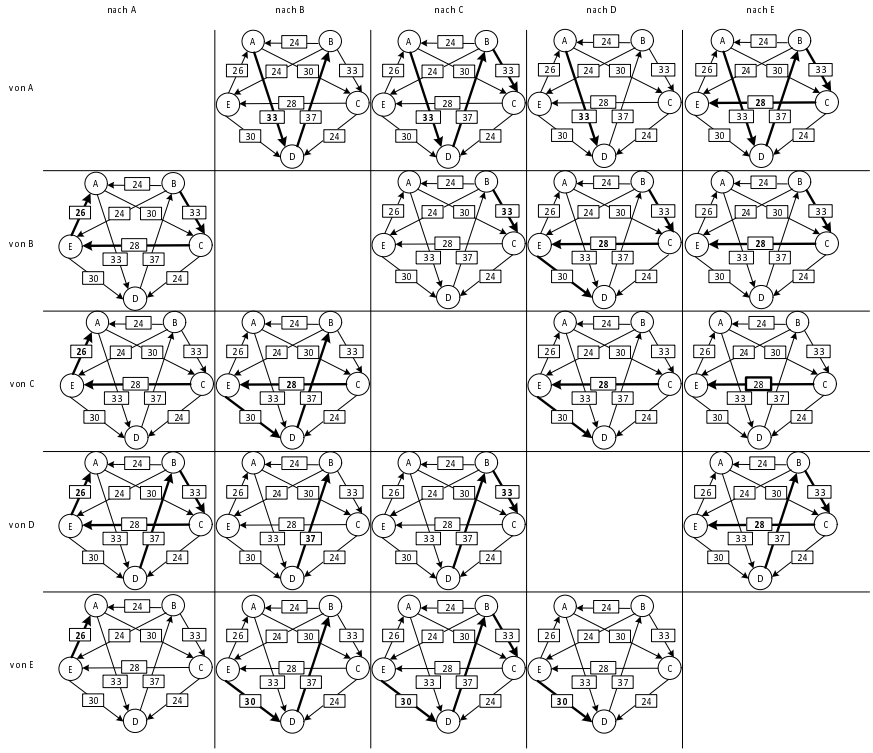


Abb. 3.8: Beziehungsgraphen sämtlicher Paarvergleiche.

Die Werte der Maxima der schwächsten Glieder dieser Vergleiche sind in Tabelle 3.31 dargestellt.

Tab. 3.31: Maxima der schwächsten Verbindungsteilstücke.

von \ nach	A	B	C	D	E
A	-	33	33	33	28
B	26	-	33	28	28
C	26	28	-	28	28
D	26	37	33	-	28
E	26	30	30	30	-

Die Gegenüberstellung der Werte von den korrespondierenden Hin- und Rückwegen ergibt folgende Präferenzrelationen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A \succ B\ (33:26)}\\ \mathbf{A \succ C\ (33:26)}\\ \mathbf{A \succ D\ (33:26)}\\ \mathbf{A \succ E\ (28:26)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{E \succ B\ (30:28)}\\ \mathbf{E \succ C\ (30:28)}\\ \mathbf{E \succ D\ (30:28)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbf{D \succ B\ (37:28)}\\ \mathbf{D \succ C\ (33:28)}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{B \succ C\ (33:28)}$$

Es ergibt sich deshalb folgende kollektive Präferenzordnung: $A \succ E \succ D \succ B \succ C$.

b) Die Ergebnisse der Abstimmungsregeln sind in der Tabelle 3.32 zusammengefasst.

Tab. 3.32: Ergebnisse der Abstimmungsregeln.

Abstimmungsregel	Resultierende kollektive Präferenzordnung
BORDA-Regel:	$A \succ E \succ B \sim D \succ C$
BUCKLIN-Regel:	$B \succ A \succ E \succ C \sim D$
Instant-Runoff-Regel:	$C \succ D \succ B \succ E \succ A$
NANSON-Regel:	$E \succ A \succ D \succ B \succ C$
SCHULZE-Methode:	$A \succ E \succ D \succ B \succ C$

Eine identische Ausgangslage führt in Abhängigkeit von der verwendeten Abstimmungsregel zu verschiedenen Ergebnissen.

Lösung zur Aufgabe 3.2 auf S. 436:

a) Mit der NANSON-Regel ergibt sich nach zwei Wahlgängen ein Endergebnis (vgl. Tabelle 3.33).

Tab. 3.33: Ergebnis der Ausgangssituation mit der NANSON-Regel.

Erster Wahlgang						
Fraktion / Kandidat	**F_1 (3)**	**F_2 (4)**	**F_3 (4)**	**F_4 (7)**	**F_5 (6)**	**Summe**
A	3	3	2	1	2	**48**
B	2	1	3	3	1	**49**
C	1	2	1	2	3	**47**

Zweiter Wahlgang						
A	2	2	1	1	2	**37**
B	1	1	2	2	1	**35**

Im ersten Wahlgang wird Kandidat C eliminiert. Im entscheidenden zweiten Wahlgang gewinnt dann Kandidat A mit 37 zu 35 Stimmen gegen

Kandidat B. Die kollektive Präferenzordnung lautet: $A \succ B \succ C$.

b) Fraktion 3 löst sich nun quasi auf und läuft zu Fraktion 1 über, die nun 7 Stimmen stark ist. Wieder liefert die NANSON-Regel nach zwei Wahlgängen ein Ergebnis (vgl. Tabelle 3.34).

Tab. 3.34: Ergebnis der veränderten Situation mit der NANSON-Regel.

Erster Wahlgang					
Fraktion / Kandidat	**$F_1 + F_3$ (7)**	**F_2 (4)**	**F_4 (7)**	**F_5 (6)**	**Summe**
A	3	3	1	2	**52**
B	2	1	3	1	**45**
C	1	2	2	3	**47**
Zweiter Wahlgang					
A	2	2	1	1	**35**
C	1	1	2	1	**37**

Diesmal wird Kandidat B im ersten Wahlgang eliminiert. Den zweiten Wahlgang kann dann C für sich entscheiden. Die kollektive Präferenzordnung lautet nun: $C \succ A \succ B$. Damit verletzt die NANSON-Regel das **Monotonie-Kriterium**, da A trotz eines Zugewinns an Stimmen nun nicht mehr die präferierte Alternative ist.

Lösung zur Aufgabe 3.3 auf S. 437:

Die Anzahl der Stimmen je Alternative nach der BORDA-Regel ist in der Tabelle 3.35 zu sehen.

Tab. 3.35: Ergebnis der Ausgangssituation mit der BORDA-Regel.

Fraktion / Alternative	**F_1 (4)**	**F_2 (2)**	**F_3 (1)**	**Summe**
A	3	2	1	**17**
B	2	3	2	**16**
C	1	1	3	**9**

Demzufolge ergibt sich die kollektive Präferenzordnung: $A \succ B \succ C$. Das Gremium wird sich für die Exportalternative entscheiden. Wenn diejenigen Gremienmitglieder, die für die Reihenfolge $B \succ A \succ C$ votierten, diese Ordnung ändern würden zu $B \succ C \succ A$, verändern sich auch die Gesamtstimmenzahlen (vgl. Tabelle 3.36).

Tab. 3.36: Ergebnis der veränderten Situation mit der BORDA-Regel.

Fraktion / Alternative	F_1 (4)	F_2 (2)	F_3 (1)	Summe
A	3	1	1	**15**
B	2	3	2	**16**
C	1	2	3	**11**

Nach der Veränderung der Präferenzordnung ergibt sich folgende kollektive Präferenzordnung: $B \succ A \succ C$. Das Gremium entscheidet sich für die Gründung einer Auslandsniederlassung. Durch das Herunterstufen potentieller Konkurrenten wird vermieden, dass diese den eigenen Erstpräferenzkandidaten verhindern. In diesem Fall wird das **Later-no-harm-Kriterium** verletzt, da durch die Angabe von niedrigen Präferenzplätzen die Alternative mit der Erstpräferenz beeinträchtigt wird.

Lösung zur Aufgabe 3.4 auf S. 437:

Bei der Instant-Runoff-Methode wird auf Basis der individuellen Präferenzordnungen im ersten Schritt überprüft, ob ein Kandidat die absolute Mehrheit an Erststimmen erreicht (vgl. Tabelle 3.37).

Tab. 3.37: Ergebnis mit der Instant-Runoff-Methode.

Präferenz / Mitglieder-anzahl	1. Präferenz	2. Präferenz	3. Präferenz
40	A	B	C
50	B	A	C
55	C	A	B

Da kein Kandidat eine absolute Mehrheit erreicht, wird der Kandidat A eliminiert und es kommt zur Stichwahl zwischen Kandidat B und C. Bei der Stichwahl unterstützen die 40 Anhänger von Kandidat A Kandidat B. Letztendlich gewinnt Kandidat B mit 90 Stimmen vor Kandidat C mit 55 Stimmen. Wenn aber ein Teil der Anhängerschaft (min. 16 Personen) von Kandidat C realisiert, dass ihr Kandidat keine Chance hat und stattdessen ihre Stimme nicht abgeben, führt das zur Elimination von Kandidat C in der ersten Runde. Bei der Stichwahl gewinnt dann Kandidat A mit 79 Stimmen vor Kandidat B mit 50 Stimmen. In diesem Fall spricht man von der Verletzung des **No-show-Kriteriums**, da das Nicht-Wählen zu einer Besserstellung im Vergleich mit der ehrlichen Stimmenabgabe führt.

Lösung zur Aufgabe 3.5 auf S. 438:

a) Ermittlung des SHAPLEY-SHUBIK-Index:

Zu Beginn werden die Permutationen sämtlicher prinzipieller Koalitionsbildungen betrachtet. Dabei ist entscheidend, dass durch den Beitritt eines Aktionärs die Koalition zur Gewinnerkoalition wird. Dies wird als „Swing“ bezeichnet. Weiterhin wird die Wahrscheinlichkeit einer solchen Permutation betrachtet.
Aus der SHAPLEY-SHUBIK-Formel ergeben sich folgende Gewichtungen für die Beitrittsreihenfolge:

- Eintritt an erster Stelle: $\frac{0!(4-0-1)!}{4!} = \frac{1}{4}$
- Eintritt an zweiter Stelle: $\frac{1!(4-1-1)!}{4!} = \frac{1}{12}$
- Eintritt an dritter Stelle: $\frac{2!(4-2-1)!}{4!} = \frac{1}{12}$
- Eintritt an vierter Stelle: $\frac{3!(4-3-1)!}{4!} = \frac{1}{4}$

1. Fall: Gewinnausschüttung (einfache Mehrheit)

Im Fall der Gewinnausschüttung kann Aktionär 1 jeweils durch sechs verschiedene Beitrittsmöglichkeiten eine Swing-Koalition herbeiführen. Dabei kann er drei mal an zweiter Stelle und drei mal an dritter Stelle an der Bildung der Swing-Koalition beteiligt sein. Unter Berücksichtigung der Gewichtung ergibt sich der SSI für Aktionär 1:

$$\begin{aligned} SSI_1 &= 0 \cdot \frac{0!(4-0-1)!}{4!} + 3 \cdot \frac{1!(4-1-1)!}{4!} + 3 \cdot \frac{2!(4-2-1)!}{4!} + 0 \cdot \frac{3!(4-3-1)!}{4!} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Aktionäre 2, 3 und 4 können nur durch jeweils zwei Beitrittsmöglichkeiten eine Swing-Koalition herbeiführen. Dabei erfolgt die Bildung der Swing-Koalition einmal durch Beitritt an zweiter Stelle und einmal durch Beitritt an dritter Stelle. Unter der Berücksichtigung der Gewichtungen ergibt sich der SSI für die Aktionäre 2, 3 und 4:

$$\begin{aligned} SSI_2 = SSI_3 = SSI_4 = 0 \cdot \frac{0!(4-0-1)!}{4!} + 1 \cdot \frac{1!(4-1-1)!}{4!} + 1 \cdot \frac{2!(4-2-1)!}{4!} \\ + 0 \cdot \frac{3!(4-3-1)!}{4!} \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= \frac{1}{6}$$

Die alternative Darstellung mittels tabellarischer Auflistung der Permutationen ist in Tabelle 3.38 zu sehen.

Tab. 3.38: Ermittlung des SHAPLEY-SHUBIK-Index.

Permutation \ Fraktion	1 (41%)	2 (26%)	3 (20%)	4 (13%)
(1,2,3,4)	-	1	-	-
(1,2,4,3)	-	1	-	-
(1,3,2,4)	-	-	1	-
(1,3,4,2)	-	-	1	-
(1,4,2,3)	-	-	-	1
(1,4,3,2)	-	-	-	1
(2,1,3,4)	1	-	-	-
(2,1,4,3)	1	-	-	-
(2,3,1,4)	1	-	-	-
(2,3,4,1)	-	-	-	1
(2,4,1,3)	1	-	-	-
(2,4,3,1)	-	-	1	-
(3,1,2,4)	1	-	-	-
(3,1,4,2)	1	-	-	-
(3,2,1,4)	1	-	-	-
(3,2,4,1)	-	-	-	1
(3,4,1,2)	1	-	-	-
(3,4,2,1)	-	1	-	-
(4,1,2,3)	1	-	-	-
(4,1,3,2)	1	-	-	-
(4,2,1,3)	1	-	-	-
(4,2,3,1)	-	-	1	-
(4,3,1,2)	1	-	-	-
(4,3,2,1)	-	1	-	-
Summe der verursachten Swing-Ergebnisse	12	4	4	4
SHAPLEY-SHUBIK-Index	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Fall: Kapitalerhöhung (3/4 Mehrheit)

Im Fall der Kapitalerhöhung kann Aktionär 1 durch drei verschiedene Beitrittsmöglichkeiten eine Swing-Koalition herbeiführen. Dabei kann er zweimal an dritter Stelle und einmal an vierter Stelle an der Bildung der Swing Koalition beteiligt sein. Unter der Berücksichtigung der Gewichtung ergibt sich der SSI für Aktionär 1:

$$\begin{aligned} SSI_1 &= 0 \cdot \frac{0!(4-0-1)!}{4!} + 0 \cdot \frac{1!(4-1-1)!}{4!} + 2 \cdot \frac{2!(4-2-1)!}{4!} + 1 \cdot \frac{3!(4-3-1)!}{4!} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Aktionär 2 kann ebenfalls durch drei verschiedene Beitrittsmöglichkeiten eine Swing-Koalition herbeiführen. Dabei tritt er entweder zweimal an dritter Stelle oder einmal an vierter Stelle der Swing-Koalition bei. Unter der Berücksichtigung der Gewichtung ergibt sich der SSI für Aktionär 2:

$$\begin{aligned} SSI_2 &= 0 \cdot \frac{0!(4-0-1)!}{4!} + 0 \cdot \frac{1!(4-1-1)!}{4!} + 2 \cdot \frac{2!(4-2-1)!}{4!} + 1 \cdot \frac{3!(4-3-1)!}{4!} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Es ist auffällig, dass der SSI von Aktionär 1 und 2 identisch ist, obwohl Aktionär 2 über einen deutlich geringeren Anteil verfügt. In diesem Fall spricht man von einer Sperrminorität, d. h. Aktionär 2 kann mit seinem Anteil jede Abstimmung verhindern. Daraus resultiert letztendlich seine hohe Abstimmungsmacht.
Die Aktionäre 3 und 4 können nur durch eine Beitrittsmöglichkeit eine Swing-Koalition herbeiführen. Dabei erfolgt die Bildung der Swing-Koalition durch den Beitritt an dritter Stelle. Unter der Berücksichtigung der Gewichtungen ergibt sich der SSI für die Aktionäre 3 und 4:

$$\begin{aligned} SSI_3 = SSI_4 &= 0 \cdot \frac{0!(4-0-1)!}{4!} + 0 \cdot \frac{1!(4-1-1)!}{4!} + 1 \cdot \frac{2!(4-2-1)!}{4!} + 0 \cdot \frac{3!(4-3-1)!}{4!} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Die alternative Darstellung mittels tabellarischer Auflistung der Permutationen ist in Tabelle 3.39 zu sehen.

Tab. 3.39: Ermittlung des Shapley-Shubik-Index.

Permutation \ Fraktion	1 (41%)	2 (26%)	3 (20%)	4 (13%)
(1,2,3,4)	-	-	1	-
(1,2,4,3)	-	-	-	1
(1,3,2,4)	-	1	-	-
(1,3,4,2)	-	1	-	-

Weiter auf folgender Seite

Tabelle 3.39 – Fortsetzung

Permutation \ Fraktion	1 (41%)	2 (26%)	3 (20%)	4 (13%)
(1,4,2,3)	-	1	-	-
(1,4,3,2)	-	1	-	-
(2,1,3,4)	-	-	1	-
(2,1,4,3)	-	-	-	1
(2,3,1,4)	1	-	-	-
(2,3,4,1)	1	-	-	-
(2,4,1,3)	1	-	-	-
(2,4,3,1)	1	-	-	-
(3,1,2,4)	-	1	-	-
(3,1,4,2)	-	1	-	-
(3,2,1,4)	1	-	-	-
(3,2,4,1)	1	-	-	-
(3,4,1,2)	-	1	-	-
(3,4,2,1)	1	-	-	-
(4,1,2,3)	-	1	-	-
(4,1,3,2)	-	1	-	-
(4,2,1,3)	1	-	-	-
(4,2,3,1)	1	-	-	-
(4,3,1,2)	-	1	-	-
(4,3,2,1)	1	-	-	-
Summe der verursachten Swing-Ergebnisse	10	10	2	2
Shapley-Shubik-Index	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b) Ermittlung des Penrose-Banzhaf-Index:

1. Fall: Gewinnausschüttung

Aktionär 1 führt für die Koalitionen (1,2), (1,3), (1,4), (1,2,3), (1,2,4) sowie (1,3,4) das Swing-Ergebnis herbei. Aktionär 2 kann lediglich für die Koalition (1,2) und (2,3,4) ein Swing-Ergebnis herbeiführen, während Aktionär 3 für die Koalitionen (1,3) und (2,3,4) und Aktionär 4 für die Koalitionen (1,4) und (2,3,4) wesentlich sind. Die Gesamtsumme der Swing-Ereignisse beträgt demzufolge 12. Aktionär 1 hat daran einen Anteil von $\frac{1}{2}$ und die Aktionäre 2, 3 und 4 jeweils $\frac{1}{6}$.

Die Ermittlung über die PBI-Wahrscheinlichkeit für Aktionär 1 führt zu: $PBI_1 - Wahrscheinlichkeit = \frac{3}{4}$. Die Überleitung der Summe aller PBI-Wahrscheinlichkeiten führt wiederum zum bereits ermittelten Wert $PBI_1 = \frac{3}{4}/\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Die Ermittlung der PBI-Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Aktionäre ergeben: $PBI_2 - Wahrscheinlichkeit = PBI_3 - Wahrscheinlichkeit = PBI_4 - Wahrscheinlichkeit = \frac{1}{4}$. Daraus folgt: $PBI_2 = PBI_3 = PBI_4 = \frac{1}{4}/\frac{3}{2} = \frac{1}{6}$. Die Penrose-Banzhaf-Indizes der Aktionäre sind in Tabelle 3.40 dargestellt.

Tab. 3.40: Penrose-Banzhaf-Indizes der Aktionäre für die Gewinnausschüttung.

Aktionär	1 (41%)	2 (26%)	3 (20%)	4 (13%)
Penrose-Banzhaf-Index	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Fall: Kapitalerhöhung

Aktionär 1 führt für die Koalitionen (1,2,3), (1,2,4) und (1,2,3,4) das Swing-Ergebnis herbei. Aktionär 2 kann für die Koalition (1,2,3), (1,2,4) und (1,2,3,4) ein Swing-Ergebnis herbeiführen. Aktionär 3 ist für die Koalition (1,2,3) entscheidend und 4 für die Koalition (1,2,4). Die Gesamtsumme der Swing-Ereignisse beträgt demzufolge 8. Die Aktionäre 1 und 2 haben daran einen Anteil von jeweils $\frac{3}{8}$ und die Aktionäre 3 und 4 jeweils von $\frac{1}{8}$.

Die Ermittlung über die PBI-Wahrscheinlichkeit für Aktionär 1 und 2 führt zu: $PBI_1 - Wahrscheinlichkeit = PBI_2 - Wahrscheinlichkeit = \frac{3}{8}$. Die Überleitung der Summe aller PBI-Wahrscheinlichkeiten führt wiederum zum bereits ermittelten Wert $PBI_1 = PBI_2 = \frac{3}{8}/1 = \frac{3}{8}$.

Die Ermittlung der PBI-Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Aktionäre ergeben: $PBI_3 - Wahrscheinlichkeit = PBI_4 - Wahrscheinlichkeit = \frac{1}{8}$. Daraus folgt: $PBI_3 = PBI_4 = \frac{1}{8}/1 = \frac{1}{8}$. Die Penrose-Banzhaf-Indizes der Aktionäre für diese Konstellation sind in Tabelle 3.41 dargestellt.

Tab. 3.41: Penrose-Banzhaf-Indizes der Aktionäre für die Kapitalerhöhung.

Aktionär	1 (41%)	2 (26%)	3 (20%)	4 (13%)
Penrose-Banzhaf-Index	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Lösung zur Aufgabe 3.6 auf S. 438:

Im ersten Schritt werden die Machtindices der drei im Aufsichtsrat vertretenden Interessengruppen ermittelt. Die Vertreter der Eigentümerfamilie führen bei einer Koalitionen mit den Vertretern der Arbeitnehmer und bei der einer Koalition mit den weiteren Anteilseignern ein Swing-Ereignis herbei. Das gleiche gilt für die Vertreter der Anteilseigner und der Arbeitnehmer, d.h. beide Interessengruppen führen ebenfalls zwei Swing-Ereignisse herbei. Die Gesamtsumme der Swing-Ereignisse beträgt demzufolge 6 (vgl. Tabelle 3.42). Die Vertreter der Interessengruppen im Aufsichtsrat haben daran jeweils einen Anteil von $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Tab. 3.42: Penrose-Banzhaf-Indizes der Aktionäre.

Interessengruppen	I_1 (4 Stimmen)	I_2 (3 Stimmen)	I_3 (2 Stimmen)
Penrose-Banzhaf-Index	1/3	1/3	1/3

Im zweiten Schritt werden die Machtindices unter Berücksichtigung der vorgeschlagenen Stimmenverteilung ermittelt. Die neue Stimmverteilung hat keinen Einfluss auf die bisherigen Swing-Ereignisse, d.h. sowohl die Swing-Ereignisse der jeweiligen Interessengruppen als auch die Gesamtsumme der Swing-Ereignisse bleiben unverändert. Demzufolge haben alle Gruppen einen Machtindex in Höhe von $1/3$.

Obwohl die Arbeitnehmervertreter aktuell lediglich ein nominelles Stimmengewicht von $2/9 \approx 0{,}22$ aufweisen, verfügen sie tatsächlich bereits über ein reales Stimmgewicht von $1/3$ und haben somit das gleiche Stimmengewicht wie Vertreter der Eigentümergruppen. Eine wie im Beispiel vorgeschlagene Umverteilung der Stimmen hätte keinen Effekt auf die realen Stimmengewichte im Aufsichtsrat.

Lösung zur Aufgabe 3.7 auf S. 439:

Die dargestellte Situation ist durch verschiedene Rahmenbedingungen zur Entstehung von Groupthink (Gruppenbefangenheit) gekennzeichnet. Der homogene soziale und ideologische Hintergrund der neu eingestellten Führungskräfte führte zu einem hohen Gemeinschaftsgefühl. Diese Gruppenkohäsion reduzierte jedoch die Problemerkennungsfähigkeit. Hier lässt sich ebenfalls eine gewisse Selbstüberschätzung der Gruppe beobachten. Gleichzeitig lagen strukturelle Fehler der Organisation vor.

Neben fehlender standardisierter Entscheidungsprozeduren, führte die hohe Motivation zur Etablierung neuer Ideen im Fahrzeugbau zu einer Abschottung nach Außen. Dabei trat ebenfalls eine gewisse Engstirnigkeit gegenüber traditionellen, etablierten Vorgehensweise auf. So wurden z.B. bei den Tests schwerpunktmäßig auf Computersimulationen gesetzt, anstatt - wie üblich - ebenfalls umfangreiche Praxistests durchzuführen. Gleichzeitig führte der zeitliche und finanzielle Druck des Projektes zu einer provokativen Situation.

Lösung zur Aufgabe 3.8 auf S. 439:

a) Die Situation zeigt Kennzeichen des **Mülleimer-Modells** für Entscheidungsprozesse. So besteht eine Diskrepanz zwischen dem Unternehmensziel und der Nicht-Berücksichtigung der Einwände von Frau Siegel hinsichtlich der Projektkennzahlen. Durch den intransparenten Entscheidungsprozess befinden sich Frau Siegel, sowie mutmaßlich weitere Mit-

arbeiter, in einem unklaren Informationsumfeld.

Das Fortbestehen der getroffenen Entscheidungen trotz der, dem Unternehmensziel entgegenlaufenden schlechten Wirtschaftlichkeit der Projekte, zeigt einen Hang zum **Übersehen von Problemen**. Die Tatsache, dass zudem ein Aufschieben besonders wichtiger Entscheidungen vermehrt auftritt, deutet auf **Problemflucht** als Lösungsalternative hin.

b) Das ausgegebene Unternehmensziel scheint innerhalb der Unternehmenshierarchie aufgeweicht zu werden und rückt für die internen Entscheider in den Hintergrund. Das Ziel sollte konsequent durch den Entscheidungsprozess berücksichtigt und durch klar definierte Kriterien ergänzt werden. Hierzu können bei Bedarf auch weitere, bislang inoffiziell verfolgte Zielsetzungen mit aufgenommen und eine Rangordnung gemäß Priorität erstellt werden. Aus dem Abweichen bzw. Nicht-Erfüllen der jeweiligen Kriterien müssen Konsequenzen abgeleitet und stringent danach gehandelt werden.

Lösung zur Aufgabe 3.9 auf S. 440:

Zunächst ist ein **Intra-Sender-Konflikt** zwischen dem Bereichsleiter und der Accouting-Abteilung bezüglich der Geschäftsberichte festzustellen. Während der Mitarbeiter zur Qualitätsverbesserung mehr Zeit für seine Aufgabe eingeräumt bekommt, wird seine Vorgesetzte unter einen erhöhten Termindruck gesetzt. Aus diesem Konflikt wird sich womöglich ein **Inter-Sender-Konflikt** entwickeln, wenn sie ihrem Untergebenen die vorgezogene Deadline mitteilt. Sofern der Grund für die Verschiebung nicht klar benannt ist, findet sich der Mitarbeiter im Zwiespalt zwischen der, durch den Bereichsleiter gewünschten erhöhten Qualitätssicherung und der geforderten schnelleren Fertigstellung des Berichtes durch seine direkte Vorgesetzte.

Außerdem ist ein **Inter-Rollen-Konflikt** in Bezug auf Herrn Jung zu vermuten. So ist er erst vor Kurzem in die neue Position als Führungskraft aufgestiegen und soll in kurzer Abfolge zusätzlich eine weitere neue Rolle als Datenschutzbeauftragter ausfüllen. Obwohl sich seine Stellung im Unternehmen verändert hat, wird ihm zudem seine «alte» Rolle als inoffizieller Ansprechpartner für IT-Fragen weiterhin offensiv zugeschrieben. In Verbindung mit weiteren Erwartungshaltungen an ihn durch andere Akteure kann dies auf eine Rollenüberladung hindeuten.

3.5 Literaturverzeichnis

Altmann, J. (1977): Kollektive wirtschaftliche Entscheidungen durch Amalgamation individueller Präferenzen. Zürich u. a.: Harri Deutsch.

Arrow, K. J. (1950): A difficulty in the concept of social welfare. In: The Journal of Political Economy, 58 (4): 328-346.

Arrow, K. J. (1951): Social choice and individual values. New York, NY u. a.: Wiley.

Auer-Rizzi, W. (1998): Entscheidungsprozesse in Gruppen: kognitive und soziale Verzerrungstendenzen. Wiesbaden: DUV.

Bamberg, G./Coenenberg, A. G./Krapp, M. (2019): Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre. 16. Aufl., München: Vahlen.

Banzhaf, J. F. III (1965): Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. In: Rutgers Law Review, 19 (o. A.): 317–343.

Banzhaf, J. F. III (1968): One man 3.312 votes: a mathematical analysis of the electoral college. In: Villanova Law Review, 13 (o. A.): 304–332.

Behnke, J. (2010): Negatives Stimmgewicht, Erfolgswert und Überhangmandate: Einige Anmerkungen. In: Kritische Vierteljahresschrift für Gesetzgebung und Rechtswissenschaft, 93 (1): 3–28.

Berger, U./Bernhard-Mehlich, I. (2006): Die Verhaltenswissenschaftliche Entscheidungstheorie. In: Kieser, A./Ebers, M. (Hg.): Organisationstheorien. 6. Aufl., Stuttgart: Kohlhammer, S. 169–214.

Berthel, J./Becker, F. G. (2010): Personalmanagement: Grundzüge für Konzeptionen betrieblicher Personalarbeit. 9. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Black, D. (1948): On the rationale of group-decision making. In: Journal of Political Economy, 56 (o. A.): 23–34.

Black, D. (1958): The theory of committees and elections. Cambridge: University Press.

Börgers, C. (2010): Mathematics of social choice: voting, compensation, and division. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Brams, S. J. (1994): Voting procedures. In: Aumann, R. J./Hart, S. (Hg.): Handbook of game theory with economic applications - vol. II. Reprint, 2007. Amsterdam u. a.: Elsevier, S. 1055–1089.

Campbell, D. E./Kelly, J. S. (2002): Non-monotonicity does not imply the no-show paradox. In: Social Choice and Welfare, 19 (3): 513–515.

Comelli, G./Rosenstiel, L. von/Nerdinger, F. W. (2014): Führung durch Motivation: Mitarbeiter für Unternehmensziele gewinnen. 5. Aufl., München: Vahlen.

Dudda, M./Schmidt, K./Schmitting, W./Wömpener, A. (2010): Sind Gruppen die besseren Entscheider? - Experimentelle Evidenz am Beispiel simulierter Entscheidungen im Kontext der Lagerverwaltung. In: Zeitschrift für Planung & Unternehmenssteuerung, 20 (3): 249–268.

Eisenberg, D./Littkemann, J. (2006): Schnittstellencontrolling. In: Littkemann, J. (Hg.): Unternehmenscontrolling: Konzepte, Instrumente, praktische Anwendungen mit durchgängiger Fallstudie. Herne/Berlin: NWB, S. 667–799.

Eisenführ, F./Weber, M./Langer, T. (2010): Rationales Entscheiden. 5. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Feltkamp, V. (1995): Alternative axiomatic characterization of the Shapley and Banzhaf values. In: International Journal of Game Theory, 24 (2): 179–186.

Fiege, R./Muck, P. M./Schuler, H. (2006): Mitarbeitergespräche. In: Schuler, H. (Hg.): Lehrbuch der Personalpsychologie. 2. Aufl., Göttingen u. a.: Hogrefe, S. 471–525.

Fishburn, P. C. (1970): Arrow's impossibility theorem: concise proof and infinite voters. In: Journal of Economic Theory, 2 (1): 103–106.

Gäfgen, G. (1974): Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung: Untersuchung zur Logik und Bedeutung des rationalen Handelns. 3. Aufl., Tübingen: J. C. B. Mohr.

Gehrlein, W. V. (2006): Condorcet's paradox. Berlin u. a.: Springer.

Gibbard, A. (1973): Manipulation of voting schemes: a general result. In: Econometrica, 41 (4): 587–601.

Haines, C. G./Haines, B. M. (1921): Principles and problems of government. New York u. a.: Harper & Brothers.

Heil, J. (2007): Investitionsentscheidungen in der Gruppe: Empirische Untersuchung deutscher Krankenhäuser auf Basis der präskriptiven Entscheidungstheorie. Berlin: LIT.

Hoffjan, A. (2003): Das Rollenbild des Controllers in Werbeanzeigen. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 73 (10): 1025–1050.

Holler, M. J./Illing, G./Napel, S. (2019): Einführung in die Spieltheorie. 8. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Holtbrügge, D. (2018): Personalmanagement. 7. Aufl., Heidelberg u. a.: Springer.

Holzman, R. (1988/89): To vote or not to vote: what is the quota? In: Discrete Applied Mathematics, 22 (o. A.): 133–141.

Jung, H. (2011): Personalwirtschaft. 9. Aufl., München u. a.: Oldenbourg.

Kirsch, W. (1971): Entscheidungsprozesse. Bd. 3: Entscheidungen in Organisationen. Wiesbaden: Gabler.

Kirsch, W./Bamberger, I. (1976): Strategische Unternehmensplanung, Rationalität und Philosophien der politischen Planung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 46 (4/5): 341–356.

Kirstein, R. (2010): Volkswagen vs. Porsche: a power index analysis. In: International Journal of Corporate Governance, 2 (1): 1–20.

Knollmann, R./Hirsch, B./Weber, J. (2007): Role making für Controllerbereiche? Eine empirische Analyse zu den Auswirkungen von Gestaltungsfreiräumen für Controllerbereiche. In: Zeitschrift für Planung & Unternehmenssteuerung, 18 (4): 365–386.

Krelle, W. (1968): Präferenz- und Entscheidungstheorie. Tübingen: J. C. B. Mohr.

Laukamm, T. (1979): Kollektiventscheidungen bei mehrfacher Zielsetzung in Unternehmen: Ein integriertes computergestütztes Entscheidungssystem. Saarbrücken: o. A.

Laux, H./Gillenkirch, R. M./Schenk-Mathes, H. Y. (2018): Entscheidungstheorie. 10. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Leech, D. (1990): Power indices and probabilistic voting assumptions. In: Public Choice, 66 (3): 293–299.

Macharzina, K./Wolf, J. (2018): Unternehmensführung: Das internationale Managementwissen: Konzepte – Methoden – Praxis. 10. Aufl., Wiesbaden: Gabler.

Meyer, R. (1983): Die Vorgabe einer Abstimmungsregel für Gremien als Entscheidungsproblem. Diss., Frankfurt/M.

Moulin, H. (1988): Condorcet's principle implies the no show paradox. In: Journal of Economic Theory, 45 (1): 53–64.

Moulin, H. (1994): Social choice. In: Aumann, R. J./Hart, S. (Hg.): Handbook of game theory with economic applications - vol. II. Reprint, 2007. Amsterdam u. a.: Elsevier, S. 1091–1125.

Müller, D. (2015): Abstimmungen gerechter gestalten. In: Controlling & Management Review, 59 (5): 52–58.

Nanson, E. J. (1882): Methods of election. In: Transactions of the Royal Society of Victoria, 19 (o. A.): 197–240.

Nitzsch, R. von (2021): Entscheidungslehre. 11. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Nurmi, H. (1983): Voting procedures: a summary analysis. In: British Journal of Political Science, 13 (2): 181–208.

Nurmi, H. (1997): The representation of voter groups in the European parliament: a Penrose-Banzhaf index analysis. In: Electoral Studies, 16 (3): 317–327.

Nurmi, H. (2007): Assessing Borda's rule and its modifications. In: Emerson, P. (Hg.): Designing an all-inclusive democracy: consensual voting procedures for use in parliaments, councils and committees; the modified Borda count, the quota Borda system and the matrix vote. Berlin u. a.: Springer, S. 109–119.

Penrose, L. S. (1946): The elementary statistics of majority voting. In: Journal of the Royal Statistical Society, 109 (1): 53–57.

Ponick, E. (2007): Gremienentscheidungen unter Beachtung nicht vergleichbarer Alternativen. Köln: Wissenschaftsverlag.

Ray, D. (1986): On the practical possibility of a 'no show paradox' under the single transferable vote. In: Mathematical Social Science, 11 (o. A.): 183–189.

Reny, P. J. (2001): Arrow's theorem and the Gibbard-Satterthwaite theorem: a unified approach. In: Economics Letters 70 (1): 99–105.

Richie, R. (2004): Instant runoff-voting: what Mexico (and others) could learn. In: Election Law Journal, 2 (4): 501–512.

Riesenhuber, M. (2006): Die Fehlentscheidung: Ursache und Eskalation. Wiesbaden: DUV.

Rommelfanger, H. J./Eickemeier, S. H. (2002): Entscheidungstheorie: Klassische Konzepte und Fuzzy-Erweiterungen. Berlin u. a.: Springer.

Rosenstiel, L. von (2009): Die Arbeitsgruppe. In: Rosenstiel, L. von/Regnet, E./ Domsch, M. E. (Hg.): Führung von Mitarbeitern: Handbuch für erfolgreiches Personalmanagement. 6. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel, S. 317–335.

Rothe, J./Baumeister, D./Lindner, C./Rothe, I. (2012): Einführung in Computational Social Choice: Individuelle Strategien und kollektive Entscheidungen beim Spielen, Wählen und Teilen. Heidelberg: Spektrum, Akademie Verlag.

Sader, M. (2002): Psychologie der Gruppe. 8. Aufl., München u. a.: Juventa.

Satterthwaite, M. (1975): Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. In: Journal of Economic Theory, 10 (2): 187–217.

Schauenberg, B. (1992): Die Hare-Regel und das IOC: irrationales Abstimmungsverhalten bei der Wahl von Atlanta zum Austragungsort der Olympischen Sommerspiele 1996? In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 44 (5): 426–444.

Scherpereel, P./Gaul, J./Muhr, M. (2015): Entscheidungsverhalten bei Investitionen steuern. In: Controlling & Management Review, 59 (Sonderheft 2): 32–38.

Scheytt, T./Unterrieder, A./Becker, A. (2005): Controllingbilder und Controllingpraxis: Epistemologische und methodologische Aspekte internationaler Controllingforschung. In: Weber, J./Meyer, M. (Hg.): Internationalisierung des Controllings: Standortbestimmung und Optionen. Wiesbaden: DUV, S. 85–109.

Schneider, D. (1995): Informations- und Entscheidungstheorie. München u. a.: Oldenbourg.

Schreyögg, G./Geiger, D. (2016): Organisation. Grundlagen moderner Organisationsgestaltung. 6. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Schulte-Zurhausen, M. (2014): Organisation. 6. Aufl., München: Vahlen.

Schulze, M. (2003): A new monotonic and clone-independent single-winner election method. In: Voting Matters, 17 (o. A.): 9–19.

Schulze, M. (2011): A new monotonic, clone independent, reversal symmetric, and condorcet-consistent single-winner election method. In: Social Choice and Welfare, 36 (2): 267–303.

Shapley, L. S./Shubik, M. (1954): A method for evaluating the distribution of power in a committee system. In: American Political Science Review, 48 (3): 787–792.

Staehle, W. (1999): Management: Eine verhaltenswissenschaftliche Perspektive. 8. Aufl., München: Vahlen.

Stahl, S./Johnson, P. E. (2007): Understanding modern mathematics. Sudbury, Mass. u. a.: Jones and Bartlett.

Steinmann, H./Schreyögg, G./Koch, J. (2013): Management: Grundlagen der Unternehmensführung, Konzepte – Funktionen – Fallstudien. 7. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Stock-Homburg, R./Groß, M. (2019): Personalmanagement: Theorien – Konzepte – Instrumente. 4. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Sunken, J./Schubert, K. (2018): Ökonomische Theorien der Politik. 2. Aufl., Wiesbaden: Springer VS.

Taylor, A. D./Pacelli, A. M. (2008): Mathematics and politics: strategy, voting, power and proof. 2. Aufl., New York u. a.: Springer.

Thiele, C. (2008): Regeln und Verfahren der Entscheidungsfindung innerhalb von Staaten und Staatenverbindungen. Berlin u. a.: Springer.

Tideman, T. N. (1987): Independence of clones as a criterion for voting rules. In: Social Choice and Welfare, 4 (3): 185–206.

Tideman, T. N. (2009): Collective decisions and voting: the potential for public choice. Aldershot u. a.: Ashgate.

Trapp, R. (2000): Wie relevant ist das Gibbard-Satterthwaite-Theorem für „den" Konsequentialismus? In: Nida-Rümelin, J. (Hg.): Rationalität, Realismus, Revision. Berlin u. a.: Walter de Gruyter, S. 322–330.

Vahs, D. (2012): Organisation: Ein Lehr- und Managementbuch. 8. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Weber, J./Meyer, M./Birl, H./Knollmann, R./Schlüter, H./Sieber, C. (2006): Investitionscontrolling in deutschen Großunternehmen: Ergebnisse einer Benchmarking-Studie. Weinheim: WILEY-VCH.

Wegge, J. (2006): Gruppenarbeit. In: Schuler, H. (Hg.): Lehrbuch der Personalpsychologie. 2. Aufl., Göttingen u. a.: Hogrefe, S. 579–610.

Weibler, J. (2016): Personalführung. 3. Aufl., München: Vahlen.

Weimann, J. (2006): Wirtschaftspolitik: Allokation und kollektive Entscheidung. 4. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Winkler, B./Hofbauer, H. (2010): Das Mitarbeitergespräch als Führungsinstrument. Handbuch für Führungskräfte und Personalverantwortliche. 4. Aufl., München: Hanser.

Wiswede, G. (2012): Einführung in die Wirtschaftspsychologie. 5. Aufl., Stuttgart: UTB.

Woodall, D. R. (1997): Monotonicity of single-seat preferential election rules. In: Discrete Applied Mathematics, 77 (1): 81–98.

Wunderer, R. (2011): Führung und Zusammenarbeit: Eine unternehmerische Führungslehre. 9. Aufl., Köln: Luchterhand.

Kapitel 4
Kooperative Spieltheorie

4.1 Einführung und Motivation

Eine ganze Reihe von Investitionen wird nicht durch einen einzelnen Akteur (z. B. Unternehmen, Kostenstelle, Gemeinde) sondern durch mehrere Akteure realisiert. Es resultieren Kooperationen, die in unterschiedlichen Funktionsbereichen angesiedelt sein können (z. B. im Forschungs- und Entwicklungsbereich, in der Produktion, im Absatz) und in verschiedensten Formen auftreten. Je größer das Investitionsvolumen und je langfristiger die Kapitalbindung, umso größer ist tendenziell auch das Bestreben, eine kooperative Lösung anzustreben.

Kooperationen können allgemein beschrieben werden als freiwillige, vertraglich vereinbarte, längerfristige Zusammenarbeit, die die einmalige Transaktion übersteigt. Umfang und Intensität der Zusammenarbeit sind für die weitere Betrachtung von nachrangigem Interesse. Dabei kann es sich um vertikale, horizontale oder auch konglomerate Wertschöpfungsstufen handeln. Neben der Kooperation von rechtlich selbstständigen Einheiten ist auch die innerbetriebliche Leistungserstellung durch die Kooperation unterschiedlicher Unternehmensbereiche (z. B. cost center, investment center, profit center) gekennzeichnet.[1] Ein klassisches Anwendungsgebiet dafür ist die Kuppelproduktion mit folgenden Beispielen:[2]

- Kokereien, in welchen gleichzeitig Koks, Gas, Teer und Benzol aus Steinkohle gewonnen werden,
- Raffinerien, in denen aus Rohöl viele Produkte, wie z. B. Schweröl, Leichtöl, Benzine, Gas und Wachs hergestellt werden,
- Roheisenherstellung im Hochofen, bei der zusätzlich Gichtgas, Wärme und Schlacke entsteht,
- Zerlegungsprozesse in Schlachthöfen, da dabei unterschiedlichste Fleisch- bzw. Wurstprodukte oder Vorprodukte entstehen sowie andere Produkte wie Häute, Gelatine, etc.
- Energieerzeugung in Blockheizkraftwerken, bei der Wärme als Nebenprodukt anfällt,

[1] Vgl. Müller/Müller (2017).

[2] Vgl. Forschungsstelle für Energiewirtschaft (1999: 158–176); Brüggemann (2011: 173); Jürgens/Poppinga/Wohlgemuth (2013: 9–10); Lammsbräu (2019: 74–77); Müller (2020: 522).

© Der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

D. Müller, *Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36597-4_4

- Kalksteingewinnung und -veredelung, in dessen Rahmen Branntkalk und Zement gewonnen werden,
- Zuschneideprozesse in der Holz-, Glas und Stahlindustrie, bei denen größere Vorprodukte in unterschiedliche Arten von kleineren Folgeprodukten geteilt werden,
- Brauereien, in denen neben dem Hauptprodukt Bier auch die Nebenprodukte Treber, Verkaufsmalz, Malzkeime und Abputzgetreide entstehen,
- die Herstellung von Natronlauge, die gleichzeitig zur Entstehung von Chlor und Wasserstoff führt,
- die Milchverarbeitung, die in unterschiedlichen Verarbeitungsstufen zu einer Vielzahl an Produkten führt, so dass zur Erstellung eines Endproduktes verschiedene Zwischen- und Nebenprodukte anfallen oder auch benötigt werden (vgl. Abb. 4.1),

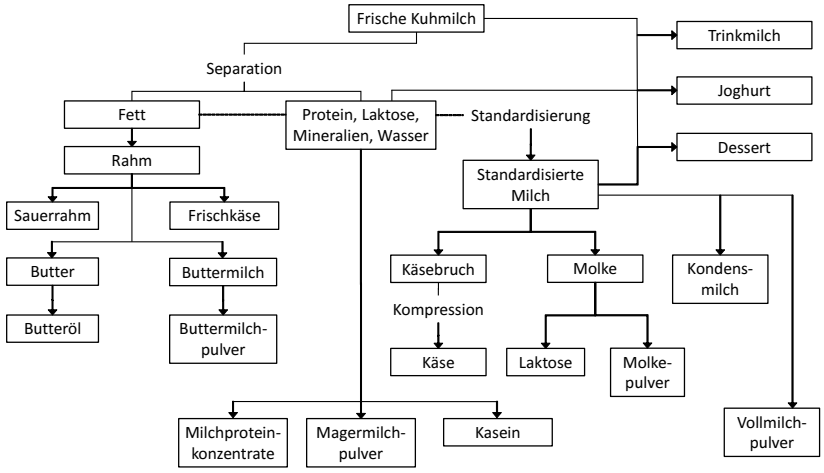


Abb. 4.1: Milchverarbeitungsstufen und -erzeugnisse. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an Friedrich (2010: 43).

- die Milcherzeugung, die das Rind bzw. die Kälber als „Kuppelprodukt“ erscheinen lässt bzw. sämtliche mit dem Weiterverkauf oder der direkten Verarbeitung zusammenhängenden Produkte, wie Fleisch, Häute, etc. zu Kuppelprodukten klassifiziert,
- die Holzbearbeitung bzw. die Herstellung von Schnittholz, bei der unterschiedliche Mengen und Arten von Sägerestholz, Sägespänen, Hackschnitzeln oder Schwarten anfallen, die weiterverarbeitet werden können, z. B. in der Zellstoffindustrie, der Holzwerkstoffindustrie oder der Brennstoffindustrie (als Pellets oder Holzbriketts).

Bei genauer Betrachtung ist fast jeder Produktionsprozess eine Kuppelproduktion, da neben den erwünschten Produkten auch zwangsläufig Abproduk-

te in Form von Emissionen (Lärm, CO_2, SO_2, Wasserdampf, u. ä.) entstehen. Aus kostenrechnerischer Sicht besteht das Problem, dass sich nur die Gesamtkosten der Produktion ermitteln lassen, weshalb eine Zurechnung der Kosten auf die Teilprodukte nur indirekt möglich ist. Das Ziel der **Kuppelkalkulation** besteht in der Verteilung der gesamten Prozesskosten auf die einzelnen Produkte. Aufgrund der Erzeugungsstruktur kann jedoch unmöglich festgestellt werden, welches Produkt welchen Anteil an den Gesamtkosten verursacht. Demzufolge ist eine verursachungsgerechte Kalkulation nicht möglich. Es haben sich folgende Verfahren herausgebildet:

- Verrechnung auf Basis technisch-naturwissenschaftlicher Relationen,
- Verteilungsmethode,
- Restwertrechnung,
- Durchschnittsprinzip.

Die ersten drei Verfahren folgen dem **Proportionalitätsprinzip** und basieren auf der Ableitung einer Äquivalenzziffer zur Kostenschlüsselung. Als Beispiel zur Nutzung technisch-naturwissenschaftlicher Relationen kann die Kostenaufteilung bei Kraft-Wärme-Kopplungsanlagen dienen. Die Aufteilung ist mittels Stromäquivalenzverfahren (auch als Arbeitswertverfahren bezeichnet), mit dem exergetischen Verfahren oder über das kalorische Verfahren möglich. Diese werden hier nicht erläutert, sondern es wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.[3]

Für dispositive Zwecke sind diese Verfahren der Kuppelkalkulation nicht geeignet, da diese nicht dem Prinzip der verursachergerechten Kalkulation entspricht. Einen Ausweg bietet hier die Interpretation des Kuppelproduktionsprozesses als kooperatives Spiel. Die Grundidee ist folgende:

- Der status quo der Gemeinschaftsproduktion wird verlassen und es wird angenommen, dass jedes der Produkte in einem eigenständigen Produktionsprozess allein hergestellt werden kann. Diese Annahme ist nicht unplausibel, denn oft ist der gegenwärtige technologische Entwicklungsstand der Kuppelproduktion aus der Zusammenlegung von ursprünglich getrennten Verfahren hervorgegangen.
- Die Kosten für diese getrennte Herstellung sind einfach zu ermitteln.
- Anschließend wird zum status quo zurückgekehrt und es werden die Kosten für den gemeinsamen Produktionsprozess ermittelt.
- Die Kostendifferenz zwischen der isolierten und der gemeinsamen Produktion wird auf die Produkte verteilt. Dazu wird ein Verfahren der kooperativen Spieltheorie verwendet.[4]

[3] Vgl. Konstantin (2017: 295–311).

[4] Vgl. Abschn. 4.7.1 auf S. 531.

Die Produkte werden demzufolge als Spieler in einem kooperativen Spiel interpretiert. Diese Vorgehensweise wird jedoch erst vereinzelt eingesetzt.[5] Dies mag daran liegen, dass die Interpretation von Produkten als Spieler in einem kooperativen Spiel etwas abwegig erscheint.

Das Fundamentalziel der Erzielung von Kooperationsvorteilen wird durch die beteiligten Akteure mittels Ableitung und Umsetzung formaler und/oder sachlicher Instrumentalziele untersetzt. Zu den am häufigsten angeführten Instrumentalzielen zählen:[6]

Reduktion:
- von variablen Kosten,
- der Durchlaufzeit,
- der Fixkosten,
- des Risikos,
- der Steuerlast.

Erhöhung:
- des Umsatzes,
- des Produktionsvolumens,
- der Flexibilität,
- der Arbeitsqualität,
- des Wissens,
- des Wachstums.

Diese Ziele werden in einer Kooperation ursächlich mittels Skalen- und/oder Verbundeffekten erreicht. Neben den angestrebten und beabsichtigten Zielen bzw. Effekten müssen die Akteure jedoch auch mit eher unbeabsichtigten Nebenwirkungen und Effekten rechnen, diesen begegnen und ggfs. Abhilfe schaffen. Dazu zählen negative Effekte, wie z. B. Kosten-, Abhängigkeits- oder Schnittstellennachteile.

In diesem Zusammenhang entsteht die Frage nach der Verteilung des erzielten Gemeinschaftsgewinns. Diese Verteilung soll fair in dem Sinne sein, dass eine möglichst stabile und langfristige Zusammenarbeit möglich ist. Dieses Verteilungsproblem – auf welches schon seit Langem hingewiesen wurde[7] – ist das **zentrale Problem** einer Kooperation: *„Ohne die Lösung dieses Verteilungsproblems ist Kooperation nicht möglich."*[8]

Zur Lösung dieses Problems bietet sich u. a. die Spieltheorie an, als deren „Gründungsväter" John von Neumann und Oskar Morgenstern bezeichnet werden können. Die Erstauflage des grundlegenden Werkes **„Theory of Games and Economic Behavior"** erschien 1944.[9] Damit wurden die Grundlagen sowohl der Spieltheorie, als auch der Erwartungsnutzentheorie[10] in der heute gebräuchlichen Darstellung gelegt.

---

[5] Vgl. Dyckhoff/Kasah/Quandel (2012); Mueller (2017a).

[6] Vgl. Hauschildt et al. (2016: 267); Müller (2017: 264).

[7] Vgl. Barnard (1938: 58–61).

[8] Plaßmann (1974: 124).

[9] Vgl. Neumann/Morgenstern (1944). John von Neumann (1903–1957); Oskar Morgenstern (1902–1977). Im weiteren Verlauf wird die dritte Auflage des Werkes aus dem Jahr 1953 zitiert.

[10] Vgl. Abschnitt 1.5.4 auf S. 109.

Die **Spieltheorie** kann in zwei grundlegende Gebiete unterteilt werden: die nicht-kooperative Spieltheorie – die auch als strategische Spieltheorie bezeichnet wird – und die kooperative Spieltheorie. Der zweifellos bekanntere Bereich – aus dem z. B. das Gefangenen-Dilemma stammt – ist die **strategische Spieltheorie**, in deren Vordergrund die Frage steht, welche Aktion (Strategie) ein Spieler - unter Berücksichtigung der möglichen und dem Gegenspieler (teilweise) bekannten Handlungsalternativen (Strategiemenge) - wählen soll. Dazu ist es erforderlich, einen oder mehrere Gegenspieler sowie deren mögliche, zukünftige Handlungsoptionen zumindest teilweise zu kennen und explizit zu modellieren. Erkenntnisse aus diesem Teil der Spieltheorie haben mittlerweile vielfältige Berücksichtigung in der Betriebswirtschaftslehre gefunden.[11]

Der andere Teilbereich der Spieltheorie, der in der Betriebswirtschaftslehre eine geringere Aufmerksamkeit erfuhr und erfährt, ist die **kooperative Spieltheorie**. Diese beschäftigt sich mit der Frage, wie die in einer Kooperation erzielten Ergebnisse aufzuteilen sind.

Interessanterweise betrug/beträgt der Anteil der kooperativen Spieltheorie an den Darstellungen in *„Theory of Games and Economic Behavior“* rund zwei Drittel.[12] Diese Relation findet keine Entsprechung in der darauf aufbauenden und darauf folgenden Literatur und Forschung. Die englischsprachige Diskussion kooperativer Modelle im ökonomischen Kontext weist eine große Tradition, Quantität und Intensität auf. Die Diffusion der Konzepte und Ergebnisse in den deutschsprachigen Raum erfolgte zu Beginn eher sporadisch,[13] hat sich jedoch in jüngerer Vergangenheit etwas erhöht.[14]

Die bisherigen Beschreibungen eröffnen folgende Interpretationsmöglichkeiten betrieblicher Szenarien als kooperatives Spiel:

- **externe Kooperation:** Als Spieler werden einzelne Unternehmen oder auch Kommunen betrachtet, die zusammen arbeiten so z. B. in **strategischen Allianzen**, **Joint-Ventures** oder **Konsortien**. Ein anderes Beispiel sind Infrastrukturprojekte, die durch mehrere kommunale oder private Investoren gemeinschaftlich realisiert und genutzt werden (z. B. Wasser- und Elektrizitätsversorgung, Straßen, Schienenwege).[15]
- **interne Kooperation:** Es lassen sich jedoch auch viele interne Szenarien als kooperatives Spiel interpretieren. Dazu zählt auch die bereits erwähn-

[11] Vgl. Meyer (2009); Ehrhart/Güth/Berninghaus (2010: 1–8).

[12] Vgl. Kuhn/Tucker (1958: 103).

[13] Vgl. Wild (1967); Krelle (1968: 348–365); Reichardt (1969); Wild (1969); Rosenmüller (1971); Kaluza (1972: 76–98); Winand (1978); Schichtel (1981); Bitz (1981); Zelewski (1988).

[14] Vgl. Fromen (2004); Mandl (2005); Wiese (2005); Scherpereel (2006); Fischer (2008); Kluth (2009); Zelewski (2009); Hiller (2011); Jene (2015); Müller (2016); Müller (2017); Müller/Müller (2017).

[15] Vgl. Zelewski (2009: 25–28).

te **Kuppelproduktion**, bei der in einem Produktionsprozess mehrere Produkte hergestellt werden. Darüber hinaus können die **Kostenstellen** als Spieler interpretiert und gemeinsame Aktivitäten zur Kostensenkung analysiert werden.

4.2 Grundlegende Annahmen

4.2.1 Allgemeine Annahmen

Die Spieltheorie bildet einen Teilbereich der präskriptiven Entscheidungstheorie und geht deshalb von dem idealtypischen, rationalen Akteur, dem **homo oeconomicus** aus. Dieses Konzept wurde bereits beschrieben[16] und auch kritisiert.[17]

Zusätzlich zu dieser Annahme wird bei der Modellierung eines kooperativen Spiels von rationalen Akteuren als Kooperationspartnern und nicht als Gegenspielern ausgegangen. Damit erübrigen sich Annahmen über die Art der Gegenspieler sowie über deren mögliche Handlungsstrategien. Es wird vorausgesetzt, dass feste, bindende **Abmachungen** zwischen den Koalitionären getroffen werden und die Koalitionäre ihre Aktionen aufeinander abstimmen können.[18] Eine **Koalition** ist ein **Zusammenschluss von Spielern**, welche ihre Handlungen aufeinander abstimmen, um ein Ergebnis gemeinsam zu erzielen. Für die folgenden Darstellungen gelten neben der Prämisse des homo oeconomicus folgende Annahmen:[19]

- $\mathbf{A_1}$: Zwischen den Spielern können feste, bindende **Abmachungen** getroffen werden.
- $\mathbf{A_2}$: Die Spieler streben die gemeinsame Erreichung eines Ergebnisses an und können das Ergebnis durch ihre Aktivitäten beeinflussen.
- $\mathbf{A_3}$: Die Koalitionäre verhalten sich – gemäß des Modells des homo oeconomicus – rational und eigennutzenmaximierend. Emotionale Aspekte (z. B. Schadenfreude oder Mitleid) werden nicht berücksichtigt.
- $\mathbf{A_4}$: Der gemeinsam erwirtschaftete Nutzen ist **vollständig transferierbar** und wird vollständig zwischen den Koalitionären aufgeteilt. Dies wird als **Seitenzahlung** bezeichnet.[20]

[16] Vgl. Abschn. 1.1 auf S. 3.

[17] Vgl. Abschn. 2.1 auf S. 287.

[18] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 221–222).

[19] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 181); Müller (2017: 265–266); Maschler/Solan/Zamir (2020: 709–711).

[20] Da diese Annahme von grundlegender Bedeutung ist, wird sie gesondert erläutert. Vgl. Abschn. 4.2.2 auf S. 468.

- **A_5**: Es existiert eine **Zentralinstanz**, die über die erforderlichen Informationen verfügt bzw. diese Daten erhebt, die das Verteilungsproblem löst und welche die Seitenzahlungen koordiniert.
- **A_6**: Jeder Spieler kennt, versteht und akzeptiert A_1 bis A_5.
- **A_7**: Es gelten die Annahmen A_1 bis A_6 und jeder Spieler weiß das.

Auf diese Weise wird die Klasse der *„transferable utility games“* definiert, die als TU-games oder TU-Spiele bezeichnet werden. Im vorliegenden Werk werden **ausschließlich** kooperative Spiele mit transferierbarem Nutzen vorgestellt.

Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass die Situation durch eine **charakteristische Funktion** abgebildet werden kann. Diese wird im Folgenden als Koalitionsfunktion bezeichnet. Mathematisch wird ein TU-Spiel mit Koalitionsfunktion entsprechend Definition 4.1 beschrieben.[21]

Definition 4.1: *Ein kooperatives n-Personen-Spiel Γ ist das Tupel (N, v), wobei $N = \{1,2,3...,n\}$ die endliche Menge der Spieler und v die Koalitionsfunktion ist.*

Wichtig ist dabei nicht nur die Menge aller Spieler N, sondern auch alle Teilmengen von N. Eine derartige Teilmenge $S \subseteq N$ wird als Koalition S bezeichnet, wobei N selbst als große Koalition bezeichnet wird.

Jede Koalition S erwirtschaftet einen **Nutzen** $v(S)$. Dabei handelt es sich um einen kardinalen Nutzen.[22] Die Koalitionsfunktion v ordnet jeder Teilmenge S einen Wert zu, der durch Zuschreibung der Nutzenwerte die ökonomische Leistungsfähigkeit dieser Koalition darstellt.

Definition 4.2: *Die Koalitionsfunktion v eines Spiels $\Gamma(N, v)$ ordnet jeder Koalition S einen Wert zu, so dass gilt: $v : 2^N \to \mathbb{R}$ und $v(\varnothing) = 0$.*

Im weiteren Verlauf bezeichnet Γ^N die Menge der kooperativen TU-Spiele mit der Spielermenge N.

[21] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 238–239).

[22] Vgl. Def. 1.7 auf S. 22.

4.2.2 Zur Transferierbarkeit des Nutzens

Auf eine der oben aufgezählten Annahmen – die Transferierbarkeit des Nutzens – wird nun ausführlich eingegangen. Die Transferierbarkeit des gemeinsam erwirtschafteten Nutzens ist grundlegend und wurde schon in den ersten Ausführungen zur Spieltheorie verwendet.[23]

Die Transferierbarkeit soll bewirken, dass bei der Übertragung des gemeinsam erwirtschafteten Nutzens zwischen den Spielern durch die Seitenzahlungen keine Nutzeneinheiten „verschwinden“ oder „erzeugt“ werden können. Der Gesamtwert des Nutzens darf sich durch die Seitenzahlungen nicht verändern. Auch wenn im Zusammenhang mit Investitionen i. d. R. Geld als Medium für Seitenzahlungen vorhanden ist, bedeutet dies nicht automatisch, dass der Nutzen transferierbar ist. Ein transferierbarer Nutzen liegt dann vor, wenn eine Geldeinheit für sämtliche Spieler – z. B. arme und reiche Spieler – ein und denselben Nutzenwert besitzt.

So grundlegend die Annahme eines transferierbaren Nutzens auch ist, wird die Implikation für die Nutzenfunktionen der Spieler nur selten diskutiert. von Neumann und Morgenstern äußern sich nur beiläufig zu diesem Thema.[24] Diese Idee war ursprünglich als vereinfachende Ausgangs-Annahme gedacht, um Spiele überhaupt formal darstellen und lösen zu können.[25] In anderen Quellen der spieltheoretischen Literatur wird oftmals die Annahme von Nutzenfunktionen verwendet, die linear im Geld bzw. im Austauschmedium sind.[26] Damit wird erreicht, dass die konkreten individuellen Nutzenfunktionen der Spieler nicht bekannt sein müssen. Es reicht hingegen, wenn diese auf Änderungen in dem Austauschgut linear reagieren. Die ersten Überlegungen zur Gestalt der Nutzenfunktion der Spieler eines kooperativen Spiels sind von Aumann vorgelegt worden. Er zeigte, dass die individuellen Nut-

[23] *„We shall therefore assume that the aim of all participants in the economic system, consumers as well as entrepreneurs, is money, or equivalently a single monetary commodity. This is supposed to be unrestrictedly divisible and substitutable, freely transferable and identical, even in the quantitative sense, with whatever “satisfaction” or “utility” is desired by each participant.“* Neumann/Morgenstern (1953: 8). Hervorh. im Original.

[24] *„…the free transferability of utilities between persons, does force one to assume proportionality between utility and monetary measures.“* Neumann/Morgenstern (1953: 629).

[25] Vgl. Shubik (1981: 286).

[26] *„To each outcome of a game - an outcome which might involve monetary as well as non-monetary consequences - each player can associate an equivalent pure monetary return in the sense that he is indifferent between this outcome and this amount of money. Monetary equivalences for outcomes do not constitute a suitable utility indicator unless the players’ utility functions for money are linear in money. In this case, the set of utility scales which agree with the scales of monetary equivalences are especially convenient, for in terms of these scales we can speak elliptically about transferring utility with conservation. We emphasize again that this in no way implies an interpersonal comparison of utility.“* Luce/Raiffa (1957: 181). Ähnlich Maschler (1992: 594); Fromen (2004: 81); Peleg/Sudhölter (2007: 10); Peters (2015: 151); Holler/Illing/Napel (2019: 277).

zenfunktionen linear im Geld sein müssen.[27] Im Folgenden wird gezeigt, dass eine Nutzenfunktion mit Linearität im Geld eine – jedoch nicht die einzige – Möglichkeit ist, um einen transferierbaren Nutzen sicherzustellen.[28]

In den bisherigen Darstellungen zur Nutzenfunktion des Entscheidungsträgers wurde lediglich eine einzelne Nutzenfunktion betrachtet, da es sich um einen Allein-Entscheider handelte.[29] Diese Darstellungen stammen primär aus der Mikroökonomie und dienen dazu, aus der Nutzenfunktion eine Nachfragefunktion abzuleiten. Auf dieser Basis ist es möglich, das Verhalten des Entscheiders – bei z. B. Preis- oder Einkommensänderungen – vorherzusagen. Im vorliegenden Fall von kooperierenden Akteuren bietet es sich an, die mikroökonomisch fundierte Theorie der aggregierten Nutzenfunktion heranzuziehen. Startpunkt ist folgendes Gedankenspiel: Es steht eine Gesamtsumme an Geld zur Verfügung, die in irgendeiner Form auf sämtliche Spieler verteilt wird. Spieler i verfügt dann über ein Budget in Höhe von g_i, mit dem er diejenige Menge an Gütern $\sum_{l=1}^{n} x_l$ erwerben möchte, die seinen Nutzen u_i maximiert. Jedes Gut x_l besitzt einen Preis p_l. Dies führt zu einer **indirekten Nutzenfunktion** (vgl. Def. 4.3).[30]

Definition 4.3: *Die indirekte Nutzenfunktion des Spielers i* $v_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist definiert mit:* $v_i(p,g_i) = u_i(x(p,g_i)) = \max_x \left\{ u_i(x) | \sum_{l}^{n} p_l \cdot x_l \leq g_i \right\}$.

In der Def. 4.3 ist der individuelle Nutzen v_i eine Funktion des Preises der n Güter $p \in \mathbb{R}^n$ und des individuellen Einkommens $g_i \in \mathbb{R}$. Die Funktion $v_i(p,g_i)$ gibt den maximalen Nutzenwert an, den der Akteur mit gegebenem Einkommen und gegebenen Preisen erreichen kann. Die indirekte Nutzenfunktion ordnet jedem Vektor von Preisen und Einkommen den maximal erreichbaren Nutzenwert zu.

Jeder Akteur realisiert auf Basis seiner individuellen Einkommens-Nutzen-Relation seinen Verbrauch. Sämtliche Akteure streben nach der Maximierung ihres Nutzens, so dass sich eine Preis-Konsum-Kombination ergibt, die zum maximalen Gesamtnutzen führt.

---

[27] Vgl. Aumann (1960).

[28] *„The domain of applicability of transferable utility is not as widely understood as it should be. Some economists and game theorists think there is more transferable utility than there really is and some think there is less. Some believe that transferable utility obtains whenever preferences are continuous and there exists a divisible and fully exchangeable good that is desired by all consumers. Others believe that transferable utility applies only in the very special case of "quasilinear utility", where utility is linear in the quantity of some commodity."* Bergstrom (1997: 27). Hervorh. im Original.

[29] Vgl. Abschn. 1.3 auf S. 25.

[30] Vgl. Varian (1992: 99); Wiese (2014: 77); Breyer (2020: 148–149).

Im Fall des Einzel-Akteurs hängt die Nachfrage von den Güterpreisen, dem individuellen Einkommen sowie der individuellen Nutzenfunktion ab. Eine über alle Spieler aggregierte Nachfrage wird jedoch auch von der Verteilung des Gesamteinkommens auf die Akteure beeinflusst. Eine Neuaufteilung des Einkommens kann zur Verschiebung der Nachfragekurve führen, wenn z. B. ein Gut von einem Akteur mehr, von einem anderen Akteur jedoch weniger nachgefragt wird und sich diese Reaktionen in der Gesamtnachfrage nicht ausgleichen. Eine Änderung der Einkommensverteilung wird deshalb zu einer Änderung der Gesamtnachfrage führen.[31] Um die Analyse des Zusammenhanges von Einkommen und Nachfrage leichter analysieren zu können, wäre es einfacher, wenn der Effekt der Einkommensverteilung vernachlässigt werden könnte. Die daraus resultierende Frage ist: Lassen sich die Präferenzen aller Akteure durch identische Nutzenfunktionen eines bestimmten Typs beschreiben, so dass die Gesamtnachfrage nur von der Höhe und nicht von der Verteilung des Gesamteinkommens abhängig ist? Die Antwort auf diese Frage lautet: Ja, wenn die indirekte Nutzenfunktion die sog. GORMAN-Form besitzt (siehe Def. 4.4).[32]

Definition 4.4: *Die indirekte Nutzenfunktion des Spielers i* $v_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *besitzt die* GORMAN*-Form, wenn gilt:* $v_i(p,g_i) = a_i(p) + b(p) \cdot g_i$.

In der Def. 4.4 ist der Term $a_i(p)$ die individuelle Veränderung des Nutzens des Spielers i bei einer Preisänderung und ist nicht vom Einkommen dieses Spielers abhängig. Die Funktion $b(p)$ hingegen ist für alle Spieler identisch, wird jedoch mit dem Einkommen des Spielers g_i multipliziert.

Auch wenn unterschiedliche Akteure ihr Einkommen völlig individuell auf unterschiedliche Güter verteilen, wird im GORMAN-Fall jede zusätzliche Einkommens-Einheit identisch verkonsumiert. Somit reagiert die Gesamtnachfrage nicht auf Änderungen der Einkommensverteilung. Damit wird die Analyse auf einen einzigen „Superkonsumenten“ reduziert.[33]

Die Analogie zur kooperativen Spieltheorie ist offensichtlich: Mehrere Akteure wollen den Gesamtnutzen ihrer Aktivitäten maximieren und wirtschaften quasi für einen „Gesamthaushalt“. Dieser Gesamtnutzen ist unter den Haushaltsmitgliedern aufzuteilen. Dazu ist – in beiden Konstellationen – sicherzustellen, dass der Nutzen „verlustfrei“ zwischen den Mitgliedern verteilt werden kann. Indirekte, individuelle Nutzenfunktionen der GORMAN-Form sind eine **notwendige und hinreichende Bedingung** für die Existenz eines trans-

[31] Vgl. Wied-Nebbeling/Schott (2005: 81).

[32] Vgl. Gorman (1953); Gorman (1959); Gorman (1961); Varian (1992: 153); Mas-Colell/Whinston/Green (1995: 119–120). In einigen Quellen wird die Bezeichnung GORMAN-Polarform verwendet. Vgl. Bergstrom/Varian (1985); Bergstrom (1997: 29). GORMAN wies bei der Einführung des Konzeptes darauf hin, dass bei der Darstellung die Indifferenzkurven nicht mittels kartesischer, sondern mittels polarer Koordinaten abgebildet werden. Vgl. Honohan/Neary (2003: 198); Honohan/Neary (2021: 506–508).

[33] Vgl. Bergstrom (1997: 29).

ferierbaren Nutzens.[34] Diese Erkenntnis kann zur Festlegung der Annahme über die individuellen Nutzenfunktionen der Spieler in einem kooperativen Spiel verwendet werden.

Die Präferenzen der Akteure sind im GORMAN-Fall unabhängig von der Einkommensverteilung und somit von der jeweiligen Einkommenshöhe. Arme und reiche Akteure reagieren identisch. Dies führt zu der Frage: Welche Anforderungen müssen die Präferenzen erfüllen, damit sie durch eine indirekte Nutzenfunktion nach Def. 4.4 repräsentiert werden?

Im grundlegenden entscheidungstheoretischen Kapitel wurden einige Anforderungen an rationale Präferenzen vorgestellt. Nun werden die Präferenzen vorgestellt, die zu einer quasi-linearen Nutzenfunktion führen. Im Folgenden beschreibt X die Menge der Ergebnisse, die aus unterschiedlichen Handlungsalternativen resultieren. Diese Menge kann aus physischen Gütern bestehen oder beispielsweise aus qualitativen Bewertungskriterien komplexer Handlungsalternativen, wie der Nutzwertanalyse. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beschreibt ein perfekt teilbares Gut, das als Tauschmittel dient. Dieses Tauschmittel wird als *Numéraire* bezeichnet und ist i. d. R. Geld. Folgende grundlegende Anforderungen an die Existenz einer stetigen Nutzenfunktion wurden bereits beschrieben:[35]

- Axiome 1.3.1 bis 1.3.3 (S. 28–28): Vollständigkeit, Reflexivität, Transitivität,
- Axiom 1.3.4 (S. 32): Stetigkeit,
- Axiom 1.3.5 (S. 35): Monotonie.

Zusätzlich wird die Vermögensunabhängigkeit eingeführt (vgl. Anf. 4.2.1).[36]

Anforderung 4.2.1 (Vermögensunabhängigkeit): *Die Präferenzrelation $\succsim_i$ auf $X \times \mathbb{R}$ ist unabhängig vom Vermögen des Akteurs i, wenn für zwei Ergebnisse mit $x_1, x_2 \in X$ sowie zwei Geldbeträge $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, g_1) \sim_i (x_2, g_2)$ ein $g_3 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass folgt: $(x_1, g_1 + g_3) \sim_i (x_2, g_2 + g_3)$.*

Vermögensunabhängigkeit der Präferenzen bedeutet, dass der Spieler einer Änderung des Ergebnisses um eine Einheit denselben Nutzenwert beimisst, egal wie groß sein Vermögen ist. Für einen Millionär ist der Ergebniszuwachs in Höhe von einem Euro genauso viel wert, wie für einen Studierenden.[37] Mit dieser Eigenschaft kann die Existenz einer quasi-linearen Nutzenfunktion sichergestellt werden (vgl. Merksatz 4.1).[38]

[34] Vgl. Bergstrom/Varian (1985: 225–226).
[35] Vgl. Merksatz 1.3 auf S. 35.
[36] Vgl. Kaneko/Wooders (2004: 1077).
[37] In der Annahme, dass es sich bei dem Studierenden nicht um einen Millionär handelt.
[38] Vgl. Kaneko (1976); Kaneko/Wooders (2004: 1078).

Merksatz 4.1: *Sind die Präferenzen des Akteurs i vollständig, reflexiv, transitiv, stetig, monoton und vermögensunabhängig, existiert eine Nutzenfunktion* $u : X \to \mathbb{R}$ *so dass gilt:* $(x_1, g_1) \succsim_i (x_2, g_2) \Leftrightarrow u(x_1) + g_1 \geq u(x_2) + g_2$.

Merksatz 4.1 führt zu einer **quasi-linearen** Nutzenfunktion (vgl. Def. 4.5).[39]

Definition 4.5: *Eine Nutzenfunktion* $u : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist quasi-linear, wenn gilt:* $u(x,g) = f(x) + g$.

Wenn ein Spieler eine Nutzenfunktion gemäß Def. 4.5 besitzt, ergibt sich daraus die indirekte Nutzenfunktion der Form $v(p,g) = v(p) + g$, was eine spezielle Variante der GORMAN-Form ist.[40] Der Einfluss des Ergebnisses x und des Geldes g ist demzufolge additiv separabel. Die Funktion u ist außerdem linear im Argument g.

Die Unabhängigkeit vom Vermögen sichert die Linearität. Quasi-lineare Nutzenfunktionen nach Def. 4.5 werden in der Spieltheorie üblicherweise zur Sicherstellung eines transferierbaren Nutzens angenommen.[41].

Quasi-Linearität der Nutzenfunktionen ist jedoch nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Existenz eines transferierbaren Nutzens.[42] Eine andere Möglichkeit besteht in der Annahme **homothetischer** Präferenzen (vgl. Anforderung 4.2.2).[43]

Anforderung 4.2.2 (Homothetie): *Die Präferenzrelation des Akteurs i* $\succsim_i$ *auf X ist homothetisch, wenn für zwei Ergebnisse mit* $x_1, x_2 \in X$ *und ein* $\lambda > 0$ *folgt:* $x_1 \sim_i x_2 \Rightarrow \lambda \cdot x_1 \sim_i \lambda \cdot x_2$.

Homothetische Präferenzen führen dazu, dass die Steigungen der Indifferenzkurven entlang eines Ursprungsstrahls konstant bleiben. Daher verlaufen die Einkommens-Konsum-Kurven linear: Bei wachsendem Einkommen werden alle Güter in unveränderten Proportionen nachgefragt.[44] Mittels homothetischer Präferenzen ergibt sich eine **homothetische** Nutzenfunktion (vgl. Def. 4.6).[45]

[39] Vgl. Kaneko/Wooders (2004: 1070); Wiese (2014: 56).

[40] Vgl. Varian (1992: 154).

[41] Vgl. Kaneko (1976); Moulin (1995: 402); González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 214) sowie die Quellen in Fußnote 26 auf S. 468.

[42] Vgl. Bergstrom/Varian (1985: 222).

[43] Vgl. Hens/Pamini (2008: 44).

[44] Vgl. Wied-Nebbeling/Schott (2005: 82–83); Kolmar (2021: 206–209).

[45] Vgl. Varian (1992: 146–147); Mas-Colell/Whinston/Green (1995: 50).

Definition 4.6: *Eine Nutzenfunktion* $u(x) : X \to \mathbb{R}$ *ist linear homogen, wenn für alle* $\lambda > 0$ *gilt:* $\lambda \cdot u(x) = u(\lambda \cdot x)$. *Eine Nutzenfunktion* $u(x) : X \to \mathbb{R}$ *ist homothetisch, wenn* $u(x) = f(h(x))$, *wobei die Funktion* f *monoton und die Funktion* $h(x)$ *linear homogen ist.*

Eine homothetische Nutzenfunktion nach Def. 4.6 ist eine monotone Transformation einer homogenen Funktion, muss selbst jedoch nicht homogen sein. Die Familie der homothetischen Funktionen ist sehr groß. So sind z. B. alle linearen Nutzenfunktionen, aber auch die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion homothetisch.[46]

Ein Blick auf die Definition 4.4 auf S. 470 zeigt, dass homothetische Präferenzen zu einem Sonderfall der indirekten Nutzenfunktion nach der Gorman-Form führen: $v(x,g) = v(x) \cdot g$. Die Gorman-Form impliziert, dass die Präferenzen aller Akteure identisch und homothetisch sind.[47]

Ein Beispiel für den Fall identischer homothetischer Präferenzen kann in der Edgeworth-Box mit zwei Gütern und zwei Spielern dargestellt werden. Wenn diese Spieler identische homothetische Präferenzen haben, dann ist die Kontraktkurve, die die Pareto-optimale Zuteilung beschreibt, genau die Diagonale der Edgeworth-Box.[48]

Bei quasi-linearen Nutzenfunktionen nach Def. 4.5 sind heterogene Präferenzen der Spieler i beim strikt konkaven Term $f_i(x)$ zulässig. Im Fall von homothetischen Funktionen nach Def. 4.6 hingegen müssen die Spieler über vollkommen identische Nutzenfunktionen verfügen.

Zusammenfassend wird festgehalten, dass mit der Gorman-Form die Klasse von Nutzenfunktionen beschrieben wird, die die Transferierbarkeit des Nutzens sicherstellt. Während die Quasi-Linearität im Geld als Annahme noch akzeptabel ist, erscheint die Annahme identischer und homothetischer Nutzenfunktionen sehr stark einschränkend.

4.3 Eigenschaften kooperativer Spiele

Mit einer Kooperation werden unterschiedliche Ziele und Zwecke verfolgt. Es gibt also Eigenschaften von Kooperationen, die von den Spielern angestrebt werden. Diese werden als wünschenswerte Eigenschaften beschrieben, da sie das Ziel jeder Kooperation darstellen. Als erste wünschenswerte Eigenschaft ist festzuhalten, dass die Kooperation keinen negativen Nutzen erzielt, also keinen Schaden anrichtet (vgl. Eigenschaft 4.3.1).

[46] Vgl. Wied-Nebbeling/Schott (2005: 82).
[47] Vgl. Bergstrom/Varian (1985: 226–228); Varian (1992: 154).
[48] Vgl. Bergstrom/Varian (1985: 223).

Eigenschaft 4.3.1: *Keine Koalition erzielt einen negativen Nutzen. Es gilt für alle* $S \subseteq N$*:* $v(S) \geq 0$.

In der Koalitionsfunktion wird die Gesamtklasse der reellen Zahlen als Geltungsbereich angegeben, da es u. U. möglich ist, dass Koalitionen ein negatives Ergebnis erzielen. Die Eigenschaft der Nicht-Negativität ist deshalb einerseits als ökonomisch wünschenswert zu bezeichnen. Andererseits ist die Nicht-Negativität wichtig in Verbindung mit der **Monotonie**. Diese beschreibt, dass der Beitritt eines neuen Spielers der Koalition nicht schadet (vgl. Eigenschaft 4.3.2).

Eigenschaft 4.3.2: *Ein Spiel* $\Gamma(N,v)$ *ist monoton, wenn:* $v(S) \leq v(R)$ *für alle* $S \subseteq R \subseteq N$.

Auch diese Eigenschaft ist ökonomisch nachvollziehbar, wird doch gefordert, dass das Ergebnis eines Spielers nicht größer sein soll als das Resultat einer Koalition, in welcher dieser Spieler teilnimmt.

Mit einer Kooperation wird angestrebt, dass der Gewinn der Kooperation mindestens genauso groß, wenn nicht noch größer ist als die Einzelgewinne der teilnehmenden Koalitionäre. Diesem Umstand wird mit der Charaktereigenschaft der **Superadditivität** (Synergie) Rechnung getragen (vgl. Eigenschaft 4.3.3).[49]

Eigenschaft 4.3.3: *Ein Spiel* $\Gamma(N,v)$ *ist superadditiv, wenn gilt:*

$$v(R \cup S) \geq v(R) + v(S) \;\forall\; R,S \subseteq N \quad mit \quad R \cap S = \varnothing$$

Im weiteren Verlauf bezeichnet Γ_S^N die Menge der superadditiven TU-Spiele mit der Spielermenge N.

Für Koalitionsfunktionen mit nicht-negativen Werten folgt aus der Superadditivität die Monotonie, d. h. jedes superadditive Spiel ist gleichzeitig auch monoton. Die Umkehrbeziehung hingegen gilt nicht.

Mit Blick auf die Eigenschaft 4.3.3 kann festgehalten werden, dass für den Fall $v(R \cup S) = v(R) + v(S) \;\forall\; R,S \subseteq N$ weder ein Synergiegewinn, noch ein Verteilungsproblem resultiert. Das Ergebnis der großen Koalition ist $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

Deshalb werden die folgenden Darstellungen auf Situationen beschränkt, in denen für mindestens eine Beziehung gilt: $v(R \cup S) > v(R) + v(S)$. Das führt zur Betrachtung der **wesentlichen Spiele** (vgl. Eigenschaft 4.3.4).

[49] Vgl. Wiese (2005: 103).

Eigenschaft 4.3.4: *Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist wesentlich, wenn gilt:*

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$$

Im weiteren Verlauf bezeichnet Γ_W^N die Klasse der wesentlichen Spiele mit der Spielermenge N. Als letzte Eigenschaft ist festzuhalten, dass eine zahlenmäßig größere Koalition auch ein ökonomisch besseres Ergebnis erzielt. Dies wird durch die **Konvexität** ausgedrückt (vgl. Eigenschaft 4.3.5).[50]

Eigenschaft 4.3.5: *Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist konvex, wenn für:*

a) alle $R,S \subseteq N$ *gilt:* $v(S \cup R) + v(S \cap R) \geq v(R) + v(S)$

oder

b) alle $i \in N$ *und* $S \subseteq R \subseteq N \setminus \{i\}$ *gilt:* $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(R \cup \{i\}) - v(R)$.

Im weiteren Verlauf bezeichnet Γ_K^N die Klasse der konvexen Spiele mit der Spielermenge N. Konvexität formuliert die schärfste Anforderung an die Effizienz von Koalitionen und kann mit steigenden Skalenerträgen verglichen werden. Der Begriff der Konvexität wird in der Abbildung 4.2 unter Verwendung der Eigenschaft 4.3.5 b) dargestellt.[51]

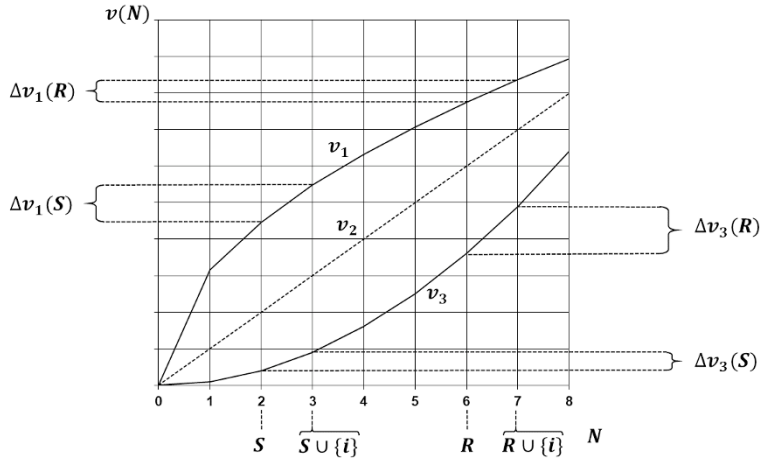


Abb. 4.2: Konvexer und konkaver Funktionsverlauf. Quelle: Eigene Darstellung.

[50] Vgl. Wiese (2005: 106–108); Holler/Illing/Napel (2019: 280).

[51] Abbildung 4.2 stellt stetige und differenzierbare Funktionen dar, um die Konvexität zu veranschaulichen. Dass die Koalitionsfunktionen kooperativer Spiele weder stetig noch differenzierbar sind, ist selbstverständlich.

Aus der Konvexitätsdefinition folgt, dass sowohl v_3 als auch v_2 konvex sind, wobei im Fall von v_3 in der Eigenschaft 4.3.5 b) das Kleiner-als-Zeichen gilt und für v_2 das Gleichheitszeichen gilt. Funktion v_3 ist streng konvex, Funktion v_2 ist linear und damit sowohl konvex als auch konkav. Funktion v_1 hingegen ist streng konkav. In dieser Abbildung gilt neben $S \subseteq R$ sowohl $\Delta v(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$ als auch $\Delta v(R) = v(R \cup \{i\}) - v(R)$. Es ist ersichtlich, dass Funktion v_3 streng konvex ist, da gilt: $\Delta v_3(S) < \Delta v_3(R)$. Die steigende Anzahl an Spielern führt zu einem größeren Anstieg des Spielwertes. Für Funktion v_2 gilt: $\Delta v_2(S) = \Delta v_2(R)$. Für die Funktion v_1 hingegen gilt: $\Delta v_1(S) > \Delta v_1(R)$, so dass die Konvexitätsbedingung nicht erfüllt ist.

Neben dieser Eigenschaft ist es von Interesse, die Teilspiele von konvexen Spielen zu analysieren. Zur Erläuterung und Definition des Begriffes des Teilspiels wird aus dem Spiel $\Gamma(N, v)$ durch Austritt eines Spielers das Teilspiel $\Gamma(N', w)$ mit $N' \subsetneq N$ gebildet. Die Koalitionsfunktion des Teilspiels $\Gamma(N', w)$ besteht aus den Ergebnissen derjenigen Koalitionen, die nach Austritt des Spielers noch übrig sind, so dass gilt: $w(S) = v(S)$ für alle $S \subseteq N'$.[52]

Definition 4.7: *Ein Teilspiel von $\Gamma(N, v)$ ist das Spiel $\Gamma(N', w)$, wobei $\varnothing \neq N' \subsetneq N$ und $w(S) = v(S)$ für alle $S \subseteq N'$.*

Ein konvexes Spiel hat die Eigenschaft, das **jedes** seiner Teilspiele ebenfalls **immer** konvex ist.[53]

Aufgrund dieser - und einer weiteren, noch vorzustellenden[54] - Eigenschaften stellen konvexe Spiele eine bedeutende Spielklasse dar.[55]

Die Nicht-Negativität der Wertefunktion ist für die Beziehung von **Monotonie** und **Superadditivität** wichtig. In diesem Fall ist jedes superadditive Spiel gleichzeitig auch monoton. Dies wird wie folgt gezeigt:

Monotonie:	$v(R)$	$\geq v(S)$ für alle $S \subseteq R \subseteq N$
Superadditivität:	$v(R \cup S)$	$\geq v(R) + v(S)\ \forall\ R,S \subseteq N \quad mit \quad R \cap S = \varnothing$
Dann gilt:	$v(R)$	$= v(S \cup (R \backslash S))$
	$v(R)$	$\geq v(S) + v(R \backslash S)$
So dass folgt:	$v(R)$	$\geq v(S)$

Als weitere Eigenschaft wurde die **Konvexität** eingeführt.[56] Bei Verwendung der ersten Definition der Konvexität kann gezeigt werden, dass jedes konvexe Spiel - mit nicht-negativen Werten - auch superadditiv ist. Dies wird wie folgt erklärt:

---

[52] Vgl. Hokari (2000b: 329–331); Peleg/Sudhölter (2007: 33).

[53] Vgl. Rothe et al. (2012: 103).

[54] Vgl. Merksatz 4.2 auf S. 496.

[55] Für zwei Klassen von Spielen, die immer konvex sind, vgl. Abschn. 4.7.3 auf S. 542 und Abschn. 4.8.2 auf S. 559.

[56] Vgl. Eigenschaft 4.3.5 auf S. 475.

Wenn für alle R,S $\subseteq N$ gilt:	$v(S \cup R) + v(S \cap R)$	$\geq v(R) + v(S)$,
folgt für $S \cap R = \varnothing$:	$v(S \cup R)$	$\geq v(R) + v(S)$.

Der Zusammenhang zwischen diesen drei Spielklassen wird in der Abbildung 4.3 deutlich.

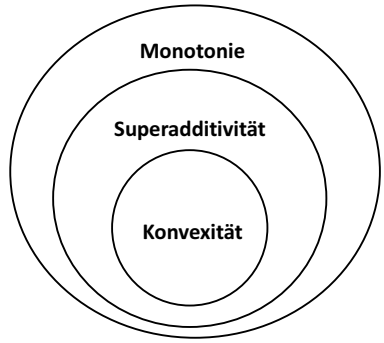


Abb. 4.3: Relation von Monotonie, Superadditivität und Konvexität. Quelle: Eigene Darstellung.

Die Relation dieser Eigenschaften kann auch wie folgt abgebildet werden:

$$Konvexität \Rightarrow Superadditivität \Rightarrow Monotonie$$

Mit Blick auf die Superadditivität wurde festgehalten, dass für den Fall $v(R \cup S) = v(R) + v(S)\ \forall\ R,S \subseteq N$ weder ein Synergiegewinn, noch ein Verteilungsproblem resultiert. Deshalb wurde die Klasse der wesentlichen Spiele eingeführt.

Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass Wesentlichkeit keine der bisher beschriebenen Eigenschaften impliziert. Umgekehrt muss auch festgehalten werden, dass keine der bisher beschriebenen Eigenschaften die Wesentlichkeit zwingend nach sich zieht. Das wird in der Abbildung 4.4 ersichtlich.

Der Grund für diesen Zusammenhang besteht:

- einerseits darin, dass zur Erfüllung der Wesentlichkeit in der Beziehung zwischen $v(N)$ und $\sum_{i \in N} v(\{i\})$ eine strikte Größer-als-Relation gelten muss, während bei den anderen Eigenschaften die Größer-gleich-Relation gilt und
- andererseits darin, dass bei der Feststellung der Wesentlichkeit lediglich die Werte der Einzelspieler betrachtet werden, wohingegen bei den anderen Eigenschaften auch sämtliche Teilkoalitionen zu überprüfen sind.

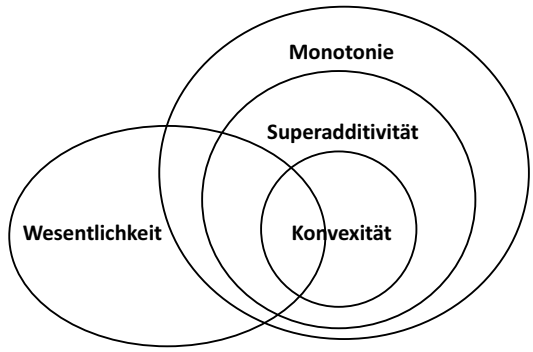


Abb. 4.4: Relation von Monotonie, Superadditivität, Konvexität und Wesentlichkeit. Quelle: Eigene Darstellung.

4.4 Prinzipielle Anforderungen an eine gerechte Lösung

Die bisher beschriebenen Eigenschaften können aber nicht die wesentliche Frage beantworten, welche Auszahlung – also **welchen Anteil** an dem gemeinsam erwirtschafteten Ergebnis – die einzelnen Spieler erhalten. Diese Frage wird mit dem zweiten wesentlichen Bestandteil der kooperativen Spieltheorie beantwortet, der Lösung bzw. dem Lösungskonzept.

Ziel der Verfahren der kooperativen Spieltheorie ist die Identifizierung einer **gerechten Aufteilung**. Die Kardinalfrage dabei ist, wie Gerechtigkeit interpretiert bzw. quantifiziert werden kann. Es werden folgende Prinzipien der Verteilungsgerechtigkeit unterschieden:[57]

- Gleichheitsprinzip,
- Aufteilungsgerechtigkeit,
- Leistungsprinzip,
- Bedarfsgerechtigkeit.

Gleichverteilung liegt vor, wenn jede Person einer Gesellschaft einen identischen Betrag erhält. Bei diesem Prinzip wird jede Person identisch behandelt, unabhängig von Herkunft, Bedürftigkeit, Leistung, Namen, Beziehung oder anderen Kriterien. Auch in der Vergangenheit getroffene Zusagen oder erworbene Ansprüche werden nicht berücksichtigt.

[57] Vgl. Helmstädter (1999: 9); Nutzinger/Hecker (2008: 568–569).

Die Frage nach der **Aufteilungsgerechtigkeit** entsteht bei der Verteilung einer Vermögensmasse unter einer Gruppe von Anspruchsberechtigten. Erhält jede dieser Personen den ihm zustehenden Teil, liegt eine gerechte Aufteilung vor. Dieser Grundsatz *„suum cuique“* ist sehr alt, jedoch auch sehr vage, da die Aussage *„Jedem das Seine“* offen lässt, wie das „Seine“ zu konkretisieren ist. Dies kann z. B. bedeuten, jedem nach seinen Leistungen, jedem nach seinem Vermögen, jedem nach seinen Bedürfnissen oder jedem die gleichen Chancen.[58] Im weiteren Verlauf wird dieses Prinzip auf die ursprünglich festgelegten Anteile von Personen im Fall der Vermögensaufteilung bezogen und als Suum-cuique-Prinzip bezeichnet. Das bedeutet, die Aufteilung orientiert sich an historisch definierten Anteilen.

Leistungsgerechtigkeit stellt auf den Zusammenhang von Leistung und Entlohnung bzw. Zuteilung ab. Dieses Prinzip - das Leistungsprinzip - ist das zentrale Prinzip wirtschaftlichen Handelns. Die Aufteilung erfolgt nach den erbrachten Leistungen der Individuen.

Richtet sich die Aufteilung ausschließlich nach dem Bedarf der Empfänger und wird dieser erfüllt, liegt **Bedarfsgerechtigkeit** vor. Es gibt eine Reihe von Bereichen, in denen das Bedarfsprinzip handlungsleitend ist, wie z. B. das Gesundheitswesen.[59]

Im Zentrum der folgenden Darstellungen steht zweifellos die Identifikation einer leistungsgerechten Aufteilung. Die Aufteilungsgerechtigkeit wird in einem späteren Abschnitt diskutiert.[60] Anhand des Beispiels 4.1 werden sämtliche Lösungskonzepte erläutert.

Beispiel 4.1:

Drei Koalitionäre können ein Investitionsprojekt allein (als Stand-alone-Koalition), in Zwei-Spieler-Koalitionen oder zu dritt realisieren. Die jeweiligen Kapitalwerte ergeben sich aus der Tabelle 4.1.

Tab. 4.1: Koalitionsfunktion des (Bei-)Spiels. Quelle: Eigene Darstellung.

S / Funktion	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
v(S)	0	200	200	200	700	500	500	1.200

Es stellt sich die Frage, wie der Wert der großen Koalition aufzuteilen ist. Eine einfache Lösung wäre eine Gleichverteilung, so dass jeder Spieler 400 € erhält. Für diesen Fall werden sich die Spieler A und B fragen, warum sie dem Spieler C zu einem derart hohen Anteil verhelfen sollten. Das betrachtete Spiel ist konvex.

---

[58] Vgl. Kersting (2000: 55); Honecker (2004: 634).

[59] Vgl. Behrens (2009: 70).

[60] Vgl. Abschnitt 4.8.1 auf S. 546.

In der Abbildung 4.5 ist die Ausgangssituation grafisch dargestellt. Durch die Eingangsdaten aus dem Beispiel wird eine Ebene möglicher Lösungen in einem dreidimensionalen Raum aufgespannt. Diese Hyperebene stellt die Menge aller prinzipiell möglichen Auszahlungsvektoren dar, die effizient sind.[61]

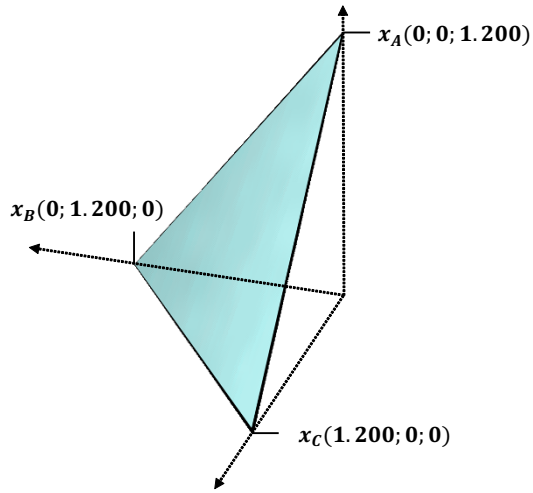


Abb. 4.5: Dreidimensionale Darstellung der Ausgangssituation für Bspl. 4.1. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Zelewski (2009: 104).

Die Abbildung 4.5 kann zweidimensional dargestellt werden, so dass ein gleichseitiges Dreieck entsteht (vgl. Abb. 4.6). Die Ansprüche jedes Spielers werden auf den Mittelsenkrechten abgetragen. Dabei beginnt der Anspruchspfeil eines Spielers auf der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite. Beispielsweise beträgt der Anspruch von Spieler A in dem Punkt Null ($x_A = 0$), in dem die Spieler B und C zusammen den Gesamtwert von 1.200 beanspruchen. Dies ist der Ursprung der Mittelsenkrechten, die auf der Mitte der Seite $\overline{x_B x_C}$ liegt. Je geringer der Anspruch der Spieler B und C ist, desto größer ist der Anspruch von Spieler A. Im Maximum erhält Spieler A den Gesamtwert $x_A = 1.200$, wodurch der Anteil für Spieler B und C Null ist. Wird die Gleichverteilung gewählt, befindet sich die Aufteilung exakt im Umkreismittelpunkt des Dreiecks.[62] Werden die Ansprüche für jede Koalition entlang der drei Mittelsenkrechten abgetragen, lässt sich die Lösung auch grafisch ermitteln.[63]

[61] Vgl. Tijs/Driessen (1986: 1021).
[62] Vgl. Abb. 4.14 auf S. 525.
[63] Vgl. Abb. 4.7 auf S. 492.

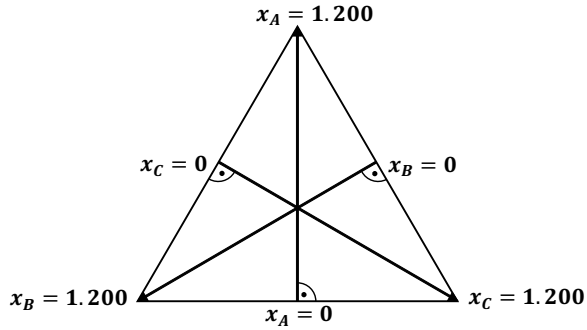


Abb. 4.6: Zweidimensionale Darstellung der Ausgangssituation für Bspl. 4.1. Quelle: Eigene Darstellung.

Ein Lösungskonzept wird auf die Koalitionsfunktion angewendet und definiert die Auszahlungen für die einzelnen Spieler (vgl. Definition 4.8).

Definition 4.8: *Ein Lösungskonzept ist eine Funktion f, welche einem kooperativen Spiel $\Gamma(N, v)$ eine Teilmenge $f(v) \in \mathbb{R}^N$ zuweist.*

Eine erste – scheinbar triviale – Forderung an ein Lösungskonzept ist, dass das Konzept eine eindeutige Lösung generiert (vgl. Anforderung 4.4.1).

Anforderung 4.4.1: *Die Lösung f ist eindeutig, wenn $|f(v)| = 1$ für jedes Spiel $\Gamma(N,v)$.*

Mit dieser Forderung („single valuedness“) soll sichergestellt werden, dass eine Lösung existiert, welche auch genau einen Wert liefert. In diesem Fall erzeugt das Lösungskonzept genau einen eindeutigen Auszahlungsvektor $x = (x_1,x_2,x_3...x_n)$ mit $x \in \mathbb{R}^N$ und verteilt auf diese Weise den Wert der großen Koalition $v(N)$. Dass diese Forderung **nicht trivial** ist, wird später deutlich.[64]

Für ein und dieselbe Koalitionsfunktion existieren mehrere unterschiedliche Möglichkeiten der Ergebnisverteilung. **Grundlegendes Ziel** dieser Lösungskonzepte ist die Identifizierung einer **fairen Aufteilung**. Um eine Lösung zu erhalten, die von allen Spielern als fair empfunden wird, werden im Folgenden die wesentlichen Anforderungen formuliert.

Generell wird davon ausgegangen, dass lediglich diejenigen Lösungskonzepte akzeptiert werden und demzufolge durchsetzbar sind, die den sozialen Normen der Spieler entsprechen.[65] Schon frühzeitig ist festgestellt worden, dass

[64] Vgl. Abschn. 4.5.1 auf S. 491 und Abschn. 4.5.5 auf S. 519.

[65] Vgl. Wild (1967: 708); Wißler (1997: 38).

dabei diskriminierende Verteilungen zu vermeiden sind, da diese keine Basis für langfristige Kooperationen bieten können.[66]

Folgende Anforderungen werden im weiteren Verlauf vorgestellt:[67]

1. individuelle Rationalität,
2. Effizienz,
3. Dummy-Spieler-Eigenschaft,
4. Anonymität,
5. Additivität sowie
6. Monotonie.

Diese Axiome werden nun erläutert.

1. Individuelle Rationalität:

Eine Lösung ist dann individuell rational, wenn jeder Spieler mindestens den Wert der stand-alone-Koalition erhält.[68]

Anforderung 4.4.2: *Ein Lösungskonzept f ist individuell rational, wenn gilt:* $f_i(v) \geq v(\{i\}) \ \forall \ i \in N$.

2. Effizienz:

Als weitere Eigenschaft ist zu fordern, dass das gesamte Ergebnis verteilt werden soll.[69]

Anforderung 4.4.3: *Lösungskonzept f ist effizient, wenn gilt:*

$$\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$$

Die Effizienz-Anforderung spiegelt gleichzeitig kollektive Rationalität im Sinn der Pareto-Optimalität wider. Es werden nur Auszahlungen betrachtet, bei denen es nicht möglich ist, einen Spieler besser zu stellen, ohne einen anderen Spieler schlechter zu stellen.

Eine Zuteilung, die sowohl die Anforderung der individuellen Rationalität als auch der Effizienz erfüllt, wird als **Imputation** bezeichnet, ein Konzept das ebenfalls auf von Neumann und Morgenstern zurückzuführen ist.[70]

---

[66] Vgl. Plaßmann (1974: 130).

[67] Vgl. Müller (2017: 268). Zu einer Reihe weiterer Anforderungen vgl. Fromen (2004: 153–180); Meinhardt (2018: 242); Zelewski (2018: 226–231).

[68] Zu einer weiterführenden Diskussion individueller Rationalität, welche sich auf die Eigenschaften der einzelnen Akteure bezieht vgl. Zelewski (2009: 95–100).

[69] Vgl. Wiese (2005: 144).

[70] Vgl. Neumann/Morgenstern (1953: 33–36); Kuhn/Tucker (1958: 102).

Definition 4.9: *Im Spiel $\Gamma(N,v)$ wird der Vektor $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ als Imputation bezeichnet, wenn gilt:*

$$a)\ x_i \geq v(\{i\})$$

sowie

$$b)\ \sum_{i\in N} x_i = v(N).$$

Zur weiteren Darstellung wird die Menge der Imputationen definiert.

Definition 4.10: *Die Menge aller Imputationen eines Spiels $\Gamma(N,v)$ ist definiert durch*

$$I(v)=\left\{ x\in\mathbb{R}^N \middle| \sum_{i\in N} x_i = v(N)\ \textit{und}\ x_i \geq v(\{i\})\ \forall\ i\in N \right\}.$$

Sowohl die Menge der Imputationen der wesentlichen als auch der superadditiven Spiele ist immer nicht-leer, d. h. $I(v)\neq\varnothing\ \forall\ v\in\Gamma_W^N$ sowie $I(v)\neq\varnothing\ \forall\ v\in\Gamma_S^N$.[71]

3. Dummy-Spieler-Eigenschaft:

Als weitere Anforderung ist festzuhalten, dass ein Spieler, der keinen Beitrag zu einer Koalition leistet, auch keinen Anteil am Koalitionsgewinn erhält, da die Koalition ohne diesen Spieler denselben Gewinn erzielen kann.[72] Der Spieler trägt nur so viel zum Kooperationsergebnis bei, wie er in einer Ein-Spieler-Koalition erzielen würde.

Definition 4.11: *Ein Spieler $i\in N$ ist dann ein Dummy-Spieler, wenn für jede Koalition $S\subseteq N$ mit $i\notin S$ gilt: $v(S\cup\{i\})=v(S)+v(\{i\})$.*

Für die Auszahlung an diesen Spieler muss die Dummy-Spieler-Eigenschaft gelten.[73]

Anforderung 4.4.4: *Ein Lösungskonzept f erfüllt die Dummy-Spieler-Eigenschaft, wenn für jeden Dummy-Spieler i gilt: $f_i(v)=v(\{i\})$.*

Die Zusammenarbeit mit einem solchen Spieler bietet keiner Koalition einen Kooperationsvorteil.

[71] Vgl. González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 218); Chakravarty/Mitra/Sarkar (2015: 33).
[72] Vgl. Brânzei/Dimitrov/Tijs (2008: 10).
[73] Vgl. Wiese (2005: 201).

4. Anonymität:

Weiterhin ist zu fordern, dass zwei Spieler, die einen identischen Beitrag leisten, gleich behandelt werden. Die Auszahlungen an die Spieler hängen demzufolge ausschließlich von ihren Beiträgen zur Koalition und nicht von anderen Faktoren (z. B. Herkunft, Bedürftigkeit, Einkommen oder Name) ab.[74] Diese Eigenschaft wird auch als Equal-Treatment-Property, als Symmetrie und im Folgenden als Anonymität bezeichnet.[75]

Anforderung 4.4.5: *Ein Lösungskonzept f ist anonym, wenn für zwei Spieler i und j mit: $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ für alle $S \subseteq N$ und $i,j \notin S$ gilt: $f_i(v) = f_j(v)$.*

5. Additivität:

Die Additivität als Anforderung wurde sehr frühzeitig eingeführt,[76] jedoch ebenso frühzeitig kritisiert.[77] Die Grundidee besteht in der Forderung, dass es unerheblich sein muss, ob ein Spieler an zwei Spielen oder an einem – aus diesen beiden Spielen – zusammengesetzten Spiel teilnimmt.

Das bedeutet, dieselbe Spielermenge spielt anstelle eines Spiels zwei unabhängige Spiele, deren Wertfunktionen additiv verknüpft sind. Zur besseren Unterscheidung von der - bereits vorgestellten - Bezeichnung „Teilspiel“[78] wird hier der Begriff **Ergänzungsspiel** eingeführt. Dabei ist es unerheblich, ob diese Spiele zeitgleich oder nacheinander gespielt werden. Wichtig ist lediglich, dass die Wertfunktionen additiv verknüpft sind.

Ein Lösungskonzept ist dann additiv, wenn es einem Spieler bei Teilnahme an zwei Spielen in der Summe denselben Anteil zuordnet, wie bei der Teilnahme an dem zusammengesetzten Spiel.[79]

Anforderung 4.4.6: *Ein Lösungskonzept f ist additiv, wenn für alle $i \in N$ gilt: $f_i(v+w) = f_i(v) + f_i(w)$.*

Als ökonomisch motivierte Interpretation können z. B. zwei Kostenstellen (KST) eines Unternehmens betrachtet werden. Diese werden von einem KST-Leiter verantwortet, welcher an der Höhe der Kosten gemessen und entspre-

[74] Vgl. Wiese (2005: 206–207); Fiestras-Janeiro/García-Jurado/Mosquera (2011: 4).

[75] Dieselbe Forderung wurde im Zusammenhang mit Entscheidungen unter Ungewissheit erhoben und als Symmetrie bezeichnet. Vgl. Anf. 1.6.8 auf S. 167.

[76] Shapley führte diese Forderung als ein grundlegendes Axiom unter dem Begriff *„law of aggregation“* ein. Vgl. Shapley (1953: 309).

[77] Zu einer Gegenargumentation vgl. Luce/Raiffa (1957: 250–252). So wird z. B. festgestellt, diese Forderung sei schwer zu rechtfertigen – vgl. Fromen (2004: 175) – oder es wird darauf hingewiesen, dass diese Forderung prinzipiell aus keiner Fairnessargumentation resultiert – vgl. González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 227).

[78] Vgl. Def. 4.7 auf S. 476.

[79] Vgl. Wiese (2005: 203); Peleg/Sudhölter (2007: 152).

chend entlohnt wird. Die Additivität fordert, dass das Entlohnungsschema dieses Verantwortlichen so gestaltet sein muss, dass die Entlohnung identisch ist, wenn sowohl beide KST einzeln oder gemeinsam abgerechnet bzw. betrachtet werden. Die Entlohnung des Verantwortlichen darf nicht durch die rechnerische Aufteilung des Unternehmens in KST beeinflusst werden – vorausgesetzt, der Produktionsprozess und die daraus resultierende Kostenhöhen und Kostenstrukturen bleiben identisch.[80] Die grundlegende Frage dieser – mathematisch einleuchtenden – Forderung ist, ob es in der (ökonomischen) Realität möglich ist, zwei **isolierte, von einander unabhängige Spiele** zu einem gemeinsamen Spiel zusammenzufassen, ohne die Wertfunktionen zu verändern.[81] Zur weiteren Analyse wird Beispiel 4.2 eingeführt.[82]

Beispiel 4.2:

Es werden zwei isolierte Spiele $\Gamma(N,v)$ und $\Gamma(N,w)$ sowie das daraus gebildete zusammengesetzte Spiel $\Gamma(N,u) = \Gamma(N,v) + \Gamma(N,w)$ mit den Koalitionsfunktionen aus Tabelle 4.2 betrachtet.

Tab. 4.2: (Bei-)Spiele für das Additivitätsaxiom. Quelle: Eigene Darstellung.

Funktion \ S	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
v(S)	0	0	0	0	0	0	0	1
w(S)	0	0	0	0	1	0	0	1
u(S)	0	0	0	0	1	0	0	2

Alle drei Spiele sind konvex. An diesem Beispiel wird bei Vorstellung der unterschiedlichen Lösungskonzepte untersucht, ob sie die Additivitätseigenschaft erfüllen.

---

6. Monotonie:

Die Monotonie des Lösungskonzepts soll sicherstellen, dass sich die Anteile der Spieler nicht in die entgegengesetzte Richtung ändern, wie der Koalitionswert. Folgende, wesentliche Monotoniearten wurden für Einzelwertlösungen[83] definiert:[84]

a) Aggregatsmonotonie,
b) Koalitionsmonotonie,
c) strenge Monotonie sowie
d) Populationsmonotonie.

---

[80] Vgl. Müller (2017: 270).
[81] Vgl. Spinetto (1975: 486).
[82] Vgl. Luce/Raiffa (1957: 251–252).
[83] Vgl. Anforderung 4.4.1 auf S. 481.
[84] Vgl. Arin/Katsev (2018: 305); Mueller (2018a: 408).

Diese Monotoniearten werden im weiteren Verlauf kurz erläutert.

6. a) Aggregatsmonotonie:

Diese Monotonieform wurde früh eingeführt[85] und fordert bei steigendem Wert der großen Koalition nicht-sinkende Anteile der Spieler.

Anforderung 4.4.7: *Ein einzelwertiges Lösungskonzept f ist aggregatsmonoton, wenn für alle v und w mit:*

- $v(N) > w(N)$ *und*
- $v(S) = w(S)$ *für alle* $S \subsetneq N$

gilt: $f_i(v) \geq f_i(w)$ *für alle* $i \in N$.

Aggregatsmonotonie bezieht sich auf den Wert der großen Koalition und ist ein intuitiv einsichtiges Kriterium,[86] da es „unlogisch" wäre, wenn ein Anstieg des Gesamtergebnisses der Koalition zu sinkenden Anteilen der Koalitionäre führen würde. Um die verschiedenen Lösungskonzepte auf die Erfüllung der Aggregatsmonotonie zu untersuchen, wird das Beispiel 4.3 eingeführt.

Beispiel 4.3:

Es wird ein Spiel $\Gamma(N,v)$ mit $N = \{A,B,C,D\}$ und folgenden Werten betrachtet:[87]

$$v(S) = \begin{cases} 10 & \text{wenn } S = N, \\ 6 & \text{für } |S| = 3 \text{ und } \{A,B,C\} \notin S, \\ 4 & \text{für } S = \{A,B,C\}, \\ 2 & \text{für } |S| = 2 \text{ und } \{A,C\} \notin S, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Wird der Wert der großen Koalition um den Wert 2 erhöht, resultiert das Spiel $\Gamma(N,w)$ mit $w(N) = 12$. Beide Spiele sind konvex. Wenn eine Lösung die Forderung der Aggregatsmonotonie erfüllt, ist sichergestellt, dass alle Spieler in dem Spiel $\Gamma(N,w)$ keinen geringeren Anteil erhalten als in dem Spiel $\Gamma(N,v)$.

---

6. b) Koalitionsmonotonie:

Neben dem Umstand, dass sich der Wert der großen Koalition ändert, ist es denkbar, dass sich der Wert einer anderen, beliebigen Koalition ändert. In diesem Fall ist es legitim zu fordern, dass sich die Anteile derjenigen Spieler, welche dieser Koalition angehören, nicht in die andere Richtung bewegen, wie das Koalitionsergebnis. Diese Idee wurde von Shubik bei der Analyse von Kostenreduktionen im Unternehmen entwickelt. Er forderte, dass die Verantwortlichen, die Kostensenkungen erwirtschaftet haben, nicht dafür bestraft

[85] Vgl. Megiddo (1974).
[86] Vgl. Megiddo (1974: 355); Young (1985: 66); Hokari (2000a: 135); Fromen (2004: 166).
[87] Vgl. Hokari (2000a: 135).

werden sollten. Dies muss auch dann gelten, wenn sich das Ergebnis des Gesamtunternehmens nicht verändert.[88]

Anforderung 4.4.8: *Ein einzelwertiges Lösungskonzept f ist koalitionsmonoton, wenn für alle v und w mit:*

- $v(T) > w(T)$ *für eine Koalition* $T \subseteq N$ *und*
- $v(S) = w(S)$ *für alle* $S \neq T$

gilt: $f_i(v) \geq f_i(w)$ *für alle* $i \in T$.

Forderung 4.4.8 beinhaltet Forderung 4.4.7. Demzufolge ist die Koalitionsmonotonie umfassender als die Aggregatsmonotonie.[89] Wenn ein Lösungskonzept die Koalitionsmonotonie erfüllt, ist automatisch die Erfüllung der Aggregatsmonotonie sichergestellt. In umgekehrter Richtung kann geschlussfolgert werden, dass eine Lösung, die die Aggregatsmonotonie nicht erfüllt, auch die Koalitionsmonotonie nicht erfüllt. Um im späteren Verlauf die Erfüllung der Koalitionsmonotonie prüfen zu können, wird das Beispiel 4.4 betrachtet.

Beispiel 4.4:

Es wird ein 4-Personen-Spiel $\Gamma(N,v)$ mit folgenden Werten eingeführt:[90]

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |S| = 1, \\ 0 & \text{für } S = \{A,B\} \text{ und für } S = \{C,D\}, \\ 2 & \text{wenn } S = N, \\ 1 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Dieses Spiel ist nicht konvex, aber es ist superadditiv. Die zu klärende Frage wird sein, wie die unterschiedlichen Lösungskonzepte auf Änderungen dieser Wertfunktion reagieren. Dazu wird für alle im Folgenden behandelten Lösungskonzepte die Wertfunktion für $T = \{B,C,D\}$ so geändert, dass das Spiel $\Gamma(N,w)$ entsteht, mit $w(S) = v(S)$, jedoch für $w(\{B,C,D\}) = 2$.

---

6. c) Strenge Monotonie:

Diese Monotonieform bezieht sich auf die marginalen Beiträge der Spieler zu den unterschiedlichen Koalitionen, weshalb sie manchmal auch als Marginalitätseigenschaft (*marginality property*)[91] oder Beitragsmonotonie (*contributional monotonicity*)[92] bezeichnet wird. Dabei spielt der marginale Beitrag

[88] *„There should always be an incentive for a manager to implement an efficiency or report a new idea if it benefits the firm as a whole no matter what changes it may cause to take place in his own operation.“* Shubik (1962: 329).

[89] Vgl. Young (1985: 68); Housman/Clark (1998: 611); Fromen (2004: 167).

[90] Vgl. Housman/Clark (1998: 612).

[91] Vgl. Maschler/Solan/Zamir (2020: 808–809).

[92] Vg. Young (1985: 69); Hokari/van Gellekom (2002: 597).

eines Spielers i die entscheidende Rolle. Der marginale Beitrag beschreibt die Differenz zwischen dem Wert, den eine Koalition ohne den Spieler i erwirtschaftet und dem Wert, der gemeinsam mit Spieler i erreicht wird. Strenge Monotonie fordert, dass ein Spieler mit steigenden Marginalbeiträgen keine sinkenden Anteile erhalten soll. In Abhängigkeit von der Betrachtungsweise, kann der marginale Beitrag m_i des Spielers i in zwei Varianten entsprechend Definition 4.12 notiert werden.

Definition 4.12: *Der marginale Beitrag m_i des Spielers i zum Koalitionswert $v(S)$ resultiert aus:*

$$m_i v(S) = \begin{cases} v(S) - v(S \backslash \{i\}) \ \textit{wenn} \ i \in S, \\ v(S \cup \{i\}) - v(S) \ \textit{wenn} \ i \notin S. \end{cases}$$

Mit Definition 4.12 kann die strenge Monotonie in Anforderung 4.4.9 beschrieben werden.

Anforderung 4.4.9: *Ein einzelwertiges Lösungskonzept f ist streng monoton, wenn für alle v und w mit $m_i v(S) > m_i w(S)$ für alle $S \subseteq N$ gilt: $f_i(v) \geq f_i(w)$.*

Diese Form der Monotonie fordert einen höheren Anteil am Kooperationsergebnis auf Basis höherer marginaler Beiträge.

Young zeigte, dass die strenge Monotonie die *Dummy-Spieler-Eigenschaft* und die *Additivität* ersetzt.[93] Das wird auch als Theorem von Young bezeichnet.

Es kann an dieser Stelle schon festgestellt werden, dass die Idee des marginalen Beitrags von zentraler Bedeutung für die Shapley-Lösung ist.[94] Dies ist auch die Begründung dafür, dass diese Anforderung **nur von der Shapley-Lösung** erfüllt wird. Alle anderen hier vorgestellten Lösungskonzepte erfüllen diese Anforderung - auch für konvexe Spiele - **nicht**.[95]

6. d) Populationsmonotonie:

In den bisherigen Betrachtungen blieb die Zahl der beteiligten Spieler konstant. Jedoch ist es ebenso möglich und auch nicht ungewöhnlich, dass eine bestehende Spielermenge durch den Beitritt eines zusätzlichen Spielers vergrößert wird. In diesem Fall ist aus Fairnessgründen zu fordern, dass sich die Anteile der „alten“ Spieler in dem - auf diese Weise erweiterten - neuen Spiel nicht verringern. Diese Forderung wurde als *“monotonicity with respect*

[93] Vgl. Young (1985: 71); Gilles (2010: 81); Carreras/Owen (2013: 701).

[94] Vgl. Def. 4.16 auf S. 500.

[95] Vgl. Young (1985: 70); Hokari/van Gellekom (2002: 600); Peleg/Sudhölter (2007: 157).

to changes in the number of agents“[96] eingeführt. In einer anders gerichteten Interpretation kann formuliert werden, der Austritt eines Spielers soll bei keinem der verbleibenden Spieler zu einem steigenden Anteil führen.[97] Zur Erläuterung der Populationsmonotonie wird der Begriff des Teilspiels[98] herangezogen und in Anforderung 4.4.10 beschrieben.

Anforderung 4.4.10: *Ein einzelwertiges Lösungskonzept f ist populationsmonoton, wenn für jedes Teilspiel $\Gamma(N', w)$ von Spiel $\Gamma(N, v)$ gilt: $f_i(w) \leq f_i(v)$ für alle $i \in N'$.*

Ökonomisch relevant ist die Populationsmonotonie z. B. bei der Umstrukturierung eines Unternehmens, bei einer Fusion oder bei einer Aufspaltung, so dass sich die Anzahl der Verantwortungsbereiche (z. B. cost center, profit center, investment center) und/oder die Anzahl der darin zusammengefassten Mitarbeiter verändert. Wenn davon ausgegangen wird, dass die Vergrößerung eines Bereiches (Erhöhung der Spieleranzahl) zu einem besseren Ergebnis der neuen Koalition führt (wenigstens jedoch zu keinem schlechteren Ergebnis), so dass eine der wünschenswerten Eigenschaften - Monotonie, Superadditivität oder Konvexität - erfüllt ist,[99] so ist die Forderung plausibel, dass die Mitglieder der „Alt-Bereiche“ keine geringere Erfolgsbeteiligung erhalten als vor der Erweiterung.

Die Veränderung der Spielerzahl führt demzufolge auch zu einer veränderten Wertfunktion. Hier erscheint ein Vergleich mit der **Additivität**[100] notwendig. Im Fall der Additivität ändert sich weder der Gesamtwert eines Spiels durch die Aufspaltung oder Zusammenlegung, noch die Anzahl der Spieler. Deshalb wurden diese Spiele als Ergänzungsspiele bezeichnet. Gleichzeitig wurde kritisiert, dass es im realen Leben kaum möglich ist, zwei Spiele entweder komplett isoliert voneinander oder zusammen zu spielen, so dass sich die Summe des zusammengelegten Spiels aus den Summen der Ergänzungsspiele ergibt.

Im Fall eines Teilspiels[101] hingegen entsteht durch den Austritt eines Spielers oder den Beitritt eines neuen Spielers auch eine Wertfunktion mit veränderter Spielerzahl und neuem Wert der großen Koalition. Zur Erläuterung wird die Situation in Beispiel 4.5 betrachtet.

[96] Thomson (1983a: 321); Thomson (1983b: 214).

[97] Vgl. Sönmez (1994: 4); Getán/Montes (2010: 495).

[98] Vgl. Def. 4.7 auf S. 476.

[99] Wenn keine der Eigenschaften erfüllt ist, stellt sich die Frage nach der ökonomischen Sinnhaftigkeit der Erweiterung.

[100] Vgl. Anforderung 4.4.6 auf S. 484.

[101] Vgl. Def. 4.7 auf S. 476.

Beispiel 4.5:

Ein 4-Personen-Spiel $\Gamma(N,v)$ wird durch den Austritt des Spielers D auf ein 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$ reduziert (vgl. Tabelle 4.3).

Tab. 4.3: (Bei-)Spiel für die Populationsmonotonie. Quelle: Eigene Darstellung.

Ausgangssituation des 4-Personen-Spiels $\Gamma(N,v)$

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	0	{B,C}	1	{A,B,D}	3
{A}	0	{A,B}	2	{B,D}	1	{A,C,D}	3
{B}	0	{A,C}	2	{C,D}	1	{B,C,D}	3
{C}	0	{A,D}	0	{A,B,C}	4	{A,B,C,D}	6

Reduziertes 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$

T	w(T)	T	w(T)	T	w(T)		
∅	0			{B,C}	1		
{A}	0	{A,B}	2				
{B}	0	{A,C}	2				
{C}	0			{A,B,C}	4		

Zur besseren Unterscheidung werden die Teilkoalitionen von $\Gamma(N,v)$ mit $S \subseteq N$ und die Teilkoalitionen von $\Gamma(N',w)$ mit $T \subseteq N'$ bezeichnet. Beide Spiele sind konvex. Eine populationsmonotone Lösung stellt sicher, dass die Anteile der Spieler A,B und C in dem reduzierten 3-Personen-Spiel nicht größer sind als in dem ursprünglichen 4-Personen-Spiel. Keiner der Spieler A,B und C soll demzufolge einen Anreiz haben, den Spieler D aus dem Spiel zu verdrängen. Das Beispiel lässt sich auch in der umgekehrten Richtung wie folgt interpretieren: ausgehend von einem 3-Personen-Spiel darf keiner der Spieler A,B und C einen Anreiz haben, den Beitritt eines neuen Spielers D zu verhindern. Dies ist dann der Fall, wenn die Anteile der Spieler A,B und C durch den Beitritt nicht sinken.

Dieses Beispiel wird bei der Analyse der unterschiedlichen Lösungskonzepte wieder aufgegriffen.

Nachdem diese Anforderungen[102] vorgestellt wurden, können die Lösungskonzepte eingeführt werden.

[102] Eine weitere Anforderung wird noch vorgestellt. Vgl. Anforderung 4.5.1 auf S. 496.

4.5 Vorstellung und Analyse ausgewählter Lösungskonzepte

4.5.1 Kern

4.5.1.1 Beschreibung und Definition

Ein wesentliches Lösungskonzept für kooperative Spiele ist der Kern.[103] Grundgedanke ist die Identifikation von Auszahlungen, die keinen Anreiz bieten, die Koalition zu verlassen. Das ist der Fall, wenn keine andere Zuteilung existiert, die einem Koalitionär eine höhere Auszahlung bietet. Dies wird als Dominanz bezeichnet.

Definition 4.13: *Die Zuteilung x dominiert die Zuteilung y bezüglich der Koalition S, wenn es eine nicht-leere Koalition gibt, für die gilt:*[104]

a) $x_i \geq y_i \; \forall \; i \in S$ *und für mindestens ein* $i \in S$ *gilt:* $x_i > y_i$

sowie

b) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Die Menge der Imputationen, die nicht dominiert werden, wird als Kern eines Spiels $C(v)$ bezeichnet. Diese Imputationen werden durch keine anderen Auszahlungsvektoren dominiert.

Definition 4.14: *Der Kern des Spiels $\Gamma(N,v)$ wird definiert durch:*

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) | \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \; \forall \; S \subseteq N \right\}.$$

Der Kern besteht aus Auszahlungsvektoren, die:

- individuell rational,
- kollektiv rational und

[103] Vgl. Gillies (1959). Ein alternativer Lösungsansatz besteht in dem Konzept stabiler Mengen, das durch von Neumann und Morgenstern entwickelt wurde. Da die Umsetzbarkeit dieses Konzepts jedoch mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist, wird es hier nicht vorgestellt. Stattdessen wird auf die Literatur verwiesen. Vgl. Wiese (2005: 177–183); Holler/Illing/Napel (2019: 287–289).

[104] Diese Form der Dominanz wird als schwache Dominanz bezeichnet. Gilt die Beziehung $x_i > y_i \; \forall \; i \in S$, liegt strikte Dominanz vor. Für kooperative Spiele mit transferierbarem Nutzen ist die Unterscheidung in strikte und schwache Dominanz jedoch nicht relevant, da der Vorteil eines Spielers umverteilt werden kann. Vgl. Holler/Illing/Napel (2019: 283–284).

- durch keine – nicht-große – Koalition blockierbar sind.

Ausgehend von den bisherigen Darstellungen wird im Folgenden der Kern für das Eingangsbeispiel 4.1 von S. 479 ermittelt.

Fortführung des Beispiels 4.1:

Die Bedingungen des Kerns lauten:

$x_A,\ x_B,\ x_C$	$\geq$	200	*Individuelle Rationalität (Anford. 4.4.2)*
$x_A + x_B + x_C$	$=$	1.200	*Effizienz bzw. Pareto-Optimalität (Anford. 4.4.3)*
$x_A + x_B$	$\geq$	700	*Nicht-Blockierbarkeit (Anford. an den Kern)*
$x_A + x_C$	$\geq$	500	
$x_B + x_C$	$\geq$	500	

Zusammenfassung der Bedingungen der Nicht-Blockierbarkeit:

$2 \cdot (x_A + x_B + x_C)$	$\geq$	1.700
$x_A + x_B + x_C$	$\geq$	850

Die Menge von Auszahlungen, die diesem System von Ungleichungen entspricht, stellt den Kern dar. Aus der Abbildung 4.7 wird ersichtlich, dass das Konzept des Kerns lediglich eine Menge an möglichen Vektoren liefert, weshalb das Konzept auch als „Mengenansatz" bezeichnet wird.

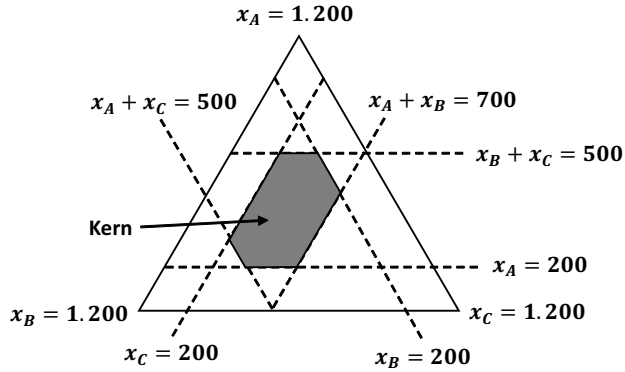


Abb. 4.7: Grafische Darstellung des Kerns für Bspl. 4.1. Quelle: Eigene Darstellung.

4.5.1.2 Eigenschaften

Der Kern eines Spiels gibt eine Menge an Auszahlungen an, liefert jedoch keinen exakten Aufteilungsvorschlag. Diese Menge kann:

- sehr groß, aber auch
- leer sein.

Der Lösungsraum für das Verteilungsproblem wird mit dem Kern auf diejenigen Zuteilungen beschränkt, die fair und deshalb langfristig stabil sind. Das bedeutet, lediglich Spiele mit einem nicht-leeren Kern verfügen über eine stabile Lösungsmenge und können einen Anreiz zur Kooperation bieten. Deshalb wäre es wünschenswert, diejenigen Spiele zu identifizieren, die über einen nicht-leeren Kern verfügen. Um diese Spiele zu identifizieren, wird die folgende Argumentation verwendet:[105]

- Die große Koalition muss einen Nutzen in der Höhe erwirtschaften, so dass alle Spieler einen Anreiz haben, sich in der großen und nicht in einer anderen Koalition zu engagieren. Wenn dies der Fall ist, so ist das Spiel **balanciert**.
- Um dies zu überprüfen muss sichergestellt sein, dass jeder Spieler seine gesamten Ressourcen in diesem Spiel investiert. Dies wird durch das Konstrukt der **balancierten Koalitionsfamilie** sichergestellt.

Die Vorgehensweise ist folgende: Zuerst wird das Hilfswerkzeug der balancierten Koalitionsfamilie konstruiert. Mit diesem Werkzeug kann im Anschluss das Spiel auf Balanciertheit untersucht werden.

1. **Konstruktion einer balancierten Koalitionsfamilie:**

   Jeder Spieler $i \in N$ verfügt über bestimmte Ressourcen, z. B. personelle bzw. finanzielle Ressourcen oder Arbeitszeit. Diese Ressourcen kann er für die Erwirtschaftung des Koalitionsergebnisses einsetzen. Nun sind jedoch viele Koalitionen denkbar, in denen der Spieler i mitarbeiten kann. Wenn dieser Spieler nicht sämtliche ihm zur Verfügung stehende Ressourcen einsetzt, kann geschlussfolgert werden, dass ihm diese ungenutzten Ressourcen keinen zusätzlichen Nutzen stiften. Als rationaler Akteur würde er diese sonst einsetzen, um seinen Nutzen zu vergrößern. Offensichtlich ist es für alle Akteure nur dann ökonomisch sinnvoll, sich an einer Koalition zu beteiligen, wenn jeder Akteur seine Ressourcen voll in die Koalition einbringt. Zur Beschreibung der Zugehörigkeit eines Spielers i zu einer Koalition S wird der Zugehörigkeitsvektor z_S eingeführt. Dabei handelt es sich um einen (0,1)-Vektor mit $z_S = (z_S(1), z_S(2), \ldots . z_S(n))$.[106]

   Definition 4.15: *Für $S \subseteq N$ ist der charakteristische Zugehörigkeitsvektor $z_S(i)$ von S definiert durch:*

$$z_S(i) = \begin{cases} 1 & : \text{für } i \in S, \\ 0 & : \text{für } i \in N \backslash S. \end{cases}$$

   Der Umstand, dass ein Spieler seine gesamten Ressourcen in die möglichen Koalitionen einbringt, wird mit dem Begriff der **Balanciertheit**

[105] Vgl. Wiese (2005: 161–162); Karagök (2006: 37).

[106] Vgl. Driessen (1988: 47); Karagök (2006: 36).

bzw. **Ausgewogenheit** beschrieben (vgl. Eigenschaft 4.5.1). Im Folgenden wird eine Menge von nicht-leeren Koalitionen als Koalitionsfamilie $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} = \{S_1,S_2,...,S_m\}$ bezeichnet. Weiterhin wird der Gewichtungsfaktor α_j mit $j = 1,...,m$ eingeführt, der beschreibt, welchen Anteil die Koalition S_j an der Gesamtzahl der Koalitionen aufweist, an denen der Spieler i beteiligt ist.[107]

Eigenschaft 4.5.1: *Eine Koalitionsfamilie $\mathfrak{B} \subseteq 2^N \backslash \varnothing$ heißt balanciert, wenn es für jeden Spieler $i \in N$ reellwertige Koeffizienten $0 \leq \alpha_j \leq 1$ gibt, so dass gilt:* $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j z_{S_j}(i) = 1 \ \forall \ S_j \in \mathfrak{B}$.

Mit dem Produkt $\alpha_j z_{S_j}(i)$ wird das Gewicht der Koalition S_j aus Sicht des Spielers i beschrieben, an der er beteiligt ist. Die balancierte Koalitionsfamilie ist lediglich ein Hilfsmittel zur Überprüfung des Spiels.

2. Überprüfung des Spiels auf Balanciertheit:

Mit dem Konzept der balancierten Koalitionsfamilie kann der Begriff des balancierten Spiels definiert werden (vgl. Eigenschaft 4.5.2).[108]

Eigenschaft 4.5.2: *Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ heißt balanciert, wenn für jede balancierte Koalitionsfamilie $\mathfrak{B} \subseteq 2^N \backslash \varnothing$ gilt:*

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}} \alpha_S v(S) \leq v(N), \text{ wobei } \sum_{S \in \mathfrak{B}: i \in S} \alpha_S = 1 \text{ für alle } i \in N.$$

Das bedeutet, egal in welchen nicht-großen Teilkoalitionen sich die Spieler zusammenschließen, sie werden in keiner Konstellation mehr erwirtschaften, als in der großen Koalition. Alternativ und gleichbedeutend zur obigen Darstellung kann formuliert werden, dass das Spiel balanciert ist, wenn gilt: $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v(S_j) \leq v(N)$.

Zur Erläuterung wird Beispiel 4.1 von S. 479 herangezogen.

Fortführung des Beispiels 4.1:

Es wird die Koalitionsfunktion des Ausgangsspiels in Tabelle 4.1 herangezogen und die Koalitionsfamilie $\mathfrak{B} = \{\{B\},\{C\},\{A,B\},\{A,C\}\}$ betrachtet. Als Gewichtungsvektor wird $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ gewählt und die Koalitionsfamilie wird als erstes auf Balanciertheit untersucht. Der Zugehörigkeitsvektor für den Spieler A ergibt sich somit durch $z_S(A) = (0,0,1,1)$. Für die übrigen Spieler resultieren $z_S(B) = (1,0,1,0)$ sowie $z_S(C) = (0,1,0,1)$. Damit ergeben sich die folgenden Zwischenresultate:

---

[107] Vgl. Karagök (2006: 37); Jain/Mahdian (2007: 388); Peleg/Sudhölter (2007: 28).

[108] Vgl. Shapley (1967: 456); Karagök (2006: 40); Peleg/Sudhölter (2007: 28–29).

- Spieler A: $\sum_{j=1}^{4} \alpha_j z_{S_j}(A) = \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 1 = 1.$
- Spieler B: $\sum_{j=1}^{4} \alpha_j z_{S_j}(B) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 0 = 1.$
- Spieler C: $\sum_{j=1}^{4} \alpha_j z_{S_j}(C) = \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 = 1.$

Die betrachtete Koalitionsfamilie ist demzufolge balanciert. Die Überprüfung des zugrunde liegenden Spiels auf Balanciertheit mit dieser einen balancierten Koalitionsfamilie ergibt folgende Werte:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{4} \alpha_j v(S_j) &= \alpha_1 \cdot v(\{B\}) + \alpha_2 \cdot v(\{C\}) + \alpha_3 \cdot v(\{A,B\}) + \alpha_4 \cdot v(\{A,C\}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot 200 + \frac{3}{5} \cdot 200 + \frac{3}{5} \cdot 700 + \frac{2}{5} \cdot 500 \\ &= 820 < v(N) = 1.200.\end{aligned}$$

Offenbar ist das Spiel balanciert. Diese Feststellung ist jedoch nur vorläufig, da lediglich eine einzige balancierte Koalitionsfamilie untersucht wurde. Entsprechend der Eigenschaft 4.5.2 muss ***jede balancierte*** *Koalitionsfamilie untersucht werden.*

Es konnte schon frühzeitig gezeigt werden, dass die Eigenschaft der Balanciertheit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines nicht-leeren Kerns ist.[109] Es gilt:[110]

Eigenschaft 4.5.3: *Die Balanciertheit eines Spiels ist sowohl eine* ***notwendige*** *als auch eine* ***hinreichende Bedingung*** *für die Existenz eines nicht-leeren Kerns.*

Im weiteren Verlauf wird mit Γ_B^N die Klasse der balancierten Spiele mit der Spielermenge N bezeichnet. Wie lässt sich die Balanciertheit inhaltlich erläutern? Das Spiel ist balanciert, wenn der Kern nicht leer ist, wenn also keine Zuteilung einen Anreiz bietet, die große Koalition zu verlassen. Dies wird geprüft, indem sämtliche - nicht-große - Teilkoalitionen daraufhin untersucht werden, ob deren Ergebnis besser ist, als das Ergebnis der großen Koalition. Wenn ein, einige oder alle Spieler $i \in N$ 100 % ihrer Ressourcen auf irgendwelche, nicht-großen, denkbaren Teilkoalitionen aufteilen (das besagt die Idee der balancierten Koalitionsfamilie aus Eigenschaft 4.5.1) und die Summe der

[109] Diese Aussage wird auch als Bondareva-Shapley-Theorem (in schwacher Form) bezeichnet, da es auf die Arbeiten von Olga Bondareva (1937–1991) und Lloyd S. Shapley (1923–2016) zurückgeht. Vgl. Bondareva (1963); Shapley (1967).

[110] Vgl. Peleg/Sudhölter (2007: 29); Maschler/Solan/Zamir (2020: 744–750).

Anteile aus diesen Aktivitäten den Wert der großen Koalition nicht übersteigt (das drückt Eigenschaft 4.5.2 aus), ist das Spiel balanciert. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass die große Koalition für sämtliche Spieler keinen geringeren Anreiz bietet, als eine der möglichen Teilkoalitionen.

Später konnte bewiesen werden, dass auch der Kern konvexer Spiele ebenfalls niemals leer ist.[111] Jedoch ist die Konvexität[112] nur eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines nicht-leeren Kerns (vgl. Merksatz 4.2).[113]

Merksatz 4.2: *Konvexität ist eine* ***hinreichende*** *- jedoch* ***keine notwendige*** *- Bedingung für die Existenz eines nicht-leeren Kerns.*

Demzufolge existieren auch Spiele, die einen nicht-leeren Kern haben, jedoch trotzdem nicht konvex sind. Die konvexen Spiele sind demzufolge eine Teilmenge der balancierten Spiele. Die Relation dieser Eigenschaften kann auch wie folgt abgebildet werden:

$$\begin{array}{lcl} \text{Balanciertheit} & \Leftrightarrow & \text{Nicht-leerer Kern} \\ \text{Konvexität} & \Rightarrow & \text{Nicht-leerer Kern} \end{array}$$

Es ist eine wünschenswerte Eigenschaft eines Lösungskonzepts, dass es - immer dann, wenn der Kern nicht-leer ist - eine Lösung erzeugt, die im Kern liegt. Diese Anforderung ist die letzte fehlende Eigenschaft und wird als Kernselektion („core selection“) bezeichnet.[114]

Anforderung 4.5.1: *Eine Einzelwertlösung f erfüllt die Eigenschaft der Kernselektion, wenn $f(v) \in C(v)$ für alle $v \in \Gamma_B^N$.*

Damit soll sichergestellt werden, dass eine Lösung „automatisch“ im Kern liegt, wenn dieser nicht leer ist. So kann die Überprüfung - ob die gefundene Lösung Bestandteil des nicht-leeren Kerns ist - entfallen. Lösungen mit dieser Eigenschaft werden auch als **Kernlösungen** bezeichnet.

Hier ist es wichtig, auf den Zusammenhang von „Kernselektion“ und zweier Monotoniearten hinzuweisen. Die Aggregatsmonotonie[115] ist für alle Klassen kooperativer Spiele problemlos mit der Kernselektion zu vereinbaren. Für die Koalitionsmonotonie[116] hingegen ist ein fundamentaler Gegensatz hervorzuheben. Es existiert ein Zielkonflikt zwischen „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ für balancierte Spiele (vgl. Eigenschaft 4.5.4).

[111] Vgl. Shapley (1971: 21).
[112] Vgl. Eigenschaft 4.3.5 auf S. 475.
[113] Vgl. Wißler (1997: 43).
[114] Vgl. Calleja/Rafels/Tijs (2012: 901).
[115] Vgl. Anforderung 4.4.7 auf S. 486.
[116] Vgl. Anforderung 4.4.8 auf S. 487.

Eigenschaft 4.5.4: *Für Spiele mit $v \in \Gamma_B^{|N|\geq 4}$ gibt es kein Lösungskonzept, das die Anforderungen „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ erfüllt.*

Somit ist es für balancierte Spiele mit mindestens 4 Spielern nicht möglich, ein Lösungskonzept zu identifizieren, dass beide Anforderungen erfüllt.[117] Werden jedoch **konvexe Spiele** betrachtet die - wie bereits dargestellt wurde - eine Teilmenge der balancierten Spiele sind, existieren Lösungskonzepte, die beide Anforderungen vereinen. Im weiteren Verlauf werden zwei davon - die Shapley-Lösung[118] und die Dutta-Ray-Lösung[119] - vorgestellt.

Um eine Aussage zur Balanciertheit des Spiels insgesamt treffen zu können, muss diese Überprüfung für **alle** balancierten Koalitionsfamilien durchgeführt werden. Dabei ist es erforderlich, sämtliche mögliche Gewichtungsvektoren zu überprüfen. Zur Veranschaulichung sei das Beispiel 4.6 betrachtet.[120]

Beispiel 4.6:

Ein 3-Spieler-Spiel ist durch die Funktion in Tab. 4.4 charakterisiert.

Tab. 4.4: (Bei-)Spiel für unterschiedliche Gewichtungsfaktoren. Quelle: Eigene Darstellung.

S / Funktion	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
v(S)	0	2	0	0	8	8	4	8

Wird die Familie $\mathfrak{B} = \{\{A\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$ mit dem Vektor $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ gewichtet, so resultiert:

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j v(S_j) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 8 = v(N).$$

Dies könnte auf ein balanciertes Spiel hinweisen. Wird jedoch dieselbe Koalitionsfamilie mit dem Vektor $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$ gewichtet, so ergibt sich:

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j v(S_j) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{5}{8} \cdot 4 = 9 \not\leq v(N).$$

Das Spiel ist demzufolge nicht balanciert.

---

[117] Vgl. Young (1994b: 1211); Housman/Clark (1998: 612); Hougaard (2009: 85). *„There is no escape from this fact: if you want a unique outcome in the core you must face some undesirable nonmonotonicity consequences.“* Maschler (1992: 614).

[118] Vgl. Abschn. 4.5.2 auf S. 500.

[119] Vgl. Abschn. 4.5.5 auf S. 519.

[120] Vgl. Lohman/Borm/Herings (2012: 129).

Beispiel 4.6 macht deutlich, dass für ein und dieselbe Koalitionsfamilie mehrere Gewichtungsvektoren möglich sind. Dies erschwert die Prüfung eines Spiels auf Balanciertheit ebenso, wie die stark ansteigende Anzahl an prinzipiell möglichen Koalitionsfamilien bei steigender Spielermenge. So existieren für ein 3-Personen-Spiel 42 mögliche Koalitionsfamilien und bei einem 4-Personen-Spiel existieren schon 18.878 Familien.[121] Eine Reduktion dieser Menge ist realisierbar durch die Definition einer weiteren Klasse von Spielen - den **minimal balancierten Spielen**.[122]

Eigenschaft 4.5.5: *Wenn in einer balancierten Koalitionsfamilie* $\mathfrak{B}$ *keine echte Teilmenge balanciert ist, so ist sie eine minimal balancierte Koalitionsfamilie* $\mathfrak{B}_{min}$.

Jede balancierte Familie besteht aus minimal balancierten Familien.[123] Bei den minimal balancierten Familien handelt es sich um Familien mit nur einem **einzigen möglichen Gewichtungsvektor**.[124]

Eigenschaft 4.5.6: *Ein Spiel* $\Gamma(N,v)$ *heißt minimal balanciert, wenn für jede minimal balancierte Koalitionsfamilie* $\mathfrak{B}_{min} \subseteq 2^N \setminus \varnothing$ *gilt:*

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}_{min}} \alpha_S v(S) \leq v(N), \text{ wobei } \sum_{S \in \mathfrak{B}_{min}: i \in S} \alpha_S = 1 \text{ für alle } i \in N.$$

Auf Basis dieser Eigenschaft wird das Bondareva-Shapley-Theorem in starker Form formuliert (vgl. Eigenschaft 4.5.7).[125]

Eigenschaft 4.5.7: *Die Minimal-Balanciertheit eines Spiels ist sowohl eine* ***notwendige*** *als auch eine* ***hinreichende Bedingung*** *für die Existenz eines nicht-leeren Kerns.*

In jedem 3-Personen-Spiel existieren folgende minimal balancierte Familien:

$\mathfrak{B}_{min;1} = \{\{A\},\{B\},\{C\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;2} = \{\{A,B\},\{C\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;3} = \{\{A,C\},\{B\}\}$,

$\mathfrak{B}_{min;4} = \{\{B,C\},\{A\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;5} = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$.

Dabei beträgt der Gewichtungsvektor für die erste Familie (1,1,1), für die Zwei-Spieler-Koalitionsfamilien jeweils (1,1) und für die fünfte Familie $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Für ein 4-Personen-Spiel existieren 41 mögliche minimal balancierte Familien, was im Vergleich zur Gesamtzahl an balancierten Familien sehr gering ist.[126] Zur Erläuterung wird Beispiel 4.1 von S. 479 herangezogen.

[121] Vgl. Lohman/Borm/Herings (2012: 130).
[122] Vgl. Shapley (1967: 453–454); Karagök (2006: 39); Gilles (2010: 38–39).
[123] Vgl. Shapley (1967: 457); Karagök (2006: 43); Peleg/Sudhölter (2007: 30–31).
[124] Vgl. Peleg (1965: 155–156).
[125] Vgl. Karagök (2006: 43); Peleg/Sudhölter (2007: 30–31).
[126] Vgl. Shapley (1967: 459); Lohman/Borm/Herings (2012: 130).

Fortführung des Beispiels 4.1:

Für das Eingangsbeispiel wird die Überprüfung auf minimale Balanciertheit durchgeführt. Es resultieren die folgenden Werte:

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}_{min;1}} \alpha_S \cdot v(S) = 1 \cdot 200 + 1 \cdot 200 + 1 \cdot 200 \qquad = 600 < 1.200 = v(N)$$

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}_{min;2}} \alpha_S \cdot v(S) = 1 \cdot 700 + 1 \cdot 200 \qquad = 900 < 1.200 = v(N)$$

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}_{min;3}} \alpha_S \cdot v(S) = 1 \cdot 500 + 1 \cdot 200 \qquad = 700 < 1.200 = v(N)$$

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}_{min;4}} \alpha_S \cdot v(S) = 1 \cdot 500 + 1 \cdot 200 \qquad = 700 < 1.200 = v(N)$$

$$\sum_{S \in \mathfrak{B}_{min;5}} \alpha_S \cdot v(S) = \frac{1}{2} \cdot 700 + \frac{1}{2} \cdot 500 + \frac{1}{2} \cdot 500 \qquad = 850 < 1.200 = v(N)$$

Das Spiel ist demzufolge minimal balanciert und besitzt einen nicht-leeren Kern, der schon in Abbildung 4.7 auf S. 492 dargestellt wurde.

Der Kern wurde als Lösungskonzept auch im ökonomischen Kontext schon frühzeitig eingesetzt.[127] Bei der Analyse der Prozesskostenrechnung konnte gezeigt werden, dass die damit ermittelten Zuteilungen - d. h. die auf die Produkte verrechneten Gemeinkosten - immer im nicht-leeren Kern liegen.[128]

Der Kern liefert als mengenwertiges Lösungskonzept keine eindeutige Lösung, sondern lediglich - wenn vorhanden - eine nicht-leere Lösungsmenge. Somit ist die Forderung nach einem Einzelwert als Lösung[129] nicht erfüllt, was ein wesentlicher Nachteil ist.

In den letzten Jahrzehnten ist eine Reihe von Lösungskonzepten entstanden, die zu eindeutigen Ergebnissen führen. In den folgenden Abschnitten werden vier dieser Lösungskonzepte vorgestellt.

[127] Vgl. Sääksjärvi (1986: 248–249); Hof (1993: 31–33).
[128] Vgl. Charles/Hansen (2008: 292).
[129] Vgl. Anforderung 4.4.1 auf S. 481.

4.5.2 Shapley-Lösung

4.5.2.1 Beschreibung und Definition

Dieses Lösungskonzept ist das älteste der hier vorgestellten Konzepte, wurde 1953 von Lloyd S. Shapley entwickelt,[130] und in der Folgezeit nach ihm benannt. Der Grundgedanke ist: Jeder Spieler erhält einen Anteil, der von seinen Beiträgen zu den prinzipiell möglichen – also allen denkbaren – Koalitionen abhängt. Der Beitrag des Spielers besteht in der Wertsteigerung, die er durch die Teilnahme an der Koalition bewirkt. Dieser Wert wird als **marginaler Beitrag** bezeichnet.[131]

Zur Ermittlung des Anteils werden **alle möglichen Reihenfolgen**, mittels derer die Koalitionen unter Teilnahme des Spielers i gebildet werden, festgestellt und für jede dieser Reihenfolgen wird der marginale Beitrag des Spielers i ermittelt. Es existieren $n!$ Reihenfolgen, in denen die einzelnen Spieler der Koalition beitreten können.

Weiterhin wird angenommen, dass alle Reihenfolgen **gleich wahrscheinlich** sind. Die so gebildete Summe der **gewichteten marginalen Beiträge** des Spielers $\phi_i(v)$ wird als Shapley-Wert des Spielers bezeichnet[132] und entsprechend Definition 4.16 ermittelt.

Definition 4.16: *Für ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist der* Shapley-*Wert $\phi_i(v)$ für alle $i \in N$ wie folgt bestimmt:*

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\ (n-|S|-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Bei Verwendung derjenigen Koalitionen S, denen Spieler i angehört, lässt sich der Shapley-Wert alternativ zur Definition 4.16 wie folgt formulieren:

$$\phi_i(v) = \sum_{i \in S; S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!\ (n-|S|)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Es werden nun beispielhaft die Wahrscheinlichkeiten für den Beitritt eines Spielers in einem 3-Personen-Spiel nach Definition 4.16 demonstriert:[133]

---

[130] Vgl. Shapley (1953). Lloyd S. Shapley (1923–2016) erhielt im Jahr 2012 zusammen mit Alvin E. Roth (geb. 1951) den „Wirtschaftsnobelpreis“.

[131] Vgl. Def. 4.12 auf S. 488.

[132] Vgl. Shapley (1953: 311); Bitz (1981: 275); Schichtel (1981: 18); Fiestras-Janeiro/García-Jurado/Mosquera (2011: 5).

[133] Dabei gilt die Konvention, dass $0! = 1$.

- Eintritt an erster Stelle: $\frac{0!(3-0-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$
- Eintritt an zweiter Stelle: $\frac{1!(3-1-1)!}{3!} = \frac{1}{6}$
- Eintritt an dritter Stelle: $\frac{2!(3-2-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$

Es muss darauf hingewiesen werden, dass für einen Spieler zwei Möglichkeiten bestehen, an zweiter Stelle einzutreten. Dies führt in der Summe zu der Gesamtwahrscheinlichkeit von Eins. Logik und Berechnung der SHAPLEY-Lösung werden nun am Eingangsbeispiel 4.1 von S. 479 erläutert.

Fortführung des Beispiels 4.1:

Die Wahrscheinlichkeiten für den Beitritt eines Spielers nach Definition 4.16 folgen aus:

- *Eintritt an erster Stelle:* $\frac{0!(3-0-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$
- *Eintritt an zweiter Stelle:* $\frac{1!(3-1-1)!}{3!} = \frac{1}{6}$
- *Eintritt an dritter Stelle:* $\frac{2!(3-2-1)!}{3!} = \frac{1}{3}$

Für jeden Spieler bestehen zwei Möglichkeiten, an zweiter Stelle einzutreten. Der SHAPLEY-*Wert für das Beispiel in Tabelle 4.1 für den Spieler A resultiert aus Definition 4.16 mit:*

$$\phi_A(v) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 200}_{an\,1.\,Stelle} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot 500}_{an\,2.\,Stelle\,zu\,B} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot 300}_{an\,2.\,Stelle\,zu\,C} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 700}_{an\,3.\,Stelle}$$

$$\phi_A(v) = \frac{1300}{3}$$

Der SHAPLEY-*Wert von B ist in diesem Spiel identisch mit dem Anteil von A:*

$$\phi_B(v) = \frac{1300}{3}$$

Der SHAPLEY-*Wert für den Spieler C resultiert mit:*

$$\phi_C(v) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 200}_{an\,1.\,Stelle} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot 300}_{an\,2.\,Stelle\,zu\,A} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot 300}_{an\,2.\,Stelle\,zu\,B} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 500}_{an\,3.\,Stelle}$$

$$\phi_C(v) = \frac{1000}{3}$$

Die Gesamtheit aller SHAPLEY-*Werte ergibt die* SHAPLEY-*Lösung. Alternativ lässt sich die* SHAPLEY-*Lösung auch wie folgt ermitteln (vgl. Tab. 4.5).*

Tab. 4.5: Tabellarische Ermittlung der SHAPLEY-Lösung. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis der Tabelle 4.1.

	$\mathbf{m_i v(S) = v(S) - v(S \setminus \{i\})}$		
Permutationen	$\mathbf{m_A v(S)}$	$\mathbf{m_B v(S)}$	$\mathbf{m_C v(S)}$
A,B,C	200	500	500
A,C,B	200	700	300
B,A,C	500	200	500
B,C,A	700	200	300
C,A,B	300	700	200
C,B,A	700	300	200
Summe	2.600	2.600	2.000
SHAPLEY-Wert	$\frac{2.600}{6} = \frac{1.300}{3}$	$\frac{2.600}{6} = \frac{1.300}{3}$	$\frac{2.000}{6} = \frac{1.000}{3}$

Die Lage der SHAPLEY*-Lösung für das Beispiel ist in der Abbildung 4.8 zu sehen. Die Darstellung zeigt in Verbindung mit der Abbildung 4.7, dass die* SHAPLEY*-Lösung im Kern liegt.*

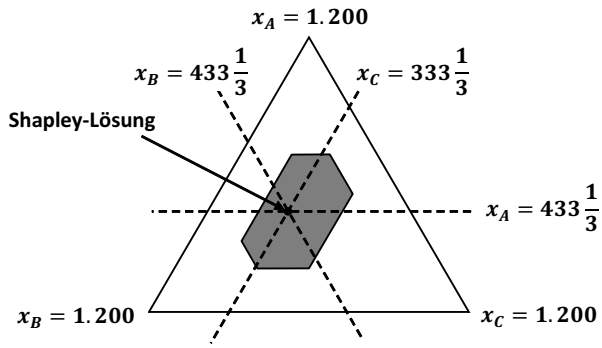


Abb. 4.8: Lage der SHAPLEY-Lösung für Bspl. 4.1 auf S. 479. Quelle: Eigene Darstellung.

„Der SHAPLEY*-Wert kann auch als Richtschnur für ‚schiedsgerichtliche Entscheidungen' benützt werden."*[134] Es ist das bekannteste Lösungskonzept. Die verfügbare Literatur ist äußerst umfangreich.[135]

[134] Reichardt (1969: 286), Hervorhebungen im Original.

[135] Beispielhaft seien hier angeführt Littlechild/Owen (1973); Faulhaber (1975); Loehman/Whinston (1976); Suzuki/Nakayama (1976); Hamlen/Hamlen/Tschirhart (1980); Tijs/Driessen (1986); Rideout/Wagner (1988); Roth (1988), Moulin (1992). Überblicksbeiträge zu ökonomischen Anwendungen enthalten Winter (2002); Fischer (2008: 170–174); Serrano (2013); Guajardo/Rönnqvist (2016: 380). Zu einer umfassenden Diskussion vgl. Zelewski (2009: 43–53).

4.5.2.2 Eigenschaften

Die SHAPLEY-Lösung erfüllt für **alle kooperativen Spiele** die Forderung nach:[136]

- Existenz und Eindeutigkeit,
- Effizienz,
- Anonymität,
- Dummy-Spieler-Eigenschaft,
- Additivität.

Sie ist das einzige Lösungskonzept, das alle diese Eigenschaften erfüllt.[137] Für jedes superadditive Spiel ist die SHAPLEY-Lösung individuell rational.[138] Die SHAPLEY-Lösung ist zwar immer existent und eindeutig definiert, ist jedoch nicht notwendigerweise Bestandteil des Kerns. Sie erfüllt die Anforderung der Kernselektion nicht für alle Spielklassen und ist deshalb **keine Kernlösung**. Die SHAPLEY-Lösung **konvexer Spiele** befindet sich **immer im nicht-leeren Kern**.[139] Im Folgenden wird anhand der Beispiele die Erfüllung der übrigen Eigenschaften untersucht.

Überprüfung der übrigen Eigenschaften:

*Zu Überprüfung der **Additivität** wird hier das Beispiel 4.2 aufgegriffen. Die in Tabelle 4.2 angegeben Spiele sind konvex. Demzufolge ist der Kern nicht-leer und die* SHAPLEY-*Lösung ist eine Kernlösung. Aus der Definition 4.16 ergeben sich die* SHAPLEY-*Werte in Tabelle 4.6.*

Tab. 4.6: SHAPLEY-Werte für das Additivitätsbeispiel. Quelle: Eigene Darstellung.

Shapley-Anteile für Spieler / Funktionen	A	B	C
$\phi_i(\mathbf{v})$	1/3	1/3	1/3
$\phi_i(\mathbf{w})$	1/2	1/2	0
$\phi_i(\mathbf{u})$	5/6	5/6	1/3

Die SHAPLEY-*Lösung ist demzufolge additiv. Mit Blick auf den Koalitionär C stellt sich jedoch die Frage, welchen ökonomischen Beitrag dieser Spieler leistet. Der Wert sämtlicher nicht-großer Koalitionen, an denen dieser Spieler beteiligt ist, ist Null. Aus Sicht dieses Spielers ist das Spiel $\Gamma(N,u)$ erstrebenswert. Zur Lösung des Spiels $\Gamma(N,u)$ würde sich – neben der* SHAPLEY-*Lösung – die Verhandlung zwischen Spieler C einerseits und Koalition A,B andererseits um den Wert $u(N)$ anbieten. Dabei würde der marginale Beitrag von C in Höhe von 1 aufzuteilen sein. Würde dem Spieler die Hälfte dieses Wertes angeboten, würde die Lösung $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$ resultieren. Im Vorgriff auf die folgenden*

[136] Vgl. Mueller (2018a: 412).
[137] Vgl. Peleg/Sudhölter (2007: 152–154).
[138] Vgl. Shapley (1953: 312).
[139] Vgl. Shapley (1971: 23).

Lösungskonzepte sei hier festgestellt, dass der Nucleolus[140] *genau die Verhandlungslösung von* $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$ *liefert. Würde der marginale Beitrag von C in Höhe von 1 jedoch gleich verteilt, resultiert die* Shapley*-Lösung.*

Eine wichtige Eigenschaft der Shapley*-Lösung ist die Erfüllung der* ***Aggregatsmonotonie****.*[141] *Dazu werden die zwei konvexen Spiele aus Beispiel 4.3 von S. 486 herangezogen:*

- *Für das Spiel* $\Gamma(N,v)$ *mit* $v(N) = 10$ *resultieren die folgenden Werte:* $\phi_A(v) = 2\frac{1}{6}$, $\phi_B(v) = \frac{5}{2}$, $\phi_C(v) = 2\frac{1}{6}$ *und* $\phi_D(v) = 3\frac{1}{6}$.
- *Für das Spiel* $\Gamma(N,w)$ *mit* $w(N) = 12$ *ergeben sich folgende Resultate:* $\phi_A(w) = 2\frac{2}{3}$, $\phi_B(w) = 3$, $\phi_C(w) = 2\frac{2}{3}$ *und* $\phi_D(w) = 3\frac{2}{3}$.

Die Aggregatsmonotonie ist demnach für dieses Beispiel erfüllt. Es kann darüber hinaus gezeigt werden, dass die Shapley*-Lösung die Aggregatsmonotonie für alle kooperativen Spiele erfüllt.*[142]

Um zu untersuchen, ob die Shapley*-Lösung die* ***Koalitionsmonotonie***[143] *erfüllt, wird nun das Beispiel 4.4 von S. 487 aufgegriffen:*

- *Die betrachteten Spiele* $\Gamma(N,v)$ *und* $\Gamma(N,w)$ *sind* ***nicht konvex****, jedoch* ***balanciert*** *und superadditiv.*
- *Für die Wertefunktion des Ursprungsspiels* $\Gamma(N,v)$ *ergeben sich die* Shapley*-Werte:* $\phi_A(v) = \phi_B(v) = \phi_C(v) = \phi_D(v) = \frac{1}{2}$.
- *Diese Werte liegen im nicht-leeren Kern des Spiels.*
- *Nun wird die* Shapley*-Lösung auf die veränderte Wertfunktion* $w(N)$ *des Spiels* $\Gamma(N,w)$ *angewendet. Es galt:* $v(\{B,C,D\}) = 1 < w(\{B,C,D\}) = 2$.
- *Das führt zu folgenden Resultaten:* $\phi_A(w) = \frac{1}{4}$, $\phi_B(w) = \phi_C(w) = \phi_D(w) = \frac{7}{12}$.
- *Alle Spieler der Koalition mit dem erhöhten Ergebnis erhalten demzufolge auch eine Erhöhung ihrer Anteile.*

Damit wird die Koalitionsmonotonie von der Shapley*-Lösung erfüllt. Diese Aussage gilt für* ***alle kooperativen Spiele****.*[144]

Jedoch muss darauf hingewiesen werden, dass die Shapley*-Lösung des Spiels* $\Gamma(N,w)$ ***nicht*** *im nicht-leeren Kern des Spiels liegt. Damit wird der erwähnte Zielkonflikt zwischen den Anforderungen „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ verdeutlicht.*[145] *Die Lösung erfüllt die Koalitionsmonotonie, liegt jedoch nicht im Kern.*

Für konvexe Spiele kann hingegen festgestellt werden, dass die Shapley*-Lösung die Eigenschaften „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ miteinander vereint.*[146]

Die Shapley*-Lösung sichert* ***Populationsmonotonie***[147] *für die Klasse der* ***konvexen Spiele****.*[148] *Dazu wird das Beispiel 4.5 von S. 490 herangezogen:*

---

[140] Vgl. Abschnitt 4.5.3 auf S. 506.

[141] Vgl. Anforderung 4.4.7 auf S. 486.

[142] Vgl. Megiddo (1974: 355).

[143] Vgl. Anforderung 4.4.8 auf S. 487.

[144] Vgl. Shubik (1962: 336); Young (1985: 69); Maschler (1992: 614).

[145] Vgl. Eigenschaft 4.5.4 auf S. 497.

[146] Vgl. Hougaard/Peleg/Østerdal (2005: 432); Arin/Katsev (2016: 1026).

[147] Vgl. Anforderung 4.4.10 auf S. 489.

[148] Vgl. Rosenthal (1990: 49–50); Sprumont (1990: 382); Hokari (2000b: 328).

- *Für das 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$ resultieren die* Shapley-*Werte mit: $\phi_A(w) = \frac{5}{3}$ und $\phi_B(w) = \phi_C(w) = \frac{7}{6}$.*
- *Die Analyse des erweiterten 4-Personen-Spiels $\Gamma(N,v)$ führt zu: $\phi_A(v) = \phi_B(v) = \phi_C(v) = \frac{5}{3}$ und $\phi_D(v) = 1$.*
- *Der Beitritt des zusätzlichen Spielers D schadet bei Verwendung der* Shapley-*Lösung keinem Spieler der bisher bestehenden Koalition.*

*Wenn jedoch **nicht-konvexe Spiele** vorliegen, ist auch die* Shapley-*Lösung nicht in der Lage, Populationsmonotonie sicherzustellen. Das zeigt das Beispiel 4.7.*

Beispiel 4.7:

Gegeben sind zwei Spiele gemäß Tabelle 4.7. Beide Spiele sind nicht konvex, jedoch sind sie superadditiv und balanciert. Für das Ursprungsspiel $\Gamma(N,v)$ resultieren die folgenden Shapley-*Werte:*

$\phi_A(v) = \frac{9}{2}$, $\phi_B(v) = \frac{35}{6}$, $\phi_C(v) = \frac{11}{2}$ *und* $\phi_D(v) = \frac{31}{6}$.

Der Austritt von Spieler D führt zu dem 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$, welches folgende Shapley-*Werte produziert:*

$\phi_A(w) = \frac{23}{6}$, $\phi_B(w) = \frac{19}{3}$ *und* $\phi_C(w) = \frac{29}{6}$.

Beide Lösungen befinden sich im nicht-leeren Kern, jedoch erhöht sich der Anteil von Spieler B durch den Austritt von D, was der Forderung der Populationsmonotonie widerspricht.

Tab. 4.7: (Bei-)Spiel für die nicht populationsmonotone Shapley-Lösung. Quelle: Eigene Darstellung.

Ausgangssituation des 4-Personen-Spiels $\Gamma(N,v)$

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	4	{B,C}	10	{A,B,D}	15
{A}	2	{A,B}	10	{B,D}	8	{A,C,D}	15
{B}	3	{A,C}	6	{C,D}	8	{B,C,D}	15
{C}	4	{A,D}	6	{A,B,C}	15	{A,B,C,D}	21

Reduziertes 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$

T	w(T)	T	w(T)	T	w(T)		
∅	0			{B,C}	10		
{A}	2	{A,B}	10				
{B}	3	{A,C}	6				
{C}	4			{A,B,C}	15		

Es stellt sich jedoch die Frage, ob im Fall nicht-konvexer Spiele prinzipiell eine populationsmonotone Zuteilung existiert.[149] Ergänzend zu den Ausführungen zur strengen Monotonie[150] wird hier noch einmal darauf hingewiesen, dass

[149] Hier kann darauf verwiesen werden, dass eine populationsmonotone Lösung für nicht konvexe Spiele existiert. Dabei handelt es sich um eine spezielle Klasse nicht konvexer, balancierter Spiele, die sog. Externalitätenspiele. Vgl. Grafe/Iñarra/Zarzuelo (1998).

[150] Vgl. Anforderung 4.4.9 auf S. 488.

die Shapley-Lösung das **einzige Lösungskonzept** ist, das diese Forderung erfüllt.[151] Gemäß dem Theorem von Young[152] ersetzt die strenge Monotonie die Dummy-Spieler-Eigenschaft und die Additivität. Damit ist die Shapley-Lösung das einzige Lösungskonzept, das die Forderung nach:[153]

- Existenz und Eindeutigkeit,
- Effizienz,
- Anonymität und
- strenger Monotonie

erfüllt.

Roth zeigte frühzeitig, dass die Shapley-Lösung eine von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion ist.[154] Die Shapley-Lösung kann als Erwartungswert eines risikoneutralen Spielers interpretiert werden.[155]

Mit Blick auf die zugrunde liegende Argumentation ist die Annahme der gleich wahrscheinlichen Bildung der Koalitionen sowie der Fakt, dass jede der prinzipiell möglichen Koalitionen berücksichtigt wird, zu kritisieren. Die diskutierten Eigenschaften der Shapley-Lösung sind an anderer Stelle zusammengefasst.[156]

4.5.3 Nucleolus

4.5.3.1 Beschreibung und Definition

Der Nucleolus wurde 1969 von David Schmeidler entwickelt. Die Argumentation des Nucleolus basiert auf folgendem Gedankenspiel: Zum Zweck der gerechten Aufteilung soll ein unabhängiger „Schlichter“ entsprechende Vorschläge unterbreiten. **Ziel** ist es, den Gewinn der großen Koalition so zu verteilen, dass **kein Spieler benachteiligt** wird. Um über das Maß der Benachteiligung der Spieler zu entscheiden, wird der sog. Koalitionsüberschuss herangezogen. Der Koalitionsüberschuss ist die Differenz zwischen dem Wert bzw. dem Nutzen den eine Koalition erwirtschaftet und dem Anteil, den sie durch den Schlichter-Vorschlag erhält (vgl. Def. 4.17).[157]

[151] Vgl. Young (1985: 70); Hokari/van Gellekom (2002: 600); Peleg/Sudhölter (2007: 157).
[152] Vgl. Young (1985: 71).
[153] Vgl. Young (1985: 70); Peleg/Sudhölter (2007: 156–158); Gilles (2010: 80–82).
[154] Vgl. Abschn. 1.5.4 auf S. 109.
[155] Vgl. Roth (1977); Roth/Verrecchia (1979).
[156] Vgl. Tab. 4.16 auf S. 528.
[157] Vgl. Schmeidler (1969: 1163).

Definition 4.17: *In einem Spiel $\Gamma(N,v)$ wird der Überschuss einer Koalition $S \subseteq N$ in Bezug auf einen Auszahlungsvektor $x \in I(v)$ definiert durch:*

$$e(S,x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Der Überschuss $e(S,x)$ stellt demnach die Differenz zwischen dem Koalitionswert und der Auszahlung an diese Koalition dar. Eine Koalition ist bezüglich eines Auszahlungsvektors x umso schlechtergestellt, je größer der Koalitionsüberschuss $e(S,x)$ ist. Deshalb wird der Koalitionsüberschuss auch als „Maß der Unzufriedenheit" der Koalition S bezüglich des Auszahlungsvektors x interpretiert.[158]

Die Vorgehensweise besteht nun darin, dass der „Schlichter" einen Auszahlungsvorschlag unterbreitet, für den im Anschluss das Maß der Unzufriedenheit aller Koalitionen ermittelt wird, ausgedrückt durch den Vektor der Koalitionsüberschüsse.[159] Im nächsten Schritt wird der „Schlichter" versuchen, diese Unzufriedenheit zu reduzieren, indem er einen neuen Vorschlag unterbreitet.

Dieses Vorgehen wird so lange fortgesetzt, bis es keinen besseren Vorschlag mehr gibt. Es wird versucht, den Vektor der Überschüsse zu minimieren. Dazu wird der Vektor der Überschüsse geordnet, beginnend mit dem höchsten Wert – also der größten Unzufriedenheit. Für den Überschuss einer Koalitionspartei S_i in Bezug auf den Auszahlungsvektor x wird formuliert: $e(S_i,x) = \theta_i(x)$.[160]

Definition 4.18: *Der Vektor der – in nicht-aufsteigender Reihenfolge – geordneten Koalitionsüberschüsse $\Theta(x)$ ist definiert durch:*

$$\Theta(x) = (\theta_1(x); \theta_2(x); \theta_3(x); ....; \theta_{2^n}(x))$$

$$mit$$

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x) \;\; wobei \;\; 1 \leq i \leq j \leq 2^n.$$

Der Vektor $\Theta(x)$ enthält demzufolge die Überschusswerte **aller** Koalitionen des Spiels. Dieser Vektor ist geordnet in nicht aufsteigender Reihenfolge. Der Überschuss der großen Koalition beträgt Null, da:

$$e(N,x) = v(N) - \sum_{i \in N} x_i = v(N) - v(N) = 0.$$

[158] Vgl. Schichtel (1981: 14).
[159] Vgl. Fischer (2008: 68).
[160] Vgl. Karagök (2006: 45).

Dasselbe gilt für die leere Koalition $\varnothing$. Ziel ist die Minimierung **aller** Koalitionsüberschüsse. Dazu schlägt der „Schlichter" mehrere Vektoren vor, welche miteinander zu vergleichen sind. Für diesen Vergleich wird das Konzept der lexikografischen Ordnung herangezogen.[161]

Definition 4.19: *Ein Vektor $\Theta(x)$ ist lexikografisch kleiner als der Vektor $\Theta(y)$, falls es eine Indexzahl m gibt, so dass gilt:*

$$a)\ \theta_i(x) = \theta_i(y)\ \forall\ 1 \leq i < m$$

sowie

$$b)\ \theta_m(x) < \theta_m(y).$$

In diesem Fall gilt: $\Theta(x) <_{Lex} \Theta(y)$. Das Schlichter-Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis es keine Auszahlung mehr gibt, die den Vektor der geordneten Überschüsse weiter minimiert. Die dann gefundene Lösung ist der Nucleolus. Der Nucleolus $nuc(v)$ eines Spiels ist die Menge aller Imputationen x, die $\Theta(x)$ lexikografisch minimieren.[162]

Definition 4.20: *Der* Nucleolus *$nuc(v)$ eines Spiels $\Gamma(N, v)$ mit $I(v) \neq \varnothing$ ist definiert mit:*

$$nuc(v) = \{x \in I(v) | \Theta(x) \leq_{Lex} \Theta(y)\ \forall y \in I(v)\}.$$

Demzufolge existiert der Nucleolus sowohl für die Klasse der wesentlichen als auch für die Klasse der superadditiven Spiele, da bei diesen Klassen die Imputationsmenge nicht leer ist.[163] Zur Veranschaulichung wird das Beispiel 4.1 von S. 479 aufgegriffen und fortgeführt.

Fortführung des Beispiels 4.1:

Es wird angenommen, der Schlichter begönne mit dem Lösungsvorschlag der Gleichverteilung. Demzufolge ist $x_1(400, 400, 400)$. Die weiteren Schritte, Zwischenergebnisse und das Endergebnis sind in der Tabelle 4.8 zu sehen.

[161] Vgl. Karagök (2006: 46).

[162] Vgl. Driessen (1988: 38); Fiestras-Janeiro/García-Jurado/Mosquera (2011: 6).

[163] Vgl. Megiddo (1974: 356); González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 233); Chakravarty/Mitra/Sarkar (2015: 33).

Tab. 4.8: Ermittlung des NUCLEOLUS für das (Bei-)Spiel 4.1 auf S. 479. Quelle: Eigene Darstellung.

S	**∅**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
$\mathbf{v(S)}$	0	200	200	200	700	500	500	1.200
$\mathbf{e(S,x)}$	0	$200-x_A$	$200-x_B$	$200-x_C$	$700-(x_A+x_B)$	$500-(x_A+x_C)$	$500-(x_B+x_C)$	0
1. Schritt: Vorschlag: $\mathbf{x_1}$(400,400,400)								
$\mathbf{e(S,x_1)=\theta(x_1)}$	0	−200	−200	−200	−100	−300	−300	0
Resultat: Vektor der geordneten Überschüsse: $\Theta(x_1)=(0,0,-100,-200,-200,-300,-300)$.								
Fazit: Koalition A,B ist am unzufriedensten.								
Schlussfolgerung: Anteil der Koalition $\{A,B\}$ im 2. Schritt erhöhen.								
2. Schritt: Vorschlag: $\mathbf{x_2}$(450,450,300)								
$\mathbf{e(S,x_2)=\theta(x_2)}$	0	−250	−250	−100	−200	−250	−250	0
Resultat: Vektor der geordneten Überschüsse: $\Theta(x_2)=(0,0,-100,-200,-250,-250,-250,-250)$.								
Vergleich der beiden Vektoren: Vektor $\Theta(x_2)$ ist lexikografisch kleiner als Vektor $\Theta(x_1)$. Es kann formuliert werden: $\Theta(x_2)<_{Lex}\Theta(x_1)$.								
Fazit: Der 2. Schritt ging in die richtige Richtung, jedoch ist jetzt Koalitionär C am unzufriedensten.								
Schlussfolgerung: Anteil des Koalitionärs $\{C\}$ im 3. Schritt erhöhen.								
3. Schritt: Vorschlag: $\mathbf{x_3}$(420,420,360)								
$\mathbf{e(S,x_3)=\theta(x_3)}$	0	−220	−220	−160	−140	−280	−280	0
Resultat: Vektor der geordneten Überschüsse: $\Theta(x_3)=(0,0,-140,-160,-220,-220,-280,-280)$.								
Vergleich der beiden Vektoren: Vektor $\Theta(x_3)$ ist lexikografisch kleiner als Vektor $\Theta(x_2)$. Es kann formuliert werden: $\Theta(x_3)<_{Lex}\Theta(x_2)$.								
Fazit: Der 3. Schritt ging in die richtige Richtung, jedoch ist jetzt Koalition A,B wieder am unzufriedensten.								
Schlussfolgerung: Anteil der Koalition $\{A,B\}$ im 4. Schritt erhöhen.								
4. Schritt: Vorschlag: $\mathbf{x_4}$(425,425,350)								
$\mathbf{e(S,x_4)=\theta(x_4)}$	0	−225	−225	−150	−150	−275	−275	0
Resultat: Vektor der geordneten Überschüsse: $\Theta(x_4)=(0,0,-150,-150,-225,-225,-275,-275)$.								
Vergleich der beiden Vektoren: Vektor $\Theta(x_4)$ ist lexikografisch kleiner als Vektor $\Theta(x_3)$. Es kann formuliert werden: $\Theta(x_4)<_{Lex}\Theta(x_3)$.								
Fazit: Der 4. Schritt stellt für dieses Beispiel den letzten Schritt dar. Eine weitere Verbesserung im Sinne des NUCLEOLUS ist nicht möglich.								
Schlussfolgerung: NUCLEOLUS: **(425, 425, 350)**								

Der Nucleolus *ergibt sich aus dieser Tabelle mit* $nuc(v) = (425, 425, 350)$*. Dieser Wert kann durch keine alternative Zuteilung verbessert werden. Diese Zuteilung bietet also den lexikografisch kleinsten Vektor der geordneten Überschüsse. Die Lage des* Nucleolus *für das Beispiel aus Tabelle 4.1 ist in der Abbildung 4.9 zu sehen. Die Darstellung zeigt in Verbindung mit der Abbildung 4.7 auf S. 492, dass der* Nucleolus *des Beispiels im Kern liegt.*

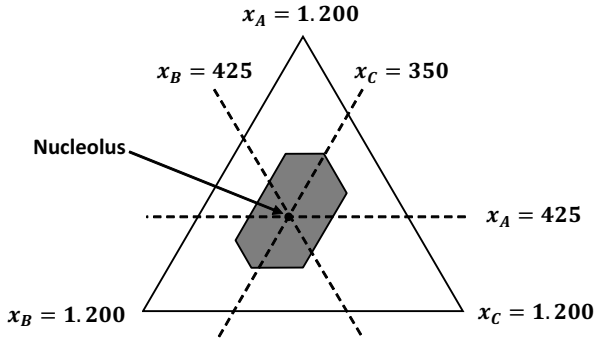


Abb. 4.9: Lage des Nucleolus für Bspl. 4.1 auf S. 479. Quelle: Eigene Darstellung.

Zum Vergleich mit der Shapley*-Lösung wird der Vektor der geordneten Überschüsse herangezogen, der bei Verwendung der zuvor ermittelten* Shapley*-Lösung resultieren würde. Dies ist* $x_{Shapley} = (433\ \frac{1}{3}, 433\ \frac{1}{3}, 333\ \frac{1}{3})$*. Der Vektor der geordneten Überschüsse resultiert mit:*

$$\Theta(x_{Shapley}) = \left(0, 0, -133\ \tfrac{1}{3}, -166\ \tfrac{2}{3}, -233\ \tfrac{1}{3}, -233\ \tfrac{1}{3}, -266\ \tfrac{2}{3}, -266\ \tfrac{2}{3}\right).$$

Im Vergleich mit $\Theta(nuc(v))$ *muss geschlussfolgert werden:* $\Theta(x_{Shapley}) >_{Lex} \Theta(nuc(v))$*. Somit stellt die* Shapley*-Lösung keine Verbesserung im Vergleich zum* Nucleolus *dar.*

4.5.3.2 Eigenschaften

Der Nucleolus erfüllt in der Klasse der **wesentlichen Spiele** die Forderung:[164]

- Existenz und Eindeutigkeit,
- Kernselektion,
- individuelle Rationalität,
- Effizienz,
- Dummy-Spieler-Eigenschaft und
- Anonymität.

Somit ist der Nucleolus eine **Kernlösung**. Im Folgenden wird anhand der Beispiele die Erfüllung der übrigen Eigenschaften untersucht.

[164] Vgl. Mueller (2018a: 414).

Überprüfung der übrigen Eigenschaften:

Mit Blick auf die ***Additivität*** *sind in Tabelle 4.9 die* Nucleolus*-Werte der Spiele aus Tabelle 4.2 auf S. 485 aufgeführt.*[165] *Es wird deutlich, dass der* Nucleolus *- im Gegensatz zur* Shapley*-Lösung -* ***nicht*** *additiv ist.*

Tab. 4.9: Shapley-Werte und Nucleolus für das Additivitätsbeispiel. Quelle: Eigene Darstellung.

Lösungskonzept und Koalitionsfunktion \ Anteile für Spieler	A	B	C
$\mathbf{nuc_i(v)}$	1/3	1/3	1/3
$\mathbf{nuc_i(w)}$	1/2	1/2	0
$\mathbf{nuc_i(u)}$	3/4	3/4	1/2
$\boldsymbol{\phi_i(u)}$	5/6	5/6	1/3

Als nächstes wird die Erfüllung der ***Aggregatsmonotonie***[166] *untersucht. Dazu werden die zwei konvexen Spiele aus Beispiel 4.3 von S. 486 herangezogen:*

- *Der* Nucleolus *ergibt sich für $\Gamma(N,v)$ mit $v(N) = 10$ mit: $nuc(v) = (2,2,2,4)$.*
- *Für das Spiel $\Gamma(N,w)$ mit $w(N) = 12$ folgt: $nuc(w) = (3,3,3,3)$.*
- *Für den Spieler D führt die Erhöhung des Spielwertes zu einer Verringerung seines Anteils.*
- *Dies steht im Widerspruch zur Forderung der Aggregatsmonotonie.*[167]

Damit wurde gezeigt, dass der Nucleolus *die Aggregatsmonotonie für Spiele mit $v \in \Gamma_K^{|N|\geq 4}$ nicht erfüllt. Aus der Nichterfüllung der Aggregatsmonotonie folgt gleichzeitig, dass die* ***Koalitionsmonotonie***[168] *ebenfalls* ***nicht erfüllt*** *wird. Zur Erläuterung wird das Beispiel 4.4 von S. 487 aufgegriffen:*

- *Die betrachteten Spiele $\Gamma(N,v)$ und $\Gamma(N,w)$ sind* ***nicht konvex****, jedoch* ***balanciert*** *und superadditiv.*
- *Für die Wertefunktion des Ursprungsspiels $\Gamma(N,v)$ ergibt sich der* Nucleolus *mit: $nuc(v) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.*
- *Nun wird der* Nucleolus *auf die veränderte Wertfunktion $w(N)$ des Spiels $\Gamma(N,w)$ ermittelt. Es galt: $v(\{B,C,D\}) = 1 < w(\{B,C,D\}) = 2$. Das führt zum* Nucleolus *mit: $nuc(w) = (0,0,1,1)$.*
- *Der Spieler B ist Mitglied derjenigen Koalition, welche ein erhöhtes Ergebnis erwirtschaftet. Jedoch erhält er einen geringeren Anteil als vor dieser Wertsteigerung.*
- *Das verstößt gegen die Forderung der Koalitionsmonotonie.*

Jedoch kann festgestellt werden, dass der Nucleolus *des Spiels $\Gamma(N,w)$ im nicht-leeren Kern des Spiels liegt. Damit wird der erwähnte Zielkonflikt zwischen den Anforderungen „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ verdeutlicht.*[169] *Der* Nucleolus *erfüllt die Koalitionsmonotonie nicht, liegt jedoch immer im Kern (wenn der Kern nicht-leer ist).*

[165] Vgl. S. 485.

[166] Vgl. Anforderung 4.4.7 auf S. 486.

[167] „*Der ... Nukleolus erkauft sich den Vorteil, immer zum nichtleeren Kern zu gehören, mit der Verletzung des Monotonie-Axioms.*“ Wiese (2005: 239).

[168] Vgl. Anforderung 4.4.8 auf S. 487.

[169] Vgl. Eigenschaft 4.5.4 auf S. 497.

Jedoch muss für die konvexen Spiele – als Teilklasse der balancierten Spiele – festgehalten werden, dass der Nucleolus *die Eigenschaften „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ nicht vereinen kann.*[170]

Die ***Populationsmonotonie***[171] *wird für die wichtige Klasse der konvexen Spiele vom* Nucleolus *ebenfalls* ***nicht*** *erfüllt, wie ein Blick auf das Beispiel 4.5 von S. 490 zeigt:*

- *Der* Nucleolus *für das reduzierte 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$ ergibt sich mit: $nuc(w) = (2,1,1)$.*
- *Für das ursprüngliche 4-Personen-Spiel $\Gamma(N,v)$ resultiert: $nuc(v) = (\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3},1)$.*
- *Der Anteil von Spieler A erhöht sich durch den Austritt von Spieler D (oder anders formuliert: der Beitritt von Spieler D schadet dem Spieler A), was im Widerspruch zur Populationsmonotonie steht.*

Jedoch kann an dieser Stelle auf einen folgenden Abschnitt verwiesen werden.[172] Dort wird eine Klasse von Spielen vorgestellt, die zwar auch konvex sind, für die der Nucleolus die Populationsmonotonie jedoch erfüllt.

Bei der Einführung der Kernselektion[173] wurde darauf hingewiesen, dass die Aggregatsmonotonie mit der Kernselektion vereinbart werden kann. Dies scheint im Widerspruch zur soeben nachgewiesenen Verletzung der Aggregatsmonotonie durch den Nucleolus zu stehen. Es existieren jedoch Kernlösungen, die beide Anforderungen erfüllen,[174] jedoch im vorliegenden Buch nicht behandelt werden.

Der Nucleolus wurde ebenfalls schon mehrfach zur Analyse von ökonomischen Fragestellungen eingesetzt.[175] Nachteilig beim Nucleolus ist der Berechnungsaufwand,[176] weshalb dieses Lösungskonzept nicht so verbreitet ist wie die Shapley-Lösung. Darüber hinaus sind fehlerhafte Ergebnisse zu konstatieren, die darauf basieren, dass zur Berechnung ein lineares Programm erforderlich ist, welches unter Umständen mehrere Lösungen haben kann.[177] Die diskutierten Eigenschaften des Nucleolus sind an anderer Stelle zusammengefasst.[178]

---

[170] Vgl. Hougaard/Peleg/Østerdal (2005: 432).

[171] Vgl. Anforderung 4.4.10 auf S. 489.

[172] Vgl. Abschn. 4.7.3 auf S. 542.

[173] Vgl. Anforderung 4.5.1 auf S. 496.

[174] Vgl. Calleja/Rafels/Tijs (2012: 902).

[175] Vgl. Suzuki/Nakayama (1976); Littlechild/Thompson (1977); Legros (1986); Hof (1993: 35–38); Hallefjord/Helming/Jørnsten (1995); Tsukamoto/Iyoda (1996); Fromen (1997); Stamtsis/Erlich (2004); Songhuai et al. (2006); Fischer (2008: 70); Homburg/Scherpereel (2008); Bhakar et al. (2010); Frisk et al. (2010); Massol/Tchung-Ming (2010); Kimms/Çetiner (2012); Guajardo/Rönnqvist (2016: 380).

[176] Vgl. Schmeidler (1969: 1164); Arin/Feltkamp (2005: 333); Karagök (2006: 65).

[177] Vgl. Guajardo/Jørnsten (2015); Mueller (2018b).

[178] Vgl. Tab. 4.16 auf S. 528.

4.5.4 Tijs-Wert

4.5.4.1 Beschreibung und Definition

Ansetzend an der Kritik der Shapley-Lösung wurde schon vor längerer Zeit das Konzept des Tijs-Wertes entwickelt, der häufiger als τ-Wert bezeichnet wird.[179] Dieses Konzept zeichnet sich dadurch aus, dass es auf Basis der sachlogischen Verhandlungssituation entwickelt wird, die sich den Spielern darstellt. Bei diesem Konzept werden in einem ersten Schritt eine Ober- und eine Untergrenze festgelegt.

Als obere Grenze wird der Vektor der Grenzbeiträge der einzelnen Spieler zur großen Koalition ermittelt. Der Grenzbeitrag eines Spielers i ist die Differenz zwischen dem Wert, den die große Koalition erreichen kann und dem Wert, den diese Koalition ohne den Spieler i erzielen kann. Diese Differenz stellt die obere Grenze für die Auszahlung an den Spieler i dar. Dem Spieler wird keine höhere Auszahlung gewährt als der Wert, den er durch seine Teilnahme an der großen Koalition beiträgt.[180]

Definition 4.21: *In einem Spiel $\Gamma(N,v)$ wird der Obervektor b wie folgt definiert:* $b_i = v(N) - v(N \backslash \{i\}) \forall\ i \in N$.

Die i-te Koordinate b_i dieses Obervektors ist der marginale Beitrag des Spielers i in Bezug auf die große Koalition. Dieser Vektor wird auch als Utopia-Vektor bezeichnet. Zur Ermittlung der unteren Grenze wird folgende Überlegung angestellt: im Fall, dass sich der Spieler i nicht an der großen Koalition beteiligt, besteht die Möglichkeit, dass i sich an einer anderen Koalition - der sog. Außenseiterkoalition S - beteiligt bzw. diese bildet. Der Spieler i erhält in dieser Konstellation mindestens denjenigen Betrag, mit dem er durch Gründung wenigstens einer Außenseiterkoalition glaubhaft zu drohen vermag.

Um jedoch andere Spieler für die Außenseiterkoalition zu gewinnen, muss der Spieler i diesen Mitgliedern jeweils mindestens denjenigen Betrag bieten, den diese in der großen Koalition bestenfalls erzielen könnten. Der nach diesen Seitenzahlungen resultierende Betrag verbleibt dem Spieler i und stellt die Untergrenze – auch als Drohpunkt oder Konzessionsgrenze bezeichnet – dar. Der Spieler i strebt nun rationalerweise die Koalition an, bei der diese Differenz maximal ist.

[179] Vgl. Tijs (1981); Driessen/Tijs (1985). Benannt nach Stef Tijs, geb. 1937.

[180] Vgl. Driessen (1988: 57).

Definition 4.22: *In einem Spiel $\Gamma(N,v)$ wird der Untervektor a wie folgt definiert:*

$$a_i = \max_{S \subseteq N : i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} b_j \right\} \forall i \in N.$$

Eine Anforderung an eine Imputation resultiert aus dem Umstand, dass für alle Spieler die Komponenten a_i nicht größer sein dürfen als die Komponenten b_i. Wenn eine Imputation zwischen diesen beiden Vektoren liegen soll, muss als weitere Bedingung gelten, dass die Summe der a_i den Spielwert nicht überschreiten, während die Summe der b_i diesen Wert nicht unterschreiten darf. Spiele, die diese beiden Forderungen erfüllen, werden als **quasi-balanciert** bezeichnet.[181]

Eigenschaft 4.5.8: *Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist quasi-balanciert, wenn für alle $i \in N$ gilt: $a_i \leq b_i$ sowie $\sum_{i \in N} a_i \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} b_i$.*

Im weiteren Verlauf bezeichnet Γ_Q^N die Klasse der quasi-balancierten Spiele mit der Spielermenge N. Für quasi-balancierte Spiele existiert eine eindeutig bestimmte Imputation, die zwischen dem oberen und dem unteren Vektor liegt und als τ-Wert bezeichnet wird.[182]

Definition 4.23: *Der τ-Wert eines Spiels $\Gamma(N,v)$ mit $v \in \Gamma_Q^N$ ist definiert durch:*

$$\tau\ (v) = a + \lambda(b-a),\ \textit{wobei}:$$
$$\lambda = 0,\ \textit{wenn}\quad a = b,\quad \textit{ansonsten}:$$
$$\lambda = \frac{v(N) - \sum_{i \in N} a_i}{\sum_{i \in N} b_i - \sum_{i \in N} a_i}.$$

Ausgehend von den bisherigen Darstellungen wird der τ-Wert für das Eingangsbeispiel 4.1 von S. 479 ermittelt.

[181] Vgl. Bilbao (2000: 6); Brânzei/Dimitrov/Tijs (2008: 31).

[182] Vgl. Tijs (1986: 4) sowie zu einem Beweis der Existenz des τ-Wertes vgl. Tijs (1981: 126–127); Tijs (1986: 5–7).

Fortführung des Beispiels 4.1:

Der Obervektor b resultiert aus Definition 4.21 mit:

$$b = \begin{pmatrix} b_A \\ b_B \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) \\ v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\}) \\ v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 700 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Der Untervektor a resultiert aus Definition 4.22 mit:

$$a = \begin{pmatrix} max(v(\{A\}), v(\{A,B\}) - b_B, v(\{A,C\}) - b_C, v(\{A,B,C\}) - (b_B + b_C)) \\ max(v(\{B\}), v(\{A,B\}) - b_A, v(\{B,C\}) - b_C, v(\{A,B,C\}) - (b_A + b_C)) \\ max(v(\{C\}), v(\{A,C\}) - b_A, v(\{B,C\}) - b_B, v(\{A,B,C\}) - (b_A + b_B)) \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_A \\ a_B \\ a_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Definition 4.23 liefert den Wert für λ mit: $\lambda = \frac{1.200 - 600}{1.900 - 600} = \frac{6}{13}$

Der τ-Vektor ergibt sich aus Definition 4.23 mit:

$$\tau = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} + \frac{6}{13} \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5600}{13} \\ \frac{5600}{13} \\ \frac{4400}{13} \end{pmatrix}$$

Die Lage des τ-Wertes ist in der Abbildung 4.10 zu sehen. Zusätzlich lässt sich die Lage des τ-Wertes im Raum veranschaulichen. Dazu werden der Ober- und der Untervektor eingetragen und miteinander verbunden. An der Stelle, an der diese Gerade die Fläche der effizienten Lösungen kreuzt, liegt der τ-Wert (vgl. Abbildung 4.11). Auch der τ-Wert lässt sich mit dem Nucleolus *vergleichen. Dazu wird der Vektor der geordneten Überschüsse ermittelt, der bei Verwendung der Zuteilung entsprechend dem τ-Wert resultiert. Es folgt:*[183]

$$\Theta(x_\tau) = \left(0, 0, -138\frac{6}{13}, -161\frac{7}{13}, -230\frac{10}{13}, -230\frac{10}{13}, -269\frac{3}{13}, -269\frac{3}{13}\right).$$

Der zuvor ermittelte Vektor[184] *der geordneten Überschüsse des* Nucleolus *resultierte mit: $\Theta(x_4) = (0, 0, -150, -150, -225, -225, -275, -275)$. Durch den Vergleich der beiden Vektoren kann festgestellt werden: $\Theta(x_4) <_{Lex} \Theta(x_\tau)$. Demzufolge ist auch die Zuteilung nach dem τ-Wert keine Verbesserung im Sinne des* Nucleolus.

[183] Vgl. Def. 4.18 auf S. 507.

[184] Vgl. Tabelle 4.8 auf S. 509.

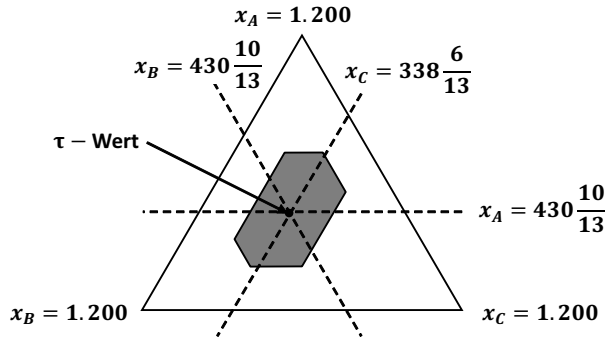


Abb. 4.10: Lage des τ-Wertes für Bspl. 4.1 auf S. 479 in der Ebene. Quelle: Eigene Darstellung.

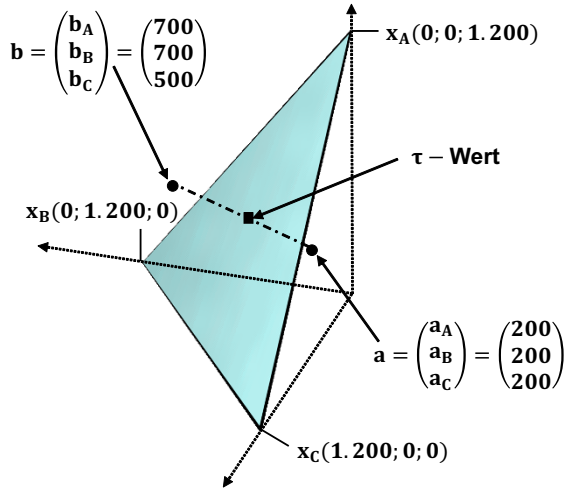


Abb. 4.11: Lage des τ-Wertes für Bspl. 4.1 auf S. 479 im Raum. Quelle: Eigene Darstellung, in Anlehnung an: Zelewski (2009: 150).

4.5.4.2 Eigenschaften

Der τ-Wert erfüllt für die Klasse der **quasi-balancierten Spiele** die Anforderungen:[185]

- Existenz und Eindeutigkeit,

[185] Vgl. Mueller (2018a: 416).

- individuelle Rationalität,
- Effizienz,
- Anonymität und
- Dummy-Spieler-Eigenschaft.

Im Folgenden wird anhand der Beispiele die Erfüllung der übrigen Eigenschaften untersucht.

Überprüfung der übrigen Eigenschaften:

Zur Analyse der ***Additivitätseigenschaft*** *sind in Tabelle 4.10 die τ-Werte der Spiele aus Tabelle 4.2 auf S. 485 aufgeführt. Es wird deutlich, dass der τ-Wert nicht additiv ist.*

Tab. 4.10: SHAPLEY- und τ-Werte für das Additivitätsbeispiel. Quelle: Eigene Darstellung.

Lösungskonzept und Koalitionsfunktion \ Anteile für Spieler	A	B	C
$\tau_i(v)$	1/3	1/3	1/3
$\tau_i(w)$	1/2	1/2	0
$\tau_i(u)$	4/5	4/5	2/5
$\phi_i(u)$	5/6	5/6	1/3

Kernselektion *ist lediglich für $\Gamma(N,v)$ mit $v \in \Gamma_Q^2$ und $v \in \Gamma_Q^3$ gesichert.*[186] *Auch für konvexe Spiele stellt der τ-Wert keine Kernselektion sicher, wie Beispiel 4.8 zeigt.*[187]

Beispiel 4.8:

Ein 5-Spieler-Spiel ist durch die Funktion in Tab. 4.11 charakterisiert.

Tab. 4.11: (Bei-)Spiel für den nicht zum Kern gehörenden τ-Wert. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Driessen (1988: 131).

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{A,D}	8	{A,B,C}	18	{B,D,E}	46
{A}	0	{A,E}	8	{A,B,D}	18	{C,D,E}	46
{B}	0	{B,C}	10	{A,B,E}	18	{A,B,C,D}	28
{C}	0	{B,D}	10	{A,C,D}	18	{A,B,C,E}	28
{D}	0	{B,E}	10	{A,C,E}	18	{A,B,D,E}	54
{E}	0	{C,D}	10	{A,D,E}	44	{A,C,D,E}	54
{A,B}	8	{C,E}	10	{B,C,D}	20	{B,C,D,E}	56
{A,C}	8	{D,E}	36	{B,C,E}	20	{A,B,C,D,E}	64

Das Spiel aus Tab. 4.11 ist konvex. Der τ-Wert folgt mit: $\tau(v) = \left(\frac{128}{25}, \frac{32}{5}, \frac{32}{5}, \frac{576}{25}, \frac{576}{25}\right)$.

Wird die Koalition $\{A,B,C\}$ betrachtet, so zeigt sich, dass $\tau_{A,B,C}(v) = \frac{448}{25} = 17{,}92$. *Dieser Wert ist geringer als $v(\{A,B,C\})$, weshalb der τ-Wert nicht im Kern liegt.*

[186] Vgl. Tijs (1981: 128); Driessen/Tijs (1985: 234); Driessen (1988: 65).

[187] Vgl. Driessen (1988: 131).

Als nächstes wird die Erfüllung der ***Aggregatsmonotonie***[188] *untersucht. Dazu werden die zwei konvexen Spiele aus Beispiel 4.3 auf S. 486 herangezogen:*

- *Die τ-Werte ergeben sich für $\Gamma(N,v)$ mit $v(N) = 10$ mit: $\tau_A(v) = \tau_B(v) = \tau_C(v) = \frac{20}{9}$ und $\tau_D(v) = \frac{10}{3}$.*
- *Für das zweite Spiel $\Gamma(N,w)$ mit $w(N) = 12$ resultiert: $\tau_A(w) = \tau_B(w) = \tau_C(w) = \frac{36}{13}$ und $\tau_D(w) = \frac{48}{13}$.*
- *Die Anteile aller Spieler sind mit steigendem Spielwert ebenfalls gestiegen. Damit ist die Aggregatsmonotonie erfüllt.*

Das gilt jedoch nur für diesen Fall. Beispiel 4.9 zeigt, dass die Eigenschaft nicht für alle konvexen Spiele erfüllt ist.

Beispiel 4.9:

Es liegt ein 7-Personen-Spiel $\Gamma(N,v)$ mit folgenden Werten vor:[189]

$$v(S) = \begin{cases} 100 & \text{wenn } S = N, \\ 60 & \text{für } |S| = 6 \text{ und } A \in S, \\ 20 & \text{für } |S| = 5 \text{ und } A \in S, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Dieses Spiel ist konvex. Der τ-Wert für A resultiert mit $\tau_A(v) = \frac{500}{17} \approx 29{,}4118$. Nun wird ein Spiel $\Gamma(N,w)$ erzeugt, indem der Wert der großen Koalition auf $w(N) = 101$ erhöht wird. Es ergibt sich der τ-Wert für den Spieler A mit $\tau_A(w) = \frac{10201}{347} \approx 29{,}3977$. Die Erhöhung des Wertes der großen Koalition führt zur Reduktion des Anteils eines Spielers, womit die Forderung der Aggregationsmonotonie ***nicht erfüllt*** *wird.*

Mit der Feststellung, dass der τ-Wert die Aggregatsmonotonie für konvexe Spiele nicht erfüllt, folgt gleichzeitig, dass die ***Koalitionsmonotonie***[190] *für* ***konvexe Spiele*** *ebenfalls* ***nicht erfüllt*** *wird.*

Der τ-Wert erfüllt - ebenso wie der Nucleolus *- die Forderung der* ***Populationsmonotonie***[191] *für die wichtige Klasse der konvexen Spiele auch* ***nicht****. Es wird wiederum das Beispiel 4.5 von S. 490 herangezogen:*

- *Für das reduzierte 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$ folgt: $\tau(w) = (\frac{12}{7}, \frac{8}{7}, \frac{8}{7})$.*
- *Die Analyse des 4-Personen-Spiels $\Gamma(N,v)$ führt zu: $\tau(v) = (\frac{18}{11}, \frac{18}{11}, \frac{18}{11}, \frac{12}{11})$.*
- *Der Beitritt von Spieler D schadet dem Spieler A (oder anders formuliert: der Anteil von Spieler A erhöht sich durch den Austritt von Spieler D), was im Widerspruch zur Populationsmonotonie steht.*

Der τ-Wert wurde erst in - vergleichsweise - jüngerer Zeit in die ökonomische Diskussion eingeführt.[192] Sein Bekanntheitsgrad ist deshalb wesentlich geringer im Vergleich mit dem Nucleolus und der Shapley-Lösung.

[188] Vgl. Anforderung 4.4.7 auf S. 486.

[189] Vgl. Hokari/van Gellekom (2002: 604–605).

[190] Vgl. Anforderung 4.4.8 auf S. 487.

[191] Vgl. Anforderung 4.4.10 auf S. 489.

[192] Vgl. Tijs/Driessen (1986); Zelewski (2009); Zelewski/Peters (2010); Jene/Zelewski (2011a: 321–335); Jene/Zelewski (2011b: 303–313); Jene/Zelewski (2011c: 118–130); Zelewski/Jene (2011: 3–18); Jene/Zelewski (2012: 171–184); Jene/Zelewski (2013); Jene (2015); Müller (2015); Mueller (2016).

Auf einer ähnlichen Argumentationsbasis wie der τ-Wert wurde der χ-Wert entwickelt. Dieser wird hier nicht diskutiert, sondern es wird auf die weiterführende Literatur verwiesen.[193]

Die diskutierten Eigenschaften des τ-Wertes sind an anderer Stelle zusammengefasst.[194] Dabei wird deutlich, dass der τ-Wert im Vergleich mit dem Nucleolus und der Shapley-Lösung nur wenige der Anforderungen an gerechte Aufteilungsmechanismen erfüllt.

4.5.5 Dutta-Ray-Lösung

4.5.5.1 Beschreibung und Definition

Die Dutta–Ray–Lösung (DRL) wurde erst in vergleichsweise jüngerer Zeit entwickelt. Dies erfolgte unabhängig voneinander durch Fujishige[195] und etwas später durch Dutta und Ray.[196] Konsequenterweise müsste die Lösung deshalb Fujishige-Dutta-Ray-Lösung heißen.[197] Im weiteren Verlauf wird jedoch ausschließlich die Begründung und Herleitung von Dutta und Ray verwendet, so dass die Lösung entsprechend benannt wird.

Grundlage des auf diese Weise vorgestellten Verfahrens ist die Lorenz-Dominanz, welche an der Gleichverteilung ausgerichtet ist.[198] Lorenz[199] wollte die Einkommensverteilung statistisch messen und gewichten und entwickelte die nach ihm benannte Lorenz-Kurve. Bei Verwendung von diskreten Verteilungen ist der Betrachtungsrahmen eine Gesellschaft mit $i = 0,1,2,...,n$ Individuen, in der das Gesamteinkommen S_n durch die nicht-negativen Zuteilungen x_i verteilt werden soll. Der Vektor $\hat{x}$ ordnet die Anteile der Personen in nicht-absteigender Reihenfolge $(0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ,..., \leq x_n)$. Die Verteilung des Einkommens aller Individuen kann durch die Lorenz-Kurve nach Definition 4.24 beschrieben werden.[200]

[193] Vgl. Bergantiños/Massó (1996); Bergantiños/Massó (2002); Zelewski/Heeb (2018).
[194] Vgl. Tab. 4.16 auf S. 528.
[195] Vgl. Fujishige (1980).
[196] Vgl. Dutta/Ray (1989); Dutta (1990).
[197] Vgl. Knudsen/Østerdal (2012: 771).
[198] Vgl. Lorenz (1905).
[199] Max Otto Lorenz (1876–1959).
[200] Vgl. Bankhofer/Vogel (2008: 45–46).

Definition 4.24: *Die* LORENZ*-Kurve $L(F)$ für die Verteilung einer Summe S_n durch einen, in nicht-absteigender Reihenfolge geordneten, Vektor $\hat{x} = (0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ,..., \leq x_n)$ wird gebildet aus den Punkten (F_i, L_i), die für $i = 1,2,...,n$ wie folgt definiert sind:*

$$F_i = \frac{i}{n} \text{ und } L_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_j}{S_n}.$$

Per definitionem gilt: $L(0) = 0$ und $F(0) = 0$.

Als Resultat entsteht die auf dem Intervall $[0;1]$ definierte LORENZ-Kurve, die zwischen $L(x_0) = L(0) = 0$ und $L(x_n) = L(1) = 1$ streng monoton steigt.[201] Die LORENZ-Kurve stellt die Funktion des kumulierten Vermögensanteils der Mitglieder einer Gesellschaft in Abhängigkeit von deren kumulierten Bevölkerungsanteil dar. Eine Gleichverteilung des Einkommens S_n führt zum Verlauf der Kurve exakt auf der Winkelhalbierenden. Empirisch festgestellte Verteilungen weisen i. d. R. eine konvexe Gestalt auf und verlaufen unterhalb der 45°-Geraden. Beispiel 4.10 dient der Veranschaulichung.

Beispiel 4.10:

Es wird ein Einkommen $S_n = 150$ betrachtet, dass unter fünf Personen aufzuteilen ist. Dazu werden folgende Vorschläge unterbreitet: $\hat{x} = (15,20,30,35,50)$ sowie $\hat{y} = (5,10,20,35,80)$. Damit ergeben sich die Werte in Tabelle 4.12.

Tab. 4.12: Koordinaten der LORENZ-Kurven. Quelle: Eigene Darstellung.

$\mathbf{F_i}$	$\mathbf{L_i}\,(\mathbf{F_i}(\hat{\mathbf{x}}))$	$\mathbf{L_i}\,(\mathbf{F_i}(\hat{\mathbf{y}}))$
0	0	0
0,2	$0{,}100 = \frac{15}{150}$	$0{,}033 = \frac{5}{150}$
0,4	$0{,}233 = \frac{15+20}{150}$	$0{,}100 = \frac{5+10}{150}$
0,6	$0{,}433 = \frac{15+20+30}{150}$	$0{,}233 = \frac{5+10+20}{150}$
0,8	$0{,}667 = \frac{15+20+30+35}{150}$	$0{,}467 = \frac{5+10+20+35}{150}$
1	1	1

In der Abbildung 4.12 sind die resultierenden LORENZ*-Kurven dargestellt.*

[201] Vgl. Auer/Rottmann (2020: 70–72).

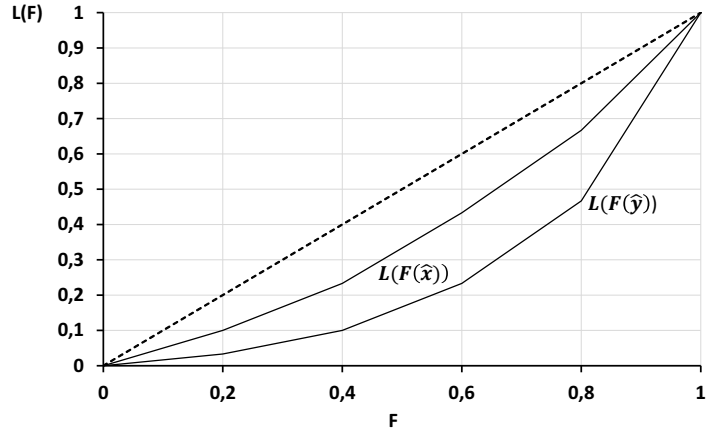


Abb. 4.12: LORENZ-Kurven für Beispiel 4.10. Quelle: Eigene Darstellung.

Es wird deutlich, dass die Verteilung mittels des Vektors $\hat{x}$ zu einer LORENZ*-Kurve führt, die näher an der Gleichverteilung liegt. Demzufolge ist die Verteilung mittels Vektor $\hat{x}$ gerechter als bei Verwendung des Vektors $\hat{y}$.*

Das Verhältnis unterschiedlicher LORENZ-Kurven kann durch die **LORENZ-Dominanz** beschrieben werden.[202] Dies führt zur Beschreibung der LORENZ-Dominanz in Definition 4.25.[203]

Definition 4.25: *Der Vektor $\hat{x}$* LORENZ*-dominiert den Vektor $\hat{y}$ für jedes $x,y \in \mathbb{R}_+^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$, wenn gilt:*

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \geq \sum_{i=1}^{p} y_i \qquad \forall\ p = 1,\ldots,n-1 \text{ und}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i > \sum_{i=1}^{p} y_i \qquad \text{für mindestens ein } p.$$

Die Definition 4.25 weist Ähnlichkeiten mit der stochastischen Dominanz erster Ordnung auf.[204] Sie wird deshalb auch als **starke** LORENZ-Dominanz bezeichnet. Wie auch bei der stochastischen Dominanz existiert eine LORENZ-Dominanz zweiter Ordnung. Das ist dann der Fall, wenn sich die LORENZ-Kurven schneiden. Dieser Fall wird hier nicht betrachtet, sondern auf die

[202] Zur Verwendung von LORENZ-Kurven im Fall von Rationierungsproblemen vgl. Abbildung 4.24 auf S. 558.

[203] Vgl. Brânzei/Dimitrov/Tijs (2008: 37); Hougaard (2009: 22).

[204] Vgl. Def. 1.40 auf S. 149.

weiterführende Literatur verwiesen.[205] Im weiteren Verlauf wird die LORENZ-Dominanz ausschließlich im Sinn der starken LORENZ-Dominanz verwendet.

Nach Definition 4.25 LORENZ-dominiert eine Verteilung $\hat{x}$ eine Verteilung $\hat{y}$, wenn die resultierende Kurve $L(F(\hat{x}))$ an mindestens einem Punkt oberhalb der Kurve $L(F(\hat{y}))$ verläuft.[206] Für diesen Fall wird formuliert: $\hat{x} \succ_{Lor} \hat{y}$. In der Abbildung 4.12 wird ersichtlich, dass Vektor $\hat{x}$ den Vektor $\hat{y}$ LORENZ-dominiert.

Zur Lösung kooperativer Spiele wird das Konzept der LORENZ-Dominanz verwendet, wobei diejenigen Zuteilungsvektoren miteinander verglichen werden, die die Basis zur Berechnung der LORENZ-Kurven bilden. Auf Basis der LORENZ-Dominanz (vgl. Definition 4.25) kann die **LORENZ-Menge** gemäß Definition 4.26 beschrieben werden.[207]

Definition 4.26: *In einem Spiel $\Gamma(N,v)$ mit $v \in \Gamma_B^N$ ist die* LORENZ*-Menge $LM(v)$ wie folgt definiert:*[208]

$$LM(v) = \{x \in C(v) \mid \nexists\ y \in C(v) : \hat{y} \succ_{Lor} \hat{x}\}.$$

Demzufolge bilden sämtliche, nicht LORENZ-dominierte Kernzuteilungen die LORENZ-Menge. Es wird deutlich, dass $LM(v) \subseteq C(v)$ und für alle $v \in \Gamma_B^N$ gilt: $C(v) \neq \varnothing$ und somit $LM(v) \neq \varnothing$.

Die LORENZ-Menge liefert darüber hinaus für nicht konvexe, balancierte Spiele eine eindeutig definierte Lösung - die **LORENZ-Lösung**. Das ist diejenige Zuteilung, die den **euklidischen Abstand** zwischen dem Kern und der Gleichverteilung **minimiert**.[209] Im Folgenden bezeichnet $||x||$ die euklidische Länge der Zuteilung x mit $\sqrt{\sum_{i \in N} x_i^2}$.[210] Damit kann die LORENZ-Lösung in Definition 4.27 beschrieben werden.

Definition 4.27: *In einem Spiel $\Gamma(N,v)$ mit $v \in \Gamma_B^N$ ist die* LORENZ*-Lösung $LL(v)$ wie folgt definiert:*

$$LL(v) = \{x \in C(v) |\ ||x|| \leq ||y||\ \forall\ y \in C(v)\}.$$

Grundidee der LL ist es, auf Basis der LORENZ-Dominanz eine Lösung zu identifizieren, die im Kern liegt. Die Gleichverteilung ist diejenige Lösung,

[205] Vgl. Herlyn (2012: 40–41).
[206] Vgl. Thomson (2012: 552).
[207] Vgl. Hokari (2000b: 330); Hougaard/Smilgins (2016: 153).
[208] $\nexists$ ist die Negation des Existenzquantors $\exists$. $\nexists\ y$ bedeutet: es existiert kein Element y.
[209] Vgl. Hougaard/Smilgins (2016: 153).
[210] Vgl. Arin/Kuipers/Vermeulen (2008: 569); Mueller (2018b: 532).

welche jede andere Lösung LORENZ-dominiert. Jedoch ist die Gleichverteilung nicht notwendigerweise Bestandteil des nicht-leeren Kerns. Deshalb wird mit der LL nach derjenigen Kernlösung gesucht, welche der Gleichverteilung am nächsten kommt.

Es existieren neben der LORENZ-Lösung weitere egalitäre, eindeutig definierte Kernzuteilungen, für deren Darstellung jedoch auf die Literatur verwiesen wird.[211] Zu Erläuterung der LORENZ-Lösung wird das Beispiel 4.11 betrachtet.

Beispiel 4.11:

Ein 4-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:

$$v(S) = \begin{cases} 7 & \text{wenn } S = \{A, B\} \text{ oder } S = \{A, C\}, \\ 8 & \text{für } S = N, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Das Spiel ist weder monoton, noch superadditiv und auch nicht konvex. Es ist jedoch balanciert, der Kern ist nicht-leer. Der Tetraeder in Abbildung 4.13 stellt die Menge aller effizienten Aufteilungen dar. Der Kern wird durch die kleine Pyramide im Tetraeder beschrieben. Die Gleichverteilung (2,2,2,2) ist jedoch kein Bestandteil des Kerns (vgl. blauer bzw. rechter Punkt in Abbildung 4.13), da die Koalitionen {A,B} sowie {A,C} jeweils nur den Wert 4 zugeteilt bekommen.

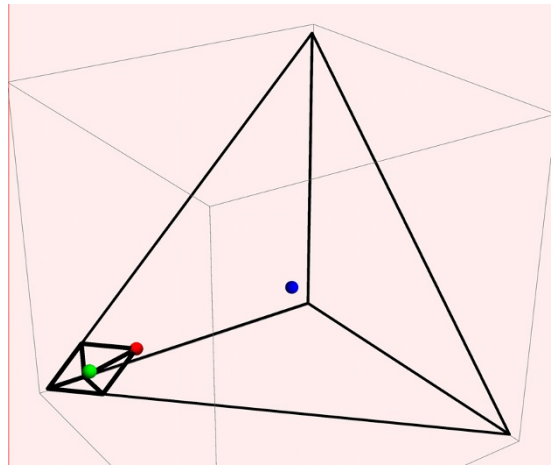


Abb. 4.13: Gleichverteilung, Kern, LORENZ-Lösung und NUCLEOLUS. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Meinhardt (2016).

[211] Vgl. Arin/Kuipers/Vermeulen (2008: 569).

Es existieren mehrere Lorenz*-undominierte Kernlösungen, von denen einige in Tabelle 4.13 dargestellt sind.*

Tab. 4.13: Lorenz-undominierte Kernzuteilungen. Quelle: Eigene Darstellung.

Zuteilung x	**Geordneter Vektor $\hat{x}$**	$\sum_{i=1}^{1}$	$\sum_{i=1}^{2}$	$\sum_{i=1}^{3}$	$\sum_{i=1}^{4}$
$x_1 = (6{,}1{,}1{,}0)$	$\hat{x}_1 = (0{,}1{,}1{,}6)$	0	1	2	8
$x_2 = \left(6\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\hat{x}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 6\frac{3}{4}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	8
$x_3 = \left(7, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\hat{x}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 7\right)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	8

Zuteilung x_3 aus Tabelle 4.13 ist der Nucleolus *des Spiels der per definitionem eine Kernlösung ist (vgl. grüner bzw. linker Punkt in Abbildung 4.13). Es ergeben sich folgende euklidische Distanzen: $||x_1|| = \sqrt{38}$, $||x_2|| = \sqrt{46\frac{1}{4}}$ und $||x_3|| = \sqrt{49\frac{1}{3}}$. In diesem Spiel gilt: $x_1 = LL(v)$, da diese den euklidischen Abstand zur Gleichverteilung minimiert (vgl. roter bzw. mittlerer Punkt in Abbildung 4.13).*

Da die Lorenz-Lösung bisher wenig analysiert und eingesetzt wurde, wird die weitere Betrachtung auf die Klasse der **konvexen Spiele** reduziert.

Für alle $v \in \Gamma_K^N$ gilt $|LM(v)| = 1$,[212] d. h. es existiert genau eine Lösung. Diese Lösung ist die Dutta-Ray-Lösung (DRL), die für konvexe Spiele mit Definition 4.28 beschrieben ist.[213]

Definition 4.28: *Die* Dutta–Ray*-Lösung eines Spiels $\Gamma(N, v)$ mit $v \in \Gamma_K^N$ ist definiert durch:*

$$DRL(v) = \underset{x \in C(v)}{\arg\min} \sum_{i \in N} \left(x_i - \frac{v(N)}{|N|} \right)^2$$

Ein Blick auf Definition 4.28 zeigt, dass die DRL den euklidischen Abstand zwischen der Gleichverteilung und dem Kern minimiert. Nun kann die DRL für das Beispiel 4.1 von S. 479 ermittelt werden.

Fortführung des Beispiels 4.1:

Für das Beispiel[214] *resultiert mit Def. 4.28 die DRL (v)= (400, 400, 400). Dies ist exakt die Gleichverteilung, welche sich im nicht-leeren Kern befindet, wie in der Abbildung 4.14 deutlich wird.*

---

[212] Vgl. Hougaard/Smilgins (2016: 153).

[213] Vgl. Hokari/van Gellekom (2002: 596).

[214] Vgl. Tab. 4.1 auf S. 479.

Interessant ist, dass diese Zuteilung der Ausgangspunkt für die Ermittlung des Nucleolus *war.*[215] *Jedoch wurde die Lösung nach der Logik des* Nucleolus *verworfen, da der resultierende Vektor der geordneten Überschüsse lexikografisch größer war als andere Vektoren.*

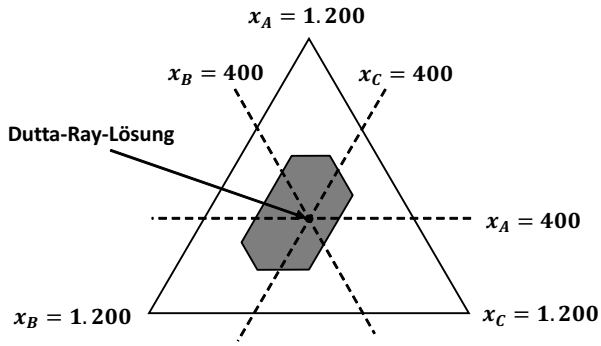


Abb. 4.14: Lage der Dutta-Ray-Lösung für Bspl. 4.1 auf S. 479. Quelle: Eigene Darstellung.

4.5.5.2 Eigenschaften

Die Eindeutigkeit der DRL ist nur für konvexe Spiele gesichert.[216] Für andere Spielklassen hat die DRL nicht notwendigerweise eine Beziehung zum Kern: Einerseits ist es möglich, dass der Kern nicht-leer ist, aber die DRL nicht existiert. Andererseits ist es möglich, dass der Kern leer ist, jedoch die DRL trotzdem existiert. Selbst für den Fall des nicht-leeren Kerns ist nicht garantiert, dass die DRL ein Bestandteil des Kerns ist.[217] Die DRL:

- ist bei konvexen Spielen immer Bestandteil des nicht-leeren Kerns und
- Lorenz-dominiert jede andere Zuteilung aus dem Kern.[218]

Die Dutta-Ray-Lösung erfüllt für **alle konvexen Spiele** die Forderungen nach:[219]

- Existenz und Eindeutigkeit,
- Kernselektion,
- individuelle Rationalität,

[215] Vgl. Tab. 4.8 auf S. 509.
[216] Vgl. Dutta/Ray (1989: 627–628); Hougaard/Peleg/Thorlund-Petersen (2001: 159).
[217] Vgl. Mueller (2018a: 417).
[218] Vgl. Dutta/Ray (1989: 627); Dutta (1990: 154).
[219] Vgl. Mueller (2018a: 417–418).

- Effizienz,
- Anonymität,
- Dummy-Spieler-Eigenschaft.

Im Folgenden wird anhand der bekannten Beispiele die Erfüllung der übrigen Eigenschaften untersucht.

Überprüfung der übrigen Eigenschaften:

*Zur Betrachtung der **Additivität** sind in Tabelle 4.14 die* Dutta-Ray*-Lösungswerte der Spiele aus Tabelle 4.2 auf S. 485 aufgeführt. Es wird deutlich, dass die DRL, wie auch der* Nucleolus *und der τ-Wert, im Gegensatz zur* Shapley*-Lösung, nicht additiv ist.*

Tab. 4.14: Shapley-Werte und Dutta-Ray-Lösungen für das Additivitätsbeispiel. Quelle: Eigene Darstellung.

Lösungskonzept und Koalitionsfunktion \ Anteile für Spieler	A	B	C
$\mathbf{DRL_i(v)}$	1/3	1/3	1/3
$\mathbf{DRL_i(w)}$	1/2	1/2	0
$\mathbf{DRL_i(u)}$	2/3	2/3	2/3
$\boldsymbol{\phi_i(u)}$	5/6	5/6	1/3

*Als nächstes wird die Erfüllung der **Aggregatsmonotonie**[220] untersucht. Dazu werden die zwei konvexen Spiele aus Beispiel 4.3 auf S. 486 herangezogen:*

- *Die DRL ergibt sich für $\Gamma(N,v)$ mit $v(N) = 10$ aus Definition 4.28 mit: DRL $(v) = \left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.*
- *Für das zweite Spiel $\Gamma(N,w)$ mit $w(N) = 12$ resultiert: DRL $(v) = (3,3,3,3)$.*
- *Die Anteile aller Spieler sind mit steigendem Spielwert ebenfalls gestiegen.*

Das lässt auf die Erfüllung der Aggregatsmonotonie schließen. Diese Aussage gilt für alle konvexen Spiele.[221] *Um zu untersuchen, ob die DRL die **Koalitionsmonotonie**[222] erfüllt, kann das Beispiel 4.4 von S. 487 nicht aufgegriffen werden, da es nicht konvex ist. Es kann hier jedoch festgehalten werden, dass für **konvexe Spiele** die Koalitionsmonotonie **erfüllt** ist. In dieser Klasse vereint die DRL die Eigenschaften „Kernselektion“ und „Koalitionsmonotonie“ miteinander.*

Die DRL sichert - ebenso wie die Shapley*-Lösung - **Populationsmonotonie**[223] für die Klasse der konvexen Spiele.*[224] *Zur Demonstration wird das Beispiel 4.5 von S. 490 herangezogen:*

- *Für das 3-Personen-Spiel $\Gamma(N',w)$ resultiert: DRL $(w) = \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.*

---

[220] Vgl. Anforderung 4.4.7 auf S. 486.

[221] Vgl. Hokari/van Gellekom (2002: 600).

[222] Vgl. Anforderung 4.4.8 auf S. 487.

[223] Vgl. Anforderung 4.4.10 auf S. 489.

[224] Vgl. Hokari (2000b: 328); Hougaard/Peleg/Østerdal (2005: 432); Hokari/Uchida (2017: 91).

- *Die Analyse des 4-Personen-Spiels $\Gamma(N,v)$ führt zu: DRL* $(v) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.
- *Der Beitritt des zusätzlichen Spielers D schadet keinem Spieler der bisher bestehenden Koalition bei Verwendung der DRL.*

Es wurde gezeigt, dass die DRL eine Vielzahl wünschenswerter Eigenschaften erfüllt. Für die wichtige Klasse der konvexen Spiele ist die DRL sowohl dem τ-Wert als auch dem NUCLEOLUS überlegen. Die diskutierten Eigenschaften der DRL sind an anderer Stelle zusammengefasst.[225]

Mit der Verwendung der LORENZ-Dominanz verfolgt die DRL das **Gleichheitsprinzip**. Da dieses Prinzip jedoch ausschließlich auf die Kernzuteilungen begrenzt wird, erfolgt eine **Kombination** mit dem **Leistungsprinzip**.

Es sind keine Anwendungsbeispiele der DRL im ökonomischen Bereich dokumentiert, wohingegen die LORENZ-Lösung - wenn auch sehr vereinzelt - eingesetzt wurde.[226]

4.5.6 Vergleichende Darstellung

Die Ergebnisse der vorgestellten Lösungskonzepte für die Eingangssituation[227] sind in der Tabelle 4.15 dargestellt.

Tab. 4.15: Überblick über die Ergebnisse. Quelle: Eigene Darstellung.

Zuteilung für / Lösungskonzept	A	B	C
SHAPLEY-Lösung	$\frac{1300}{3} = 433\frac{1}{3}$	$\frac{1300}{3} = 433\frac{1}{3}$	$\frac{1000}{3} = 333\frac{1}{3}$
NUCLEOLUS	425	425	350
τ-Wert	$\frac{5600}{13} = 430\frac{10}{13}$	$\frac{5600}{13} = 430\frac{10}{13}$	$\frac{4400}{13} = 338\frac{6}{13}$
DUTTA–RAY-Lösung	400	400	400

Diese Darstellungen zeigen, dass das Kriterium der Fairness in den Lösungskonzepten **unterschiedlich konkretisiert** wird. Alle Lösungen werden den prinzipiellen Anforderungen an eine faire Aufteilung gerecht, können jedoch u. U. zu verschiedenen Zuteilungen führen.

[225] Vgl. Tab. 4.16 auf S. 528.
[226] Vgl. Hougaard/Smilgins (2016); Mueller (2018b).
[227] Vgl. Tab. 4.1 auf S. 479.

Tab. 4.16: Eigenschaften der Lösungskonzepte. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Hokari/van Gellekom (2002: 600); Calleja/Rafels/Tijs (2012: 903–904); Mueller (2018a: 422).

Lösungskonzept / Anforderung	Shapley-Lösung	Nucleolus	τ-Wert	Dutta-Ray-Lösung
Existenz und Eindeutigkeit (Anf. 4.4.1)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Erfüllt für $I(v) \neq \varnothing$	Erfüllt für $v \in \Gamma_Q^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Individuelle Rationalität (Anf. 4.4.2)	Erfüllt für $v \in \Gamma_S^N$	Erfüllt für $I(v) \neq \varnothing$	Erfüllt für $v \in \Gamma_Q^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Effizienz (Anf. 4.4.3)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Erfüllt für $I(v) \neq \varnothing$	Erfüllt für $v \in \Gamma_Q^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Dummy-Spieler (Anf. 4.4.4)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Erfüllt für $I(v) \neq \varnothing$	Erfüllt für $v \in \Gamma_Q^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Anonymität (Anf. 4.4.5)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Erfüllt für $I(v) \neq \varnothing$	Erfüllt für $v \in \Gamma_Q^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Additivität (Anf. 4.4.6)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Nicht erfüllt	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_Q^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Aggregatsmonotonie (Anf. 4.4.7)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^{\lvert N\rvert \geq 4}$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Koalitionsmonotonie (Anf. 4.4.8)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Strenge Monotonie (Anf. 4.4.9)	Erfüllt für $v \in \Gamma^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Populationsmonotonie (Anf. 4.4.10)	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Nicht erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$
Kernselektion (Anf. 4.5.1)	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$	Erfüllt für $I(v) \neq \varnothing$	Erfüllt für $v \in \Gamma_Q^2$ und $v \in \Gamma_Q^3$	Erfüllt für $v \in \Gamma_K^N$

Γ^N - Menge der kooperativen Spiele mit Spielermenge N; Γ_S^N - Menge der superadditiven Spiele mit Spielermenge N

Γ_K^N - Menge der konvexen Spiele mit Spielermenge N; Γ_Q^N - Menge der quasi-balancierten Spiele mit Spielermenge N

Γ_W^N - Menge der wesentlichen Spiele mit Spielermenge N; Es gilt: $I(v) \neq \varnothing$ für alle $v \in \Gamma_S^N$ und für alle $v \in \Gamma_W^N$

Die Erfüllung der einzelnen Kriterien der Leistungsgerechtigkeit ist in der Tabelle 4.16 zusammengefasst. Es wird deutlich, dass die SHAPLEY-Lösung und die DUTTA-RAY-Lösung die Anforderungen am Besten erfüllen. Der NUCLEOLUS ist in der Lage, einen überwiegenden Teil der Anforderungen für wichtige Spielklassen zu erfüllen, wohingegen der τ-Wert als nicht so leistungsfähig einzustufen ist.

4.6 Relation von Spielklassen

Im Abschnitt 4.3 auf S. 473 wurden Eigenschaften und Klassen von Spielen vorgestellt. Diese Darstellungen werden an dieser Stelle ergänzt. Dazu werden folgende Eigenschaften herangezogen:

- Monotonie (Eigenschaft 4.3.2 auf S. 474),
- Superadditivität (Eigenschaft 4.3.3 auf S. 474),
- Wesentlichkeit (Eigenschaft 4.3.4 auf S. 475),
- Konvexität (Eigenschaft 4.3.5 auf S. 475),
- Balanciertheit (Eigenschaft 4.5.3 auf S. 495).

Im Merksatz 4.2 wird gezeigt,[228] dass Konvexität eine **hinreichende** - jedoch **keine notwendige** - Bedingung für die Existenz eines nicht-leeren Kerns ist. Demzufolge ist jedes konvexe Spiel gleichzeitig auch:

- superadditiv,
- monoton und
- balanciert.

Im Folgenden soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie die Relation der balancierten Spiele zu den übrigen Klassen gestaltet ist.

- **Beispiel 4.12:**

  Ein 4-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:

$$v(S) = \begin{cases} 7 & \text{wenn } S = \{A, B\} \text{ oder } S = \{A, C\}, \\ 8 & \text{für } S = N, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

  Das Spiel ist balanciert und wesentlich, jedoch nicht:

  - *monoton,*
  - *superadditiv und*
  - *konvex.*

[228] Vgl. S. 496.

- **Beispiel 4.13:**

  Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 5 & \text{für } S = N, \\ 2 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

  Das Spiel ist balanciert und monoton, jedoch nicht:

  - *wesentlich,*
  - *superadditiv und*
  - *konvex.*

  An diesem Beispiel wird deutlich, dass Balanciertheit nicht Wesentlichkeit impliziert.

- **Beispiel 4.14:**

  Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 2 & \text{für } S = \{B\} \text{ oder } S = \{C\}, \\ 6 & \text{für } S = N, \\ 5 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

  Das Spiel ist wesentlich und monoton, jedoch nicht:

  - *balanciert,*
  - *superadditiv und*
  - *konvex.*

  Demzufolge impliziert Wesentlichkeit nicht Balanciertheit. Das letzte Beispiel soll zeigen, dass auch nicht wesentliche Spiele die übrigen Anforderungen erfüllen.

- **Beispiel 4.15:**

  Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 2 & \text{für } S = \{B\} \text{ oder } S = \{C\}, \\ 4 & \text{für } S = \{B, C\}, \\ 5 & \text{für } S = N, \\ 3 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

  Das Spiel ist ***nicht wesentlich****, erfüllt jedoch die folgenden Eigenschaften:*

  - *Konvexität und damit gleichzeitig*
  - *Balanciertheit,*
  - *Superadditivität und*
  - *Monotonie.*

- **Beispiel 4.16:**

  Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 2 & \text{wenn } S = \{B\} \text{ oder } S = \{C\} \\ 5 & \text{für } S = N, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

  Das Spiel ist balanciert, jedoch ist es nicht:

  - *wesentlich,*
  - *monoton,*
  - *superadditiv und*
  - *konvex.*

Mit diesen Beispielen wurden die Beziehungen zwischen den Klassen von Spielen anschaulich erläutert.

4.7 Sonderformen kooperativer Szenarien

4.7.1 Kostenspiele

Bei den bisherigen Darstellungen beschrieb die Koalitionsfunktion kardinale Nutzenwerte.[229] In der Realität werden diese Wert durch Gewinne oder den Kapitalwert verkörpert. Darüber hinaus ist es jedoch denkbar, dass ausschließlich aufwandseitige Größen - wie z. B. Kosten - betrachtet werden. Diese werden im weiteren Verlauf als **Kostenspiele** benannt und mit $\Gamma(N,c)$ bezeichnet.

Definition 4.29: *Die Kostenfunktion c eines Spiels $\Gamma(N,c)$ ordnet jeder Koalition S einen Kostenwert zu, so dass gilt: $c: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ und $c(\varnothing) = 0$.*

Das Ziel von Kooperationen bei Betrachtung dieser Ergebnisgrößen ist nicht die Maximierung, sondern die Minimierung des Ergebnisses. Die Superadditivität[230] ist in diesem Fall nicht ökonomisch sinnvoll anwendbar und muss übersetzt werden. Dies erfolgt durch die Subadditivität (vgl. Eigenschaft 4.7.1).

Eigenschaft 4.7.1: *Ein Spiel $\Gamma(N,c)$ ist subadditiv, wenn gilt:*

$$c(R \cup S) \leq c(R) + c(S) \;\forall\; R,S \subseteq N \quad mit \quad R \cap S = \varnothing$$

Als weitere wünschenswerte Eigenschaft von Kooperationen wurde die Konvexität angeführt.[231] Diese wird für ein Kostenspiel als Konkavität definiert.[232]

Eigenschaft 4.7.2: *Ein Spiel $\Gamma(N,c)$ ist konkav, wenn für:*

a) alle $R,S \subseteq N$, gilt: $c(S \cup R) + c(S \cap R) \leq c(R) + c(S)$

oder

b) alle $i \in N$ und $S \subseteq R \subseteq N \setminus \{i\}$ gilt: $c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R)$.

---

[229] Vgl. Def. 1.7 auf S. 22.
[230] Vgl. Eigenschaft 4.3.3 auf S. 474.
[231] Vgl. Eigenschaft 4.3.5 auf S. 475.
[232] Vgl. Fiestras-Janeiro/García-Jurado/Mosquera (2011: 4).

Auf Basis der Kostenfunktion wird die Funktion der Kostenreduktion ermittelt. Diese ist die Koalitionsfunktion des korrespondierenden Kostenreduktionsspiels. Die Überführung erfolgt durch die Definition 4.30.[233]

Definition 4.30: *Die Koalitionsfunktion für $\Gamma(N,v)$ ergibt sich aus der Kostenfunktion $\Gamma(N,c)$ wie folgt: $v(S) = -c(S) + \sum_{i \in S} c(\{i\})$ für alle $S \subseteq N$.*

Daraus folgt, dass die Subadditivität der Kostenfunktion bei konstanten Größen auf der Erlösseite zu einer superadditiven Koalitionsfunktion führt.[234] Zugleich wird deutlich, dass aus einer konkaven Kostenfunktion - bei identischen Erlösgrößen - eine konvexe Koalitionsfunktion entsteht.

Die übliche Vorgehensweise zur Lösung von Kostenreduktionsspielen ist folgende:

a) Die Kostenfunktion $\Gamma(N,c)$ wird mit Definition 4.30 in die Koalitionsfunktion $\Gamma(N,v)$ umgewandelt.
b) Auf diese Koalitionsfunktion $\Gamma(N,v)$ wird eines der dargestellten Lösungskonzepte (Shapley-Lösung, Nucleolus, τ-Wert oder Dutta-Ray-Lösung) angewendet.
c) Damit ergeben sich die anteiligen Beträge der Spieler an der gemeinsam erzielten Kostenreduktion. Der anteilige Betrag eines Spielers i an dem Kostenreduktionsspiel (N,v) wird mit $\lambda_i(v)$ bezeichnet.
d) Es sollte geprüft werden, ob die Lösungen Kernbestandteile sind bzw. sollte vor Anwendung des Lösungskonzeptes untersucht werden, welche Eigenschaften das Spiel aufweist (z. B. Konvexität).
e) Damit ist jedoch noch nicht die Frage beantwortet, welchen Betrag jeder Spieler an den Gesamtkosten zu tragen hat. Deshalb wird im nächsten Schritt der Betrag eines Spielers an der Kostenreduktion $\lambda_i(v)$ von den Kosten der Stand-alone-Alternative $c(\{i\})$ abgezogen.

Es resultiert der Anteil des Spielers i an den Gesamtkosten (nicht an der Kostenreduktion) mit Definition 4.31.

Definition 4.31: *Der anteilige Betrag des Spielers i an den Gesamtkosten resultiert mit $c_i = c(\{i\}) - \lambda_i(v)$ für alle $i \in N$.*

Es wird deutlich, dass aus dem Ziel der kooperativen Spieltheorie auf Basis der Koalitionsfunktion (Identifikation eines leistungsgerechten Anteils) bei Verwendung von Kostenfunktionen das Ziel **„Identifikation von verursachungsgerechten Anteilen“** resultiert. Zur Erläuterung wird das Beispiel 4.17 herangezogen.

[233] Vgl. Wiese (2005: 111); Müller (2017: 267).
[234] Vgl. Holler/Illing/Napel (2019: 289–290).

Beispiel 4.17:

Es werden vier landwirtschaftliche Betriebe betrachtet, die im Bereich der Milchverarbeitung tätig sind.[235] *Die Unternehmen sind durch den gestiegenen Wettbewerbsdruck gezwungen, die bisher getrennten Molkereien zusammenzulegen. Die Unternehmen haben folgende Milchmengen prognostiziert, die zu verarbeiten sind: Unternehmen A und C jeweils 1.500 hl, Unternehmen B 1.000 hl und Unternehmen D 2.000 hl. Die technischen Restriktionen erlauben die Dimensionierung der Anlagen entsprechend der Tabelle 4.17.*

Tab. 4.17: Eingangsdaten des Beispiels 4.17. Quelle: Eigene Darstellung.

Merkmale / Anlagentyp	Jährliche Leistung [hl]	Gesamtkosten [€]	Kosten je Einheit [€/hl]
Klein	1.500	200.000	133,33
Mittel	3.000	280.000	93,33
Groß	4.000	330.000	82,50
Kooperativ	6.000	500.000	83,33

Nun stellt sich die Frage, welche Anlagekombination ökonomisch vorteilhaft ist und wie die Kosten dieser Anlage auf die Unternehmen zu verteilen sind. Folgende traditionelle Aufteilungsmöglichkeiten bieten sich an:

- *Mittels der Gleichverteilung würden pro Unternehmen 125.000 € Kosten kalkuliert. Dies wäre jedoch gegenüber Unternehmen B ungerecht, da dieses Unternehmen lediglich ein Sechstel des Gesamtvolumens verursacht.*
- *Die Gesamtkosten der Großanlage könnten dem Verursachungsprinzip entsprechend nach der Menge der zu verarbeitenden Milch geschlüsselt werden. Unternehmen A und C würden bei der Kooperativanlage und dem Preis von 83 $\frac{1}{3}$ € je hl jeweils 125.000 € bezahlen, Unternehmen B hingegen lediglich 83.333,33 €, und Unternehmen D müsste 166.666,67 € Kosten übernehmen. Gegen eine derartige Schlüsselung spricht der Umstand, dass sich die Unternehmen A, B und C zusammenschließen und eine kleinere Anlage für 330.000 € errichten könnten. Damit würden diese Unternehmen Kosten von 270.000 € im Vergleich zur Stand-alone-Lösung reduzieren. Gleichzeitig wäre der bei dieser Anlage resultierende Kostensatz von 82,50 € je hl geringer als im Fall der Kooperativanlage. Deshalb stellt sich aus Sicht dieser Unternehmen die Frage, warum sie mit dem Unternehmen D eine Kooperativanlage errichten sollen.*

Die Kostenfunktion dieser Konstellation ist in der Tabelle 4.18 zu sehen.

Tab. 4.18: Kostenfunktion der Molkereivarianten. Quelle: Eigene Darstellung

S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)
ø	0	{**D**}	280	{**B**,**C**}	280	{**A**,**B**,**D**}	480
{**A**}	200	{**A**,**B**}	280	{**B**,**D**}	280	{**A**,**C**,**D**}	500
{**B**}	200	{**A**,**C**}	280	{**C**,**D**}	330	{**B**,**C**,**D**}	480
{**C**}	200	{**A**,**D**}	330	{**A**,**B**,**C**}	330	{**A**,**B**,**C**,**D**}	500

[235] Dieses Beispiel basiert auf Müller (2017: 275–280).

Um die Frage der Kostenaufteilung zu beantworten, wird im ersten Schritt aus der Kostenfunktion unter Verwendung der Definition 4.30 die Kostenreduktionsfunktion gebildet (vgl. Tabelle 4.19).

Tab. 4.19: Kostenreduktionsfunktion der Molkereivarianten. Quelle: Eigene Darstellung.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	0	{B,C}	120	{A,B,D}	200
{A}	0	{A,B}	120	{B,D}	200	{A,C,D}	180
{B}	0	{A,C}	120	{C,D}	150	{B,C,D}	200
{C}	0	{A,D}	150	{A,B,C}	270	{A,B,C,D}	380

Dies ist die Koalitionsfunktion, auf welche die beschriebenen Lösungsverfahren angewendet werden können. Das vorliegende Spiel ist superadditiv, jedoch nicht konvex. Da das Spiel nicht konvex ist, besteht die Möglichkeit, dass keine stabile Lösung existiert. Eine Analyse des Spiels auf die Existenz eines nicht-leeren Kerns zeigt jedoch, dass dieser existiert (vgl. Abbildung 4.15).

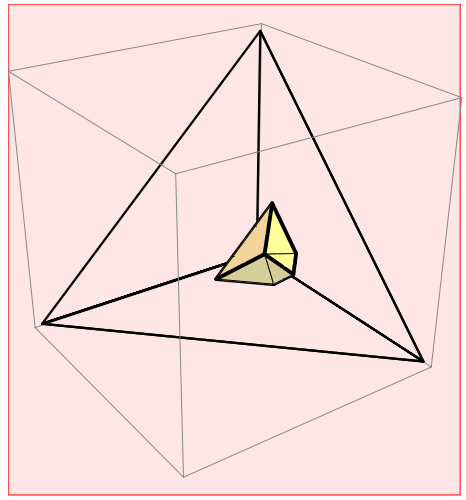


Abb. 4.15: Kern des Kostenaufteilungsspiels für Bspl. 4.17. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Meinhardt (2016).

Demzufolge gibt es eine stabile Lösung, d. h. eine gerechte Aufteilung der gemeinsam erzielten Kostenreduktion. Im ersten Schritt werden die Shapley*-Werte ermittelt. Es resultieren mit Definition 4.16 von S. 500 die Werte (in Tsd.* €*):*

$\phi_A(v) = 92{,}5\,,\ \phi_B(v) = 107{,}5\,,\ \phi_C(v) = 92{,}5$ *sowie* $\phi_D(v) = 87{,}5\,.$

Die Shapley*-Lösung liegt jedoch nicht im Kern. Das wird bei der Betrachtung der Koalition* $\{B,D\}$ *deutlich. Diese Koalition erwirtschaftet eine Kostenreduktion in Höhe von 200 Tsd.* €*, erhält mittels der* Shapley*-Verteilung jedoch nur 195 Tsd.* € *zugeteilt. Demzufolge besteht kein Anreiz für diese Unternehmen, sich an der 4-Unternehmens-Koalition zu beteiligen. Dies wird auch in der Abbildung 4.16 deutlich.*

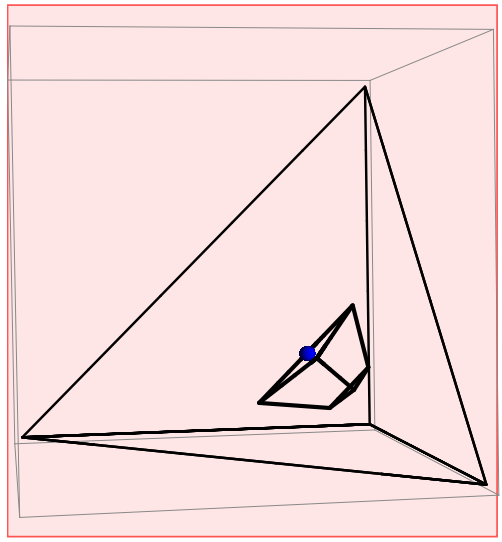


Abb. 4.16: Lage der SHAPLEY-Lösung für Bspl. 4.17. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Meinhardt (2016).

Da festgestellt wurde, dass ein nicht-leerer Kern existiert, muss eine Lösung gefunden werden, welche Bestandteil des Kerns ist. Es wurde darauf hingewiesen, dass der Nucleolus immer zum nicht-leeren Kern gehört.[236] *Für das beschriebene Kostenreduktionsspiel ergibt sich der Nucleolus mit:* $nuc(v) = (80.000, 130.000, 80.000, 90.000)$.

Dies stellt eine faire Kostenaufteilung dar. In der grafischen Darstellung wird deutlich (vgl. Abbildung 4.17), dass der NUCLEOLUS *- per definitionem - zum nicht-leeren Kern gehört. Die Aufteilung der Gesamtkostenreduktion von 380.000 € entsprechend des* NUCLEOLUS *führt zu der Kostenaufteilung zwischen den Unternehmen gemäß Definition 4.31 auf S. 532. Es ergeben sich die folgenden Kostenanteile:*

$$\begin{aligned} c_A &= 200.000\,€ - 80.000\,€ &&= 120.000\,€, \\ c_B &= 200.000\,€ - 130.000\,€ &&= 70.000\,€, \\ c_C &= 200.000\,€ - 80.000\,€ &&= 120.000\,€, \\ c_D &= 280.000\,€ - 90.000\,€ &&= 190.000\,€. \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse werden mit der Tabelle 4.17 verglichen. Es hätte für die Unternehmen A, B und C die Möglichkeit bestanden, gemeinsam eine Großanlage mit 4.000 hl Volumen zu errichten. Dies hätte zu Kosten von 82,50 € pro hl geführt. Mit der Gemeinschaftsanlage fallen für diese Unternehmen Kosten von lediglich 77,50 € pro hl an. Damit ist die Kooperation vorteilhaft.

[236] Vgl. Tabelle 4.16 auf S. 528.

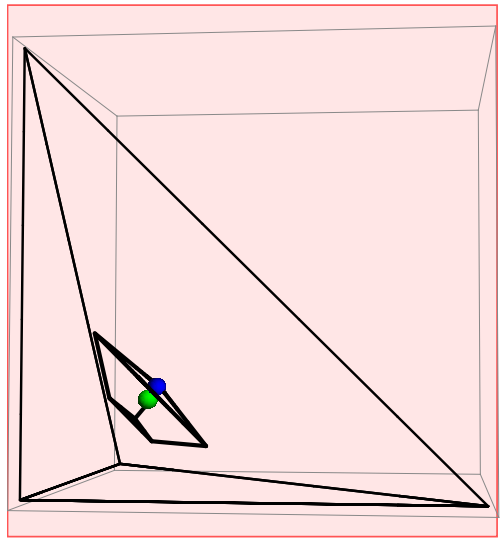


Abb. 4.17: Lage von SHAPLEY-Lösung und NUCLEOLUS. Quelle: Eigene Darstellung auf Basis von Meinhardt (2016).

4.7.2 Versorgungsnetzspiele

Eine weitere Klasse von Spielen besteht in den sog. Minimalkostenspannbaum-Spielen („minimum cost spanning tree game"). Diese Modelle gehen von einer zweidimensionalen Ebene aus und versuchen, ein Versorgungsnetz zwischen gegebenen Punkten zu finden, welches kostenminimal ist. Darauf aufbauend wird ein kooperatives Spiel definiert und es werden die verursachungsgemäßen Kostenanteile für die Versorgungsorte bestimmt.

Es gelten folgende Annahmen und Notationen:

- Die Menge der Spieler $N = \{1,2,...,n\}$ besteht aus Orten (Knoten) i, welche mittels stationärer Leitungen vom Punkt $0 \notin N$ zu versorgen sind.
- Das Netz besteht aus der nicht-leeren, endlichen Menge an Knoten $N_0 = N \cup \{0\}$.[237]
- Die Verbindung zweier Knoten i und j mit $i,j \in N_0$ und $i \neq j$ erfolgt durch die Sehne $d_{ij} = d_{ji}$.
- Die Kosten der Verbindung von i mit j werden beschrieben mit $c_{ij} = c_{ji} \in \mathbb{R}$, wobei $i,j = (0,1,2,...n)$.
- Die Menge aller Verbindungen wird bezeichnet mit A.

[237] Vgl. Alidaee (1999: 109–110); Rosenthal (2013: 133); Trudeau (2014: 138–139).

- Der Graph G wird definiert durch die Menge der Knoten N_0 und die Menge der Verbindungen A, so dass $G = (N_0, A)$.
- Dieses Netz weist keine Schleifen auf.[238]
- Ein Teilgraph g über N_0 ist definiert mit $g = \{(i,j) \,|\, i,j \in N_0\}$.

Um die Frage nach der kostenminimalen Gestaltung dieses Versorgungsnetzes zu beantworten, werden in einem ersten Schritt aus allen, potenziell möglichen Verbindungswegen diejenigen Verbindungen ausgewählt, welche die geringsten Kosten verursachen. D. h. aus G wird die kostenminimale Teilmenge an Knoten und Verbindungen g_{min} ausgewählt. Damit entsteht ein Spannbaum minimaler Kosten. Der resultierende Graph g_{min} resultiert aus Definition 4.32.[239]

Definition 4.32: *Der Graph der kostenminimalen Verbindungen g_{min} ist definiert durch:*

$$g_{min} = \arg\min_{g \in A} \left[\sum_{(i,j) \in g} c_{ij} \right].$$

Darauf aufbauend wird ein kooperatives Spiel - das Minimalkostenspannbaum-Spiel (MKSS) - generiert, in dem die zu versorgenden Orte die Spieler darstellen. Der Teilgraph des Netzes, der zur kostenminimalen Versorgung der Koalition S erforderlich ist, wird bezeichnet mit $S_{g_{min}}$. Die Kosten der verschiedenen Verbindungs-Koalitionen werden nach Definition 4.33 ermittelt und bilden die Kostenfunktion.[240] Auf dieser Basis entsteht ein Kostenspiel $\Gamma(N,c)$.

Definition 4.33: *Die Kostenfunktion $c : 2^N \to \mathbb{R}$ eines MKSS $\Gamma(N,c)$ ist definiert durch $c(S) = \sum_{(i,j) \in S_{g_{min}}} c_{ij}$ für $\varnothing \neq S \subseteq N$ und $c(\varnothing) = 0$.*

Die weitere Vorgehensweise gestaltet sich - identisch zu den Kostenreduktionsspielen - wie folgt:

a) Umwandlung der Kostenfunktion aus Definition 4.33 in die Koalitionsfunktion der Kostenreduktion mittels Definition 4.30 von S. 532,
b) Anwendung eines Lösungskonzepts und Ermittlung des anteiligen Betrags an der Kostenreduktion $\lambda_i(v)$,
c) Ermittlung der Kostenbeträge c_i auf Basis von Definition 4.31 auf S. 532.

Zum besseren Verständnis wird das Beispiel 4.18 betrachtet.[241]

[238] Vgl. Curiel (1997: 131).
[239] Vgl. Kar (2002: 267).
[240] Vgl. Granot/Huberman (1981: 3); Granot/Huberman (1984: 325).
[241] Vgl. Tijs/Driessen (1986: 1025–1026). Zu Anwendungsbeispielen aus dem Bereich der Stromtrassenplanung vgl. Müller (2016); Mueller (2017c).

Beispiel 4.18:

Ein Wasserversorger plant den Neubau des Rohrleitungssystems vom Zentralbrunnen zu drei Verbrauchern. Dabei besteht die Möglichkeit, jeden Verbraucher separat anzuschließen oder die Leitung unter Nutzung des Grundstückes eines Verbrauchers zu einem anderen Verbraucher zu verlegen (vgl. Abbildung 4.18). Diese Alternative ist sowohl beim Anschluss von zwei Verbrauchern als auch beim Anschluss aller Verbraucher möglich. In der Abbildung 4.18 sind die Kosten der verschiedenen Trassenführungen vermerkt.

Aus diesen Informationen resultiert die Funktion der minimalen Kosten der Anschlussvarianten gemäß Definition 4.33 in Tabelle 4.20. Bei der Erstellung der Kostenfunktion ist zu beachten, dass entsprechend Definition 4.32 aus der Menge aller Verbindungen A zur Versorgung von i, j nur diejenige Verbindung mit den minimalen Kosten gewählt wird.

Die kürzeste und damit kostengünstigste Variante ist offensichtlich die Verbindung aller Verbraucher über den Verbraucher A als Verteiler. Dies erfordert Investitionen in Höhe von 140 €. Daraus resultiert jedoch die Frage, wie diese Kosten zu verteilen sind. Da sämtliche Leitungen durch das Grundstück von Verbraucher A verlaufen, erbringt dieser einen hohen Nutzen für das Verteilernetz.

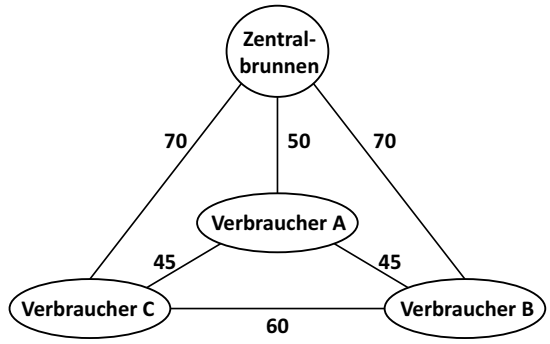


Abb. 4.18: Verbindungsmöglichkeiten der Wasserversorgung. Quelle: Eigene Darstellung.

Tab. 4.20: Kostenfunktion der Wasserversorgung. Quelle: Eigene Darstellung.

S / **Funktion**	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
c(S)	0	50	70	70	95	95	130	140

Werden die Informationen aus der Tabelle 4.20 in der bekannten Form grafisch dargestellt, resultiert die Abbildung 4.19. Die Darstellung zeigt, dass der Kern dieses Spiels nicht leer ist.

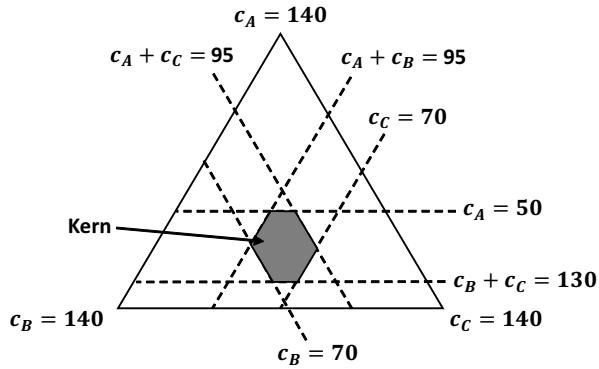


Abb. 4.19: Kern des Kostenspiels. Quelle: Eigene Darstellung mit den Eingangsdaten aus der Tabelle 4.20.

Um die Frage der Kostenaufteilung zu beantworten, wird im ersten Schritt aus der Kostenfunktion die Koalitionsfunktion gebildet (vgl. Tabelle 4.21). Dafür wird die Differenz zwischen dem Minimum der getrennten Leitungsführung und der gemeinsamen Leitungsführung ermittelt. So ergeben sich z. B. für die getrennte Versorgung der Verbraucher $\{A\}$ und $\{B\}$ Gesamtkosten in Höhe von: $c(\{A\}) + c(\{B\}) = 120$ €. Dieser Wert ist der gemeinsamen Verbindung über den Verbraucher A von 95 € gegenüber zu stellen. Dies führt zum Wert der Koalition $v(\{A,B\}) = 25$ €. Im Vergleich zu der isolierten Verbindung aller Verbraucher werden durch die zentrale Trassenführung über Verbraucher $\{A\}$ Kosten in Höhe von 50 € reduziert, so dass $v(N) = 50$ €.

Tab. 4.21: Kostenreduktionsfunktion der Wasserversorgung. Quelle: Eigene Darstellung.

S / Funktion	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
v(S)	0	0	0	0	25	25	10	50

Die Shapley*-Lösung ergibt* $\phi_A(v) = \frac{65}{3}$, $\phi_B(v) = \phi_C(v) = \frac{85}{6}$. *Diese Werte werden von den Kosten der isolierten Leitungsführung zu dem jeweiligen Verbraucher abgezogen, was mit Definition 4.31 zu den Kostenanteilen mit folgenden Werten führt:*

$$c_A = 50 - \frac{65}{3} = 28\frac{1}{3};\ c_B = c_C = 70 - \frac{85}{6} = 55\frac{5}{6}.$$

Damit werden die Gesamtkosten in Höhe von 140 € von Verbraucher 1 zu einem geringeren Teil getragen, da dieser am meisten zu dem Koalitionsergebnis beiträgt. Die Kos-

tenzuteilung mit der Shapley*-Lösung ist Bestandteil des Kerns (vgl. Abbildung 4.20) und deshalb stabil.*

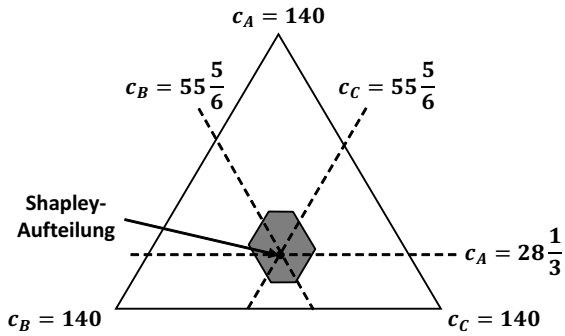


Abb. 4.20: Lage der Shapley-Aufteilung des Kostenspiels. Quelle: Eigene Darstellung mit den Eingangsdaten aus der Tabelle 4.20

Anstelle der Shapley-Lösung kann auch ein anderes Lösungskonzept zum Einsatz kommen. Die prinzipielle Vorgehensweise ist identisch.

Die Klasse der MKSS wird schon lang und intensiv diskutiert.[242] Eine interessante Eigenschaft der MKSS ist der Fakt, dass der Kern dieser Spiele **niemals leer** ist.[243] Jedoch muss darauf hingewiesen werden, dass ein MKSS zwar **immer balanciert**, jedoch **nicht immer konvex** ist,[244] wie das Beispiel 4.19 zeigt.

Beispiel 4.19:

Die Situation ist in Abbildung 4.21 geschildert, woraus die Kosten- und die Koalitionsfunktion abgeleitet und in der Tabelle 4.22 zusammengefasst werden.

Tab. 4.22: Kosten- und Koalitionsfunktion des nicht konvexen MKSS. Quelle: Eigene Darstellung.

S / Funktion	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
c(S)	0	30	20	50	45	50	45	65
v(S)	0	0	0	0	5	30	25	35

[242] Vgl. Claus/Kleitman (1973); Bird (1976); Granot/Huberman (1984); Estévez-Fernández/Reijnierse (2014).
[243] Vgl. Granot/Huberman (1981: 6–7); Tijs et al. (2006: 309).
[244] Vgl. Granot/Huberman (1982).

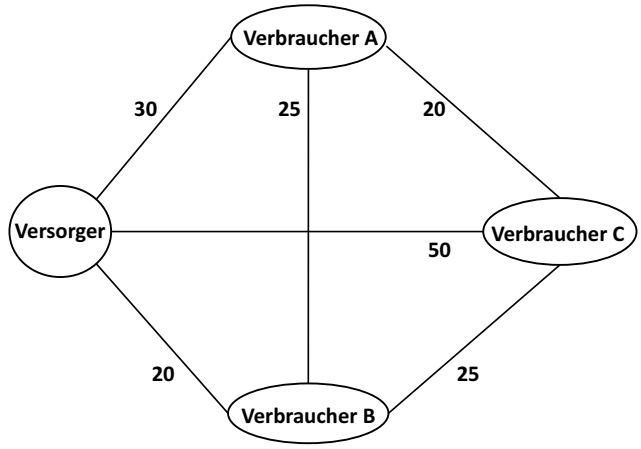


Abb. 4.21: Beispiel eines nicht konvexen MKSS. Quelle: Eigene Darstellung.

Die Shapley*-Lösung lautet:* $\phi_A(v) = 9\frac{1}{6}$, $\phi_B(v) = 6\frac{4}{6}$, $\phi_C(v) = 19\frac{1}{6}$. *Der Blick auf die Koalition* $\{A,C\}$ *zeigt, dass die Lösung kein Kernbestandteil ist, da die Summe der* Shapley*-Anteile lediglich* $28\frac{1}{3}$ *beträgt. Eine Überprüfung des Spiels auf Minimalbalanciertheit*[245] *zeigt, dass der Kern nicht leer ist. Der* Nucleolus *beträgt* $nuc(v) = (6\frac{1}{4}, \frac{5}{2}, 26\frac{1}{4})$ *und liegt definitionsgemäß im Kern.*

Situationen, die mit dem Modell minimaler Kostenspannbäume abgebildet werden, sind klassischerweise Versorgungsnetzwerke.[246] Mit Blick auf die erforderliche Erneuerung und Erweiterung der Elektroenergienetze in Deutschland kann ebenfalls ein kooperatives Szenario beobachtet werden.

Alle Grundstückseigentümer können als Teilnehmer einer großen Energieverbrauchskooperation interpretiert werden. Darüber hinaus existiert mit der Bundesnetzagentur und den angeschlossenen bzw. untergeordneten Behörden ein reales Pendant zum theoretischen Konstrukt der Zentralinstanz. Die Kosten der Netznutzung und des Netzausbaus werden ermittelt und die daraus resultierenden Netzentgelte werden von den Endkunden eingezogen. Zusätzlich kann festgestellt werden, dass die Planung der Trassen - unter Einbindung lokaler Akteure und unter Berücksichtigung derer Interessen - zentral koordiniert und abgestimmt wird.

Für die Gesamtheit der Nutzer ist es das Ziel, die kostenminimale Trassenführung zu realisieren. Davon profitieren sämtliche Nutzer, da der Netzausbau von allen Teilnehmern über das Netzentgelt finanziert wird. Seitenzahlungen zwischen den Netznutzern sind in Deutschland demzufolge gesetzlich

[245] Vgl. Eigenschaft 4.5.6 auf S. 498.

[246] Vgl. Junqueira et al. (2007); Lima et al. (2008); Nikoukar/Haghifam (2012); Hasan et al. (2014).

vorgeschrieben.[247] Mit den MKSS können für diese Situationen die kostenminimalen Routen und gerechte Ausgleichszahlungen für die Eigentümer der Grundstücke identifiziert werden, über welche diese kostenminimalen Trassen geführt werden.[248]

4.7.3 Flughafenspiele

In einigen Fällen sind Investitionen in Ressourcen erforderlich, die von verschiedenen Nutzern gemeinsam genutzt, dabei aber unterschiedlich ausgelastet werden. Bei der Errichtung der Ressource wurde derjenige Nutzer mit dem höchsten Belastungsprofil als Referenznutzer definiert und die Anlage auf sein Profil hin dimensioniert. Die gesamte Anlage wird jedoch auch von Nutzern mit einem geringeren Anforderungsprofil genutzt. Damit stellt sich die Frage nach einer gerechten Aufteilung der Gemeinkosten dieser Anlage in einer Abrechnungsperiode. Diese Frage wurde erstmals bei der Ermittlung der verursachungsgerechten Verteilung von Gemeinkosten der Rollbahnnutzung gestellt und beantwortet, worauf die Bezeichnung „**airport games**“ zurückzuführen ist.[249] In diesem Fall sind Rollbahnen auf die Ansprüche des größten Flugzeugtyps ausgerichtet, selbstverständlich wird die Landebahn auch von kleineren Flugzeugtypen genutzt. Die zugrunde liegende Argumentation ist folgende: Die Gemeinkosten setzen sich aus dem Kapitaldienst (Abschreibungen und kalkulatorische Zinsen) und aus anderen nicht nutzungsabhängigen, fixen Kosten zusammen. Diese Faktoren werden maßgeblich von der Dimensionierung (Länge, Breite und Auslegung) der Rollbahn determiniert. Es wird nun angenommen, dass für jeden Typ eine separate Bahn zu errichten ist. Die flugzeugtypabhängigen Gemeinkosten werden auf Basis derjenigen Dimensionierung ermittelt, die dieser Flugzeugtyp erfordern würde, wenn die Rollbahn ausschließlich und exklusiv für ihn gebaut und betrieben worden wäre. Das führt zur Summe aus annualisierten Investitionskosten und jährlichen Fixkosten pro Flugzeugtyp c_k. Der Kostenwert c_k ist demzufolge ausschließlich **typabhängig**, jedoch nicht **nutzungsabhängig**.

Das kooperative Spiel mit $N = \{1,2,...,n\}$ wird wie folgt definiert: Es existieren m unterschiedliche Flugzeugtypen, mit der Anzahl von n_k Bewegungen des Typs k, so dass $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$. Die Menge der Bewegungen von Typ k wird beschrieben durch N_k, woraus sich die Menge aller Bewegungen er-

[247] Vgl. Müller (2016: 254–255).
[248] Vgl. Müller (2016: 257–264); Mueller (2017c).
[249] Vgl. Littlechild/Owen (1973); Littlechild/Thompson (1977).

gibt mit $N = \bigcup_{k=1}^{m} N_k$.[250] Auf diese Weise wird **jede Bewegung** (Start und Landung) eines Flugzeugtyps als ein **Spieler** interpretiert. Wichtig für die weitere Vorgehensweise ist die Anordnung der Kosten für jeden Flugzeugtyp c_k in aufsteigender Reihenfolge, so dass: $0 < c_1 < ... < c_m$. Auf Basis dieser Festlegungen kann die Kostenfunktion entsprechend Definition 4.34 ermittelt werden.

Definition 4.34: *Die Kostenfunktion eines Flughafenspiels $\Gamma(N,c)$ ist definiert durch: $c(\varnothing) = 0$ und $c(S) = max\{c_k | S \cap N_k \neq \varnothing\}$ für alle $S \subseteq N$.*

Aus der Definition 4.34 wird deutlich, dass die Kosten jeder Koalition ausschließlich durch den Spieler mit den höchsten Kosten definiert werden. Die Interpretation ist nachvollziehbar: die Ressource wurde mit Blick auf den Spieler mit dem höchsten Anforderungsprofil dimensioniert. Deshalb richten sich die Kosten jeder Koalition, zu der dieser Spieler gehört, auch ausschließlich nach diesem Spieler. Das ursprünglich vorgeschlagene Aufteilungsprocedere war folgendes:[251]

- Verteile die Kosten des kleinsten Flugzeugtyps gleichmäßig auf die gesamte Spielermenge.
- Verteile die Zusatzkosten, welche der zweitkleinste Flugzeugtyp im Vergleich zum kleinsten Flugzeugtyp verursacht, gleichmäßig auf die gesamte Spielermenge außer auf den kleinsten Flugzeugtyp.
- Setze das Vorgehen fort, bis alle Kosten verteilt sind.

Allgemeingültig kann der Kostenanteil für einen Spieler i mit $i \in N$ gemäß Definition 4.35 bestimmt werden. Darin beschreibt r_l die Anzahl an Nutzungsaktivitäten von Typen, welche genauso groß oder größer sind wie der Typ i.

Definition 4.35: *Der Kostenanteil des Nutzertyps i lässt sich ermitteln aus:* $x_i = \sum_{k=1}^{i} \frac{c_k - c_{k-1}}{r_l}$.

Zur Erläuterung wird das Beispiel 4.20 betrachtet.

[250] Vgl. Peleg/Sudhölter (2007: 15); González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 256).

[251] Vgl. Littlechild/Owen (1973: 370); González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 257).

Beispiel 4.20:

Es wird eine Rollbahn betrachtet, welche von drei Flugzeugtypen genutzt wird. Es gilt für die vorliegende Periode $|N_1| = 1$, $|N_2| = |N_3| = 2$. *D. h. Flugzeugtyp 1 verzeichnet eine Bewegung, während die anderen Typen jeweils zwei Bewegungen verzeichneten. Daraus folgt:* $N_1 = \{A\}$, $N_2 = \{B\},\{C\}$ *und* $N_3 = \{D\},\{E\}$. *Typabhängige Gemeinkosten in der Periode für die Flugzeugtypen ergeben sich mit:* $c_1 = 10$, $c_2 = 15$ *sowie* $c_3 = 35$. *Als Lösung resultieren die Kostenanteile aus Definition 4.35 mit:*

$$
\begin{aligned}
x_A &= \frac{10}{5} && = 2,\\
x_B &= \frac{10}{5} + \left(\frac{15-10}{4}\right) && = \frac{13}{4},\\
x_C &= \frac{10}{5} + \left(\frac{15-10}{4}\right) + \left(\frac{15-15}{4}\right) && = \frac{13}{4},\\
x_D &= \frac{10}{5} + \left(\frac{15-10}{4}\right) + \left(\frac{15-15}{4}\right) + \left(\frac{35-15}{2}\right) && = \frac{53}{4},\\
x_E &= \frac{10}{5} + \left(\frac{15-10}{4}\right) + \left(\frac{15-15}{4}\right) + \left(\frac{35-15}{2}\right) + \left(\frac{35-35}{2}\right) && = \frac{53}{4},\\
& && \textit{Summe} = 35.
\end{aligned}
$$

Es konnte gezeigt werden, dass diese Resultate identisch zur Shapley*-Lösung des korrespondierenden Kostenreduktionsspiels sind.*[252] *Um dies zu demonstrieren, wird in einem ersten Schritt die Kostenfunktion entwickelt. Allgemeingültig lässt sich die Kostenfunktion mit Definition 4.34 wie folgt formulieren:*

$$
c(S) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } S = \varnothing, \\ 10 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 15 & \text{für } S \cap N_2 \neq \varnothing \text{ und } S \cap N_3 = \varnothing, \\ 35 & \text{ansonsten.} \end{cases}
$$

Die ausführliche Darstellung der Kostenfunktion auf Basis der Definition 4.34 ist in Tabelle 4.23 zu sehen.

Tab. 4.23: Kostenfunktion des Flughafenspiels. Quelle: Eigene Darstellung.

S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)
ø	0	{A,D}	35	{A,B,C}	15	{B,D,E}	35
{A}	10	{A,E}	35	{A,B,D}	35	{C,D,E}	35
{B}	15	{B,C}	15	{A,B,E}	35	{A,B,C,D}	35
{C}	15	{B,D}	35	{A,C,D}	35	{A,B,C,E}	35
{D}	35	{B,E}	35	{A,C,E}	35	{A,B,D,E}	35
{E}	35	{C,D}	35	{A,D,E}	35	{A,C,D,E}	35
{A,B}	15	{C,E}	35	{B,C,D}	35	{B,C,D,E}	35
{A,C}	15	{D,E}	35	{B,C,E}	35	{A,B,C,D,E}	35

Tabelle 4.23 verdeutlicht anschaulich die Kostenstruktur. Jede Koalition, die den Typ mit den höchsten Kosten beinhaltet, weist genau diesen Kostenwert auf, unabhängig davon,

[252] Vgl. Littlechild/Owen (1973).

ob und wie viele andere Typen in der Koalition beteiligt sind. Aus der Kostenfunktion in Tabelle 4.23 wird mit der Definition 4.30 auf S. 532 die Koalitionsfunktion v des Spiels Γ(N,v) ermittelt (vgl. Tabelle 4.24).

Tab. 4.24: Koalitionsfunktion des Flughafenkostenreduktionsspiels. Quelle: Eigene Darstellung.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
ø	0	{**A**,**D**}	10	{**A**,**B**,**C**}	25	{**B**,**D**,**E**}	50
{**A**}	0	{**A**,**E**}	10	{**A**,**B**,**D**}	25	{**C**,**D**,**E**}	50
{**B**}	0	{**B**,**C**}	15	{**A**,**B**,**E**}	25	{**A**,**B**,**C**,**D**}	40
{**C**}	0	{**B**,**D**}	15	{**A**,**C**,**D**}	25	{**A**,**B**,**C**,**E**}	40
{**D**}	0	{**B**,**E**}	15	{**A**,**C**,**E**}	25	{**A**,**B**,**D**,**E**}	60
{**E**}	0	{**C**,**D**}	15	{**A**,**D**,**E**}	45	{**A**,**C**,**D**,**E**}	60
{**A**,**B**}	10	{**C**,**E**}	15	{**B**,**C**,**D**}	30	{**B**,**C**,**D**,**E**}	65
{**A**,**C**}	10	{**D**,**E**}	35	{**B**,**C**,**E**}	30	{**A**,**B**,**C**,**D**,**E**}	75

Mit den Eingangsdaten aus der Tabelle 4.24 ergeben sich folgende Shapley-*Werte:* $\phi_A(v) = 8$, $\phi_B(v) = \phi_C(v) = \frac{47}{4}$, $\phi_D(v) = \phi_E(v) = \frac{87}{4}$. *Die anschließende Verwendung der Def. 4.31 von S. 532 führt zu denselben Ergebnissen, wie die Anwendung der Def. 4.35 von S. 543 auf die Kostenfunktion.*

Ein Flughafenkostenspiel ist immer konkav und das damit verbundene Reduktionsspiel ist demzufolge **immer konvex**. Deshalb ist der Kern dieser Spiele niemals leer, diese Spiele sind also immer balanciert.[253] Daraus folgt auch, dass sämtliche anderen vorgestellten Konzepte auf die Koalitionsfunktion angewendet werden können.

Interessant ist, dass der **Nucleolus** für diese Spiele die Anforderung der **Populationsmonotonie**[254] erfüllt.[255] Aus dem Fakt, dass der Nucleolus diese Anforderung jedoch **nicht für die gesamte Klasse konvexer Spiele** erfüllt,[256] kann geschlussfolgert werden, dass konvexe Spiele und Flughafenspiele eine nicht-leere Schnittmenge aufweisen.

Der **τ-Wert** hingegen erfüllt auch für Flughafenspiele die Populationsmonotonie **nicht**.[257]

Die Kernfrage bei diesem Vorgehen ist die Ermittlung der - hypothetischen - Gemeinkosten der kleiner dimensionierten Anlagenvarianten. Im Gegensatz zur real existierenden Anlage, die für den größten Nutzertyp dimensioniert wurde, werden die kleinen Varianten nicht errichtet. Einen Ausweg bieten

[253] Vgl. Potters/Sudhölter (1999: 88); González-Díaz et al. (2016: 107).
[254] Vgl. Anforderung 4.4.10 auf S. 489.
[255] Vgl. Mueller (2018a: 414).
[256] Vgl. die Diskussion im Abschn. 4.5.3.2 auf S. 510.
[257] Vgl. Mueller (2018a: 416).

hier die Kostenwachstumsgesetze.[258] Mit diesen können auf Grundlage der technisch-physikalischen Dimensionen die Kostenrelationen abgeleitet werden.

Die Definition 4.35 weist Ähnlichkeiten mit der mehrstufigen Divisionskalkulation auf.[259] Jedoch ist kein Produktionsprozess so gestaltet, wie ein Flughafenspiel konstruiert ist, weshalb die Verfahren nicht übertragbar sind. Deshalb muss festgestellt werden, dass die potenziellen Einsatzgebiete primär im Infrastrukturbereich zu finden sind, wo die Investitionen und die daraus resultierenden Gemeinkosten durch lasten- oder größenabhängige Nutzungseigenschaften determiniert werden. So lassen sich z. B. Nutzungsentgelte für Wasserwege bzw. Wasserinfrastrukturprojekte (z. B. Schiffshebewerke), Liegegebühren in Häfen oder Maut-Entgelt-Systeme für Straßen oder Schienenwege gestalten. In der betrieblichen Produktion werden die Kostenstrukturen kaum von diesen Parametern definiert.

4.8 Rationierungsprobleme und Rationierungsspiele

4.8.1 Rationierungsprobleme und Aufteilungsregeln

Es gibt eine Reihe von Situationen, in denen einem Angebot eine höhere Nachfrage gegenübersteht, und bei denen kein Preisbildungsmechanismus zu einem Ausgleich dieser Faktoren führt. Die Darstellung wird im weiteren Verlauf auf Situationen eingegrenzt, in denen einer verfügbaren Menge einer beliebig teilbaren Ressource (z. B. Geld, Zeit, Wasser, Elektroenergie) eine größere Summe von Ansprüchen gegenübersteht. Aus dieser Situation resultiert die prinzipielle Frage nach einer gerechten Aufteilung. Dabei steht - wie bereits dargelegt wurde[260] - die **Aufteilungsgerechtigkeit** im Mittelpunkt.

Ein klassischer Fall ist die Insolvenz, woher die Bezeichnung „bankruptcy problem“ stammt. Das Insolvenzrecht regelt die Rangfolge der Ansprüche, so dass diese Problematik nur noch von geringer Relevanz ist. Ökonomisch relevante Fragestellungen sind in folgenden Konstellationen anzutreffen:

- Der verfügbare Gewinn reicht nicht aus, um zugesagte Gewinnanteile ausschütten zu können. Dies ist bei Personengesellschaften wie der OHG oder der KG relevant, da den Eigentümern - wenn vertraglich keine andere Re-

[258] Vgl. Müller (2020: 514–519).

[259] Vgl. Coenenberg/Fischer/Günther (2016: 142); Müller (2020: 511).

[260] Vgl. Abschn. 4.4 auf S. 478.

gelung getroffen wurde - gemäß §121 HGB 4% auf die Kapitaleinlage zustehen.[261]
- Im Fall der Überzeichnung der Erstplatzierung von Aktien und Anleihen sind Zuteilungsregeln festzulegen.
- Kapazitätsausfälle führen zu einer vorübergehenden Einschränkung der Produktion bzw. der Versorgung, was zur Notwendigkeit der Festlegung von Kontingenten führt.
- Nachträgliche Budgetkürzungen führen in Unternehmen und öffentlichen Haushalten ebenfalls zu Rationierungssituationen.

Diese Situationen werden im weiteren Verlauf allgemeingültig als **Rationierungsproblem** bezeichnet und sind durch folgende Struktur gekennzeichnet:

- Eine **Instanz** hat in der Vergangenheit Ansprüche von Personen bzw. Institutionen festgelegt. Die Personen bzw. Institutionen werden im weiteren Verlauf als Spieler bezeichnet.
- **Nach dieser Festlegung** stellt sich heraus, dass das verfügbare Budget bzw. die verfügbaren Ressourcen **nicht ausreichen**, um alle Ansprüche zu befriedigen.
- Weder die Höhe der Ansprüche, noch das verfügbare Budget lassen sich beeinflussen. Das ist ein wesentlicher Unterschied zu den kooperativen Spielen, bei denen das Koalitionsergebnis ein Resultat der Aktivitäten der Spieler ist.[262]
- Es bestehen **keine Möglichkeiten** zu **strategischem Verhalten** der Spieler. Wenn die Spieler z. B. ex-ante wissen, dass es zu einer Verknappung kommen wird, können sie durch Abgabe einer überhöhten Meldung ihren Anteil erhöhen. Diese Fälle sind mit Mitteln der **strategischen Spieltheorie** zu lösen.
- Es stehen keine Preisbildungsmechanismen (z. B. Märkte, Auktionen) zur Verfügung, um das Budget (Angebot) und die Ansprüche (Nachfrage) in Übereinstimmung zu bringen.
- Die Gerechtigkeit der Zuteilung bemisst sich einzig und allein an der **Menge** der zugeteilten Ressource und **nicht** nach dem damit verbundenen, **individuell unterschiedlichen Nutzen**. Deshalb können weitergehende normativ-ethische Diskussionen ausgeklammert werden.

Im Folgenden wird die Summe der Ansprüche mit Q und das verfügbare Budget mit E bezeichnet. Wird nun eine Reihe von Spielern betrachtet, so beschreibt q_i den Einzelanspruch des Spielers i und es gilt $Q = \sum_{i \in N} q_i$. Sämtliche Ansprüche werden im Anspruchsvektor $\hat{q}$ in nicht absteigender Reihenfolge

[261] Vgl. §121, Abs. 1 HGB.

[262] Vgl. Abschn. 4.3 auf S. 473.

geordnet, so dass gilt: $0 \leq q_1 \leq q_2 \leq q_3 ... \leq q_n$. Damit erfolgt die Beschreibung des Rationierungsproblems in Definition 4.36.[263]

Definition 4.36: *Ein Rationierungsproblem* $(N,E,\hat{q})$ *besteht aus einer endlichen Menge an Spielern* $N = \{1,2,...,n\}$ *sowie* $E \in \mathbb{R}$ *und* $\hat{q} \in \mathbb{R}^N$ *so, dass für jedes* $i \in N$ *gilt* $q_i \geq 0$ *und* $0 \leq E \leq \sum_{i=1}^{n} q_i$.

Dieses Problem wird gelöst, indem E durch einen Auszahlungsvektor verteilt wird (vgl. Definition 4.37).

Definition 4.37: *Der Auszahlungsvektor ist eine Funktion* f*, die für ein Rationierungsproblem* $(N,E,\hat{q})$ *eine Aufteilung* $f(N,E,\hat{q}) \in \mathbb{R}^N$ *ermittelt, so dass*

$$a) \sum_{i \in N} f_i(N,E,\hat{q}) = E$$

sowie

$$b) \; f\ddot{u}r \; jedes \; i \in N \; gilt \; 0 \leq f_i(N,E,\hat{q}) \leq q_i.$$

Diese Definition ähnelt stark der Definition der Imputation eines kooperativen Spiels.[264] Bedingung a) spiegelt die Effizienz bzw. kollektive Rationalität wider und Anforderung b) wird als Beschränktheit bezeichnet, da gefordert wird, dass der Anteil eines Spielers nicht größer sein kann als seine ursprüngliche Forderung. Zur Vereinfachung wird im weiteren Verlauf $f_i(N,E,\hat{q})$ durch $f_i(\hat{q})$ ersetzt.

Es stellt sich die Frage, welche Möglichkeiten es gibt, Zuteilungsvektoren zu bestimmen, die den Anforderungen von Definition 4.37 entsprechen und gerecht sind. Jedoch können die Gerechtigkeitsaxiome, die der Entwicklung der Lösungskonzepte kooperativer Spiele zugrunde liegen, nicht herangezogen werden. Die Spieler haben **keinen Einfluss** auf die Menge der aufzuteilenden Ressource. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu der grundsätzlichen Situation der kooperativen Spiele, bei denen der Wert der Koalitionen Ergebnis von Aktivitäten der Spieler ist.

Demzufolge wird die Leistungsgerechtigkeit durch die **Aufteilungsgerechtigkeit** als Handlungsmaxime ersetzt. Wie bereits dargestellt wurde,[265] ist in diesem Fall das Suum-cuique-Prinzip handlungsleitend.

In Abhängigkeit von der Branche werden in der Praxis u. a. folgende Zuteilungsverfahren vorgeschlagen:[266]

---

[263] Vgl. González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 262); Moreno-Ternero (2018: 269).

[264] Vgl. Def. 4.9 auf S. 483.

[265] Vgl. Abschn. 4.4 auf S. 478.

[266] Vgl. Börsensachverständigenkommission (2000: 20); Becker (2016: 177).

- Losverfahren,[267]
- First-come-first-serve-Prinzip,
- Zuteilung nach dem Kriterium der Ordergröße,
- Zuteilung von Mindestvolumina,
- Gleichverteilung,
- Auswahl nach anderen Kriterien (z. B. regionale Kriterien).

Ziel der folgenden Darstellungen ist es, verschiedene Aufteilungsvarianten vorzustellen, die eine gerechte Zuteilung ermöglichen. Aus der Vielzahl von - theoretisch diskutierten und teilweise auch praktisch realisierten - Verfahren werden die:[268]

- Proportionalitätsregel,
- angepasste Proportionalitätsregel,
- Zufallsbeitrittsregel,
- bedingte Ertrags-Gleichverteilung,
- bedingte Verlust-Gleichverteilung sowie
- Talmud-Regel

vorgestellt. Zur Erläuterung dieser Regeln wird das Beispiel 4.21 eingeführt.

Beispiel 4.21:

Es besteht ein Budget von $E = 350$. Dem stehen Spieler mit folgenden Ansprüchen gegenüber: $q_A = 50$, $q_B = 100$, $q_C = 150$ und $q_D = 175$.

Proportionale Aufteilung

Die Proportionalitätsregel (PR) (*proportional rule*) wurde erstmals von Aristoteles erwähnt.[269] Bei diesem Verfahren wird das Verhältnis von Gesamtvermögen und Gesamtansprüchen gebildet und jeder Spieler wird entsprechend dieser Relation beteiligt (vgl. Definition 4.38).[270]

Definition 4.38: *Für ein Rationierungsproblem $(N,E,\hat{q})$ ergibt sich der Anteil des Spielers i bei Anwendung der PR aus:* $f_i^P(\hat{q}) = q_i \cdot \frac{E}{Q}$.

---

[267] Auf die Rationalität des Losverfahrens wurde bereits hingewiesen. Vgl. Absch. 3.1 auf S. 387.

[268] Für weitere Aufteilungsregeln vgl. Thomson (2003: 252–259).

[269] Vgl. Young (1994a: 64–65).

[270] Vgl. Hougaard (2009: 20–21).

Für das Beispiel 4.21 ergeben sich folgende Werte:

$$f_A^P(\hat{q}) = 50 \cdot \frac{350}{475} = 36\frac{400}{475}, \qquad f_B^P(\hat{q}) = 100 \cdot \frac{350}{475} = 73\frac{325}{475},$$

$$f_C^P(\hat{q}) = 150 \cdot \frac{350}{475} = 110\frac{250}{475}, \qquad f_D^P(\hat{q}) = 175 \cdot \frac{350}{475} = 128\frac{450}{475}.$$

Das Verfahren ist leicht verständlich und weit verbreitet.

Angepasste Proportionalitätsregel

Die angepasste Proportionalitätsregel (APR) wurde vor längerer Zeit vorgeschlagen.[271] Dazu wird in einem **ersten Schritt** der minimale Anspruch m_i jedes Spielers ermittelt, der von keinem anderen Spieler beansprucht wird (vgl. Definition 4.39).

Definition 4.39: *Der minimale Anteil eines Spielers m_i bei einem Rationierungsproblem $(N,E,\hat{q})$ ist definiert mit:* $m_i = max\left\{0, E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j\right\}$.

Im **zweiten Schritt** wird die Summe dieser minimalen Ansprüche von dem verfügbaren Budget abgezogen. Es verbleibt das Restbudget $E^* = E - \sum_{i \in N} m_i$, das aufzuteilen ist. Die im ersten Schritt ermittelten Einzelansprüche werden im **dritten Schritt** von den Gesamtansprüchen abgezogen. Für jeden Spieler ergibt sich ein Restanspruch gemäß Def. 4.40.

Definition 4.40: *Der Restanspruch eines Spielers d_i bei einem Rationierungsproblem $(N,E,\hat{q})$ ist definiert mit:* $d_i = q_i - m_i$.

Die Summe aller individuellen Restansprüche ergibt sich aus $Q^* = \sum_{i \in N} d_i$. Das Restbudget E^* wird im **nächsten Schritt** in Relation zur Summe der Restansprüche Q^* gesetzt.

Im **letzten Schritt** (vgl. Def. 4.41) wird der Anteil eines Spielers aus der Summe seines unstrittigen Minimalanteils m_i und dem - mit dem Verhältnis von Restbudget zu Restansprüchen - gewichteten Restanspruch d_i gebildet. Im Endergebnis ergibt sich der angepasste proportionale Anteil entsprechend der Definition 4.41.[272]

[271] Vgl. Curiel/Maschler/Tijs (1987).

[272] Vgl. Curiel/Maschler/Tijs (1987: 146).

Definition 4.41: *Der Anteil eines Spielers i ist für ein Rationierungsproblem $(N,E,\hat{q})$ bei Anwendung der APR definiert mit:*

$$f_i^A(\hat{q}) = \begin{cases} m_i & \text{wenn } E^* = 0, \\ m_i + d_i \cdot \dfrac{E^*}{Q^*} & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Für das Beispiel 4.21 ergibt sich das korrigierte Budget mit $E^* = 275$, die angepasste Summe der Ansprüche beträgt $Q^* = 400$. In der Tabelle 4.25 sind die mit Definition 4.41 ermittelten Anteile abgebildet.

Tab. 4.25: APR für Beispiel 4.21. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler i	$\mathbf{q_i}$	$\mathbf{m_i}$	**Korrigierter Anteil** $\mathbf{d_i}$	**Proportionaler Anteil an Restsumme**	**Gesamtanteil** $\mathbf{f_i^A}$
A	50	0	50	34,3750	34,3750
B	100	0	100	68,7500	68,7500
C	150	25	125	85,9375	110,9375
D	175	50	125	85,9375	135,9375
Summe	475	75	400	275	350

Das Verfahren ist nicht so leicht verständlich, wie die einfache PR, basiert jedoch auf einer schlüssigen Argumentation.

Zufallsbeitrittsregel

Das Problem kann auch dadurch gelöst werden, dass angenommen wird, jeder Spieler erschiene physisch, um seinen Anspruch anzumelden, d. h. er tritt der Gruppe der Spieler in der Liquidationsversammlung bei. Dies kann zufällig und in unterschiedlicher Reihenfolge geschehen, woraus der Name Zufallsbeitrittsregel (ZBR) (*random arrival rule* oder auch *run-to-the-bank-rule*) abgeleitet ist. Bei seinem Eintreffen erhält der Spieler das Minimum aus seinem Anspruch und dem noch verfügbaren Restvermögen. Offensichtlich ist sein Anteil davon abhängig, wie viele andere Spieler ihre Ansprüche bereits geltend gemacht haben. Um gerecht zu sein, werden nun alle Beitrittsmöglichkeiten der Spieler als gleich wahrscheinlich eingestuft und anschließend wird der Durchschnitt ermittelt. Zur Beschreibung wird in Definition 4.42 mit $\Pi(N)$ die Menge aller Permutationen der Elemente in N beschrieben. Für jede Permutation $\pi \in \Pi(N)$ bezeichnet π_j die geordnete Menge von Spielern, die ihre Ansprüche **vor dem Eintreffen** des Spielers i angemeldet haben.[273]

[273] Vgl. González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 263); Chakravarty/Mitra/Sarkar (2015: 103).

Definition 4.42: *Der Anteil eines Spielers i ist für ein Rationierungsproblem (N,E,$\hat{q}$) bei Anwendung der ZBR definiert mit:*

$$f_i^Z(\hat{q}) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} min \left\{ q_i, max \left\{ 0, E - \sum_{j \in N, \pi_j < \pi_i} q_j \right\} \right\}.$$

Mit Definition 4.42 ergeben sich die Anteile der vier Spieler in Abhängigkeit von der Reihenfolge ihres Erscheinens in Tabelle 4.26.

Tab. 4.26: ZBR für Beispiel 4.21. Quelle: Eigene Darstellung.

	Anteil des Spielers am Budget in Abhängigkeit von der Reihenfolge des Eintreffens			
Permutationen	$\mathbf{f_A^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_B^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_C^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_D^Z(\hat{q})}$
A,B,C,D	50	100	150	50
A,B,D,C	50	100	25	175
A,C,B,D	50	100	150	50
A,C,D,B	50	0	150	150
A,D,B,C	50	100	25	175
A,D,C,B	50	0	125	175
B,A,C,D	50	100	150	50
B,A,D,C	50	100	25	175
B,C,A,D	50	100	150	50
B,C,D,A	0	100	150	100
B,D,A,C	50	100	25	175
B,D,C,A	0	100	75	175
C,A,B,D	50	100	150	50
C,A,D,B	50	0	150	150
C,B,A,D	50	100	150	50
C,B,D,A	0	100	150	100
C,D,A,B	25	0	150	175
C,D,B,A	0	25	150	175
D,A,B,C	50	100	25	175
D,A,C,B	50	0	125	175
D,B,A,C	50	100	25	175
D,B,C,A	0	100	75	175
D,C,A,B	25	0	150	175
D,C,B,A	0	25	150	175
Summe	850	1.650	2.650	3.250
Durchschnitt	$35\frac{5}{12}$	$68\frac{3}{4}$	$110\frac{5}{12}$	$135\frac{5}{12}$

Diese Vorgehensweise ist aufwändiger und nicht so leicht verständlich wie die proportionale Aufteilung. Gerechtigkeit wird durch die Annahme gleich wahrscheinlicher Beitrittsreihenfolgen impliziert.

Bedingte Ertrags-Gleichverteilung

Die bedingte Ertrags-Gleichverteilung (BEG) (*constrained equal-awards rule*) wurde im 12. Jhd. erstmals von MAIMONIDES erwähnt.[274] Ziel ist die Gleichverteilung des Budgets, wobei jedoch sicherzustellen ist, dass kein Spieler mehr erhält als seinen Anspruch (vgl. Def. 4.43).[275]

Definition 4.43: *Der Anteil eines Spielers i ist für ein Rationierungsproblem $(N,E,\hat{q})$ bei BEG definiert mit:*

$$f_i^{\ddot{U}}(\hat{q}) = min\{q_i,\alpha_i\},\ wobei\ \alpha_i = \frac{E - \sum_{j=0}^{i-1} f_j^{\ddot{U}}}{n-(i-1)}.$$

In der Tabelle 4.27 sind die Resultate der Anwendung der BEG für das Beispiel 4.21 abgebildet. Das Verteilungsschema der BEG ist in Abbildung 4.22 erkennbar.

Tab. 4.27: BEG für Beispiel 4.21. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler i	$\mathbf{q_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i} = \frac{\mathbf{E} - \sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{i-1}} \mathbf{f_j^{\ddot{U}}}}{\mathbf{n-(i-1)}}$	$\mathbf{f_i^{\ddot{U}} = min\{q_i,\alpha_i\}}$
A	50	$\alpha_A = \frac{350}{4} = 87{,}50$	50
B	100	$\alpha_B = \frac{350-50}{3} = 100$	100
C	150	$\alpha_C = \frac{350-50-100}{2} = 100$	100
D	175	$\alpha_D = 350-50-100-100 = 100$	100
Summe	475		350

Bei geringen Budgetwerten erhält jeder Spieler denselben Anteil. Dies entspricht dem **Gleichheitsprinzip**. Bei steigenden Budgetsummen wird dieses Gleichheitsprinzip so lange fortgesetzt, bis ein Spieler die Obergrenzen seines ihm zustehenden Anteils erreicht. Die Verteilung wird auf Basis des Gleichheitsprinzips fortgesetzt, bis der nächste Spieler den ihm zustehenden Anteil erhält. So wird das Gleichheitsprinzip kombiniert bzw. überführt in das **Suum-cuique-Prinzip**, wodurch Aufteilungsgerechtigkeit erreicht wer-

[274] Vgl. Young (1994a: 73–74); Thomson (2015: 42).
[275] Vgl. Hougaard (2009: 20–21).

den soll. Es konnte gezeigt werden, dass die BEG jede andere Verteilungsregel LORENZ-dominiert.[276]

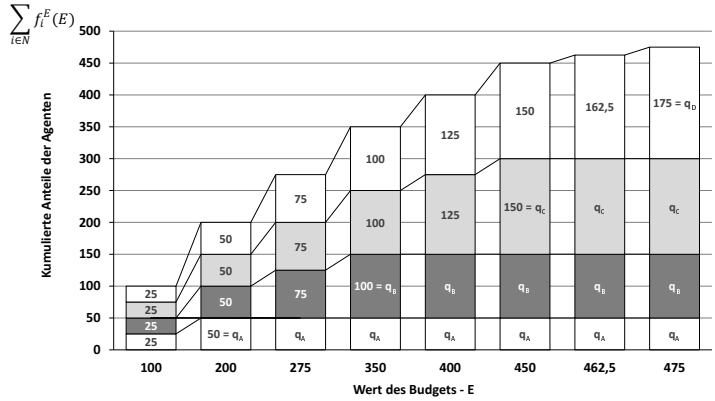


Abb. 4.22: Schema der bedingten Ertrags-Gleichverteilung. Quelle: Eigene Darstellung.

Bedingte Verlust-Gleichverteilung

Ebenfalls von MAIMONIDES wurde diese - am Verlust orientierte - Aufteilung erwähnt.[277] Im Mittelpunkt der bedingten Verlust-Gleichverteilung (BVG) (*constrained equal-losses rule*) steht die angestrebte Gleichverteilung der Differenz der Summe der Ansprüche und des verfügbaren Budgets. Diese Differenz wird als Verlust $V = Q - E$ bezeichnet. Ziel des Verfahrens (vgl. Def. 4.44) ist die Gleichverteilung des Verlustes unter der Bedingung, dass kein Spieler eine negative Auszahlung erhält.[278]

Definition 4.44: *Der Anteil eines Spielers i ist für ein Rationierungsproblem $(N,E,\hat{q})$ bei BVG definiert mit:*

$$f_i^V(\hat{q}) = q_i - \beta_i, \text{ wobei } \beta_i = min\{q_i, \gamma_i\} \text{ und } \gamma_i = \frac{V - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j}{n - (i-1)}.$$

Der Term β_i beschreibt den auf Spieler i verrechneten Anteil am Verlust. In der Tabelle 4.28 sind die Resultate der Anwendung der BVG für das Beispiel 4.21 abgebildet.

[276] Vgl. Thomson (2015: 51–52). Zur LORENZ-Dominanz vgl. Def. 4.25 auf S. 521.
[277] Vgl. Thomson (2015: 42).
[278] Vgl. Hougaard (2009: 20).

Tab. 4.28: BVG für Beispiel 4.21. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler $\mathbf{i}$	$\mathbf{q_i}$	$\gamma_i = \frac{V - \sum_{j=0}^{i-1} \beta_j}{n-(i-1)}$	$\beta_i = \min\{q_i, \gamma_i\}$	$f_i^V = q_i - \beta_i$
A	50	$\gamma_A = \frac{125}{4} = 31{,}25$	31,25	18,75
B	100	$\gamma_B = \frac{125-31{,}25}{3} = 31{,}25$	31,25	68,75
C	150	$\gamma_C = \frac{125-31{,}25-31{,}25}{2} = 31{,}25$	31,25	118,75
D	175	$\gamma_D = 125-31{,}25-31{,}25-31{,}25 = 31{,}25$	31,25	143,75
Summe	475		125	350

Es wird deutlich, dass $\sum_{i \in N} \beta_i = V$. Somit ist der gesamte Verlust verteilt.

Die BVG ist die LORENZ-minimierende Verteilungsregel. Damit ist sie diejenige Verteilungsregel, die am ungerechtesten im Sinne der LORENZ-Dominanz ist. Sie steht damit im Gegensatz zur BEG, welche LORENZ-maximierend ist.[279]

Talmud-Regel

Eine weitere Lösung besteht in einer Kombination aus der bedingten Gleichverteilung von Verlust und Ertrag. Dieser Ansatz wurde schon sehr frühzeitig im Talmud erwähnt, jedoch gelang es erst sehr viel später, die dort aufgeführte Lösung zu verallgemeinern.[280] Die zugrunde liegende Idee ist folgende:[281]

Die Verteilung **beginnt als Gleichverteilung**. Diese wird so lange durchgeführt, bis der Spieler mit dem geringsten Anspruch die **Hälfte** dieser Summe erhalten hat. Dieser Spieler wird vorübergehend aus der weiteren Verteilung **ausgeschlossen** und der Rest seines Anspruches wird zur Befriedigung der Ansprüche der anderen Spieler herangezogen. Die Gleichverteilung wird so lange fortgesetzt, bis auch der Spieler mit dem zweit-geringsten Anspruch die Hälfte seines Anteils erhält und ebenfalls ausgeschlossen wird. Auf diese Weise wird versucht, jedem Spieler mindestens die Hälfte seines Anspruches zuzuweisen. Ist die Summe $\frac{Q}{2}$ erreicht und es gilt $\frac{Q}{2} < E$, kann eine **weitere Zuteilungsrunde** eröffnet werden. An dieser zweiten Phase können wieder

[279] Vgl. Hougaard (2009: 23).

[280] Vgl. O'Neill (1982); Aumann/Maschler (1985). ROBERT J. AUMANN (geb. 1930) erhielt 2005 den „Wirtschaftsnobelpreis".

[281] Vgl. Thomson (2003: 255–256); Hougaard (2009: 20); Moreno-Ternero (2018: 268).

alle Spieler - auch diejenigen, die bisher sukzessive ausgeschlossen wurden - teilnehmen. Nun wird jedoch bei denjenigen Spielern begonnen, welche die größten Ansprüche haben. Es wird versucht, deren Verluste gleich zu verteilen. Dieses Schema ist in der Abbildung 4.23 dargestellt.

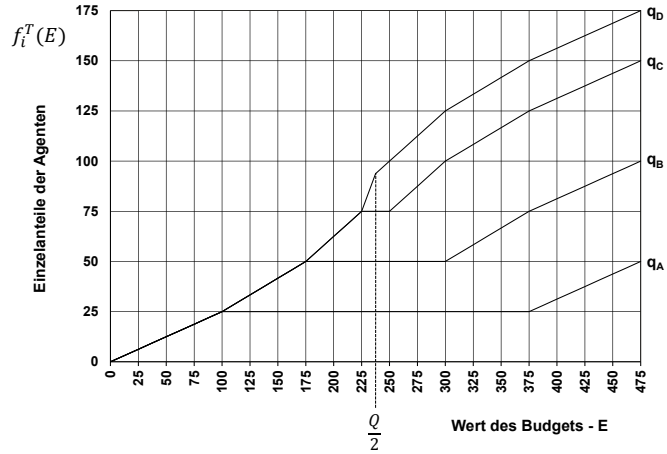


Abb. 4.23: Schema der Talmud-Regel. Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Thomson (2003: 252).

Definition 4.45 beschreibt folgende Vorgehensweise:[282]

- Ist das Budget exakt so groß wie die Hälfte der Ansprüche, erhält jeder Spieler genau die Hälfte seines Anspruches.
- Ist das Budget kleiner als die Hälfte der Ansprüche, wird die BEG so eingesetzt, dass jeder Spieler **maximal** die Hälfte seines Anspruches erhält.
- Ist das Budget größer als die Hälfte der Ansprüche, wird die BVG so angewendet, dass jeder Spieler **mindestens** die Hälfte seines Anspruches erhält.

Definition 4.45: *Der Anteil eines Spielers i für ein Rationierungsproblem* $(N,E,\hat{q})$ *bei Anwendung der Talmud-Regel ist definiert mit:*

$$f_i^T(\hat{q}) = \begin{cases} min\left\{\frac{q_i}{2},\alpha_i\right\} & wenn\ 0 \leq E < \frac{Q}{2}, \\ q_i - \lambda_i\ mit\ \lambda_i = min\left\{\frac{q_i}{2},\delta_i\right\} & wenn\ E \geq \frac{Q}{2} \geq 0. \end{cases}$$

[282] Vgl. Hougaard (2009: 20); Moreno-Ternero (2018: 268).

Der Faktor δ_i in Definition 4.45 ergibt sich aus: $\delta_i = \dfrac{V - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j}{n-(i-1)}$. In der Tabelle 4.29 sind die Resultate der Anwendung der Talmud-Regel abgebildet.

Tab. 4.29: Talmud-Regel für Beispiel 4.21. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler i	$\frac{\mathbf{q_i}}{\mathbf{2}}$	$\boldsymbol{\delta_i = \dfrac{V - \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j}{n-(i-1)}}$	$\boldsymbol{\lambda_i = \min\left\{\frac{q_i}{2}, \delta_i\right\}}$	$\boldsymbol{f_i^T = q_i - \lambda_i}$
A	25	$\delta_A = \frac{125}{4} = 31{,}25$	25	25
B	50	$\delta_B = \frac{125-25}{3} = 33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$66\frac{2}{3}$
C	75	$\delta_C = \frac{125-25-33\frac{1}{3}}{2} = 33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$116\frac{2}{3}$
D	87,5	$\delta_D = 125-25-33\frac{1}{3}-33\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$141\frac{2}{3}$
Summe			125	350

Auch bei der Talmud-Regel beschreibt der Term λ_i den - auf den Spieler i verrechneten - Anteil am Verlust, so dass $\sum_{i \in N} \lambda_i = V$.

In Tab. 4.30 sind die Ergebnisse der verschiedenen Regeln zusammengefasst. Die Ergebnisse der Regeln differieren teilweise stark. Jedoch liegen die Ergebnisse beider Proportionalitäts-Regeln und der Zufallsbeitrittsregel sehr dicht beieinander.

Tab. 4.30: Zusammenfassung der Ergebnisse für Beispiel 4.21. Quelle: Eigene Darstellung.

Zuteilung für Spieler / Aufteilungsregel	**A**	**B**	**C**	**D**
Proportionale Zuteilung	$36\frac{400}{475}$	$73\frac{325}{475}$	$110\frac{250}{475}$	$128\frac{450}{475}$
Angepasste Proportionale Zuteilung	34,3750	68,7500	110,9375	135,9375

Weiter auf folgender Seite

Tabelle 4.30 – Fortsetzung

Zuteilung für Spieler / Aufteilungsregel	A	B	C	D
Zufallsbeitrittsregel	$35\frac{5}{12}$	$68\frac{3}{4}$	$110\frac{5}{12}$	$135\frac{5}{12}$
Bedingte Ertrags-Gleichverteilung	50	100	100	100
Bedingte Verlust-Gleichverteilung	18,75	68,75	118,75	143,75
Talmud-Regel	25	$66\frac{2}{3}$	$116\frac{2}{3}$	$141\frac{2}{3}$

In der Abbildung 4.24 sind die LORENZ-Kurven der ermittelten Zuteilungen abgebildet.[283] Deutlich erkennbar ist die - schon bei der Vorstellung der BEG angeführte - LORENZ-Dominanz dieser Regel über alle anderen Regeln.

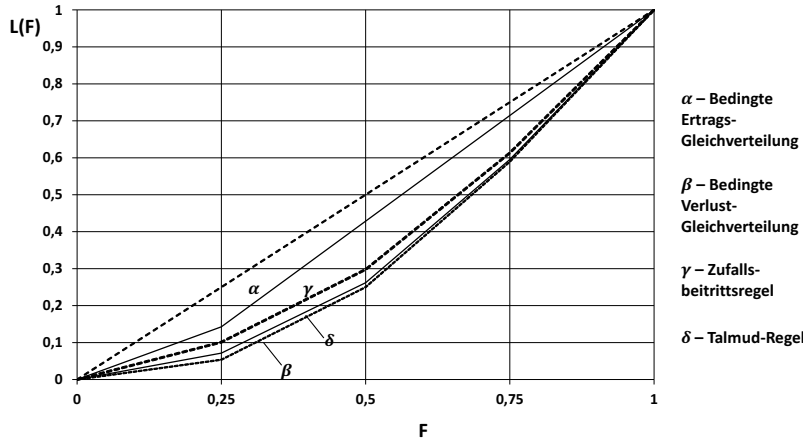


Abb. 4.24: LORENZ-Kurven der Zuteilungsregeln. Quelle: Eigene Darstellung.

Dabei wird die Problematik des Gerechtigkeitsbegriffes deutlich. Die LORENZ-Dominanz ist an dem Gleichheitsprinzip orientiert. Dies scheint zu einer Nivellierung der ursprünglichen Ansprüche der Spieler zu führen. Spieler D und B erhalten denselben Anteil, obwohl ihre Ansprüche äußerst unterschiedlich sind. So stellt sich die Frage, ob diese Lösung weniger der Aufteilungsgerechtigkeit als vielmehr der Bedarfsgerechtigkeit entspricht.

[283] Die PR sowie die APR wurden aufgrund der hohen Übereinstimmung mit der ZBR nicht abgebildet.

Im weiteren Verlauf wird jedoch gezeigt, dass die BEG viele wünschenswerte Anforderungen erfüllt und deshalb als aufteilungsgerecht bezeichnet werden kann.

4.8.2 Rationierungsspiele und Lösungskonzepte

Um ein Rationierungsproblem lösen zu können, ist es auch möglich, dieses Problem in ein Rationierungsspiel umzuformulieren. Es bestehen mehrere Möglichkeiten, aus dem vorliegenden Realproblem eine charakteristische Funktion zu ermitteln.[284] Im weiteren Verlauf wird jedoch nur eine Variante vorgestellt. In Definition 4.46 wird die Ermittlung des Rationierungsspiels aus einem Rationierungsproblem beschrieben.[285]

Definition 4.46: *Basierend auf einem Rationierungsproblem* $(N,E,\hat{q})$ *wird das kooperative Rationierungsspiel* $\Gamma(N,v)$ *gebildet, wobei* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *und* $v(\varnothing) = 0$ *sowie für jedes* $S \subseteq N$ *gilt:*

$$v(S) = max \left\{ 0, E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_i \right\}.$$

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass das resultierende Spiel nicht nur superadditiv, sondern sogar konvex ist.[286]

Eigenschaft 4.8.1: *Das zu einem Rationierungsproblem gehörende Spiel ist - bei Ermittlung der Koalitionsfunktion nach Definition 4.46 - immer konvex.*

Es konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse einiger beschriebener Zuteilungsverfahren für Rationierungsprobleme mit bereits vorgestellten Lösungskonzepten für kooperative Spiele übereinstimmen. Wenn die Koalitionsfunktion nach Definition 4.46 gebildet wird, existieren Übereinstimmungen zwischen:[287]

- der Zufallsbeitrittsregel (ZBR) und der Shapley-Lösung,
- der angepassten Proportionalitätsregel (APR) und dem τ-Wert,
- der Talmud-Regel und dem Nucleolus sowie
- der bedingten Ertrags-Gleichverteilung und der Dutta-Ray-Lösung.

[284] Vgl. Aumann (2010: 5–8).

[285] Vgl. González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 262).

[286] Vgl. González-Díaz/García-Jurado/Fiestras-Janeiro (2010: 263); Chakravarty/Mitra/Sarkar (2015: 100).

[287] Vgl. Thomson (2003: 265).

Diese Übereinstimmungen werden am Beispiel 4.22 demonstriert.

Beispiel 4.22:

Es besteht ein Budget von $E = 120$. Dem stehen Spieler mit folgenden Ansprüchen gegenüber: $q_A = 30$, $q_B = 40$, $q_C = 60$ und $q_D = 100$.

In einem ersten Schritt wird die Koalitionsfunktion auf Basis der Definition 4.46 abgeleitet und in Tabelle 4.31 dargestellt.

Tab. 4.31: Koalitionsfunktion für Beispiel 4.22. Quelle: Eigene Darstellung.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	0	{B,C}	0	{A,B,D}	60
{A}	0	{A,B}	0	{B,D}	30	{A,C,D}	80
{B}	0	{A,C}	0	{C,D}	50	{B,C,D}	90
{C}	0	{A,D}	20	{A,B,C}	20	{A,B,C,D}	120

Diese Funktion ist konvex. Aufgrund der Konvexität existieren Shapley*-Lösung,* Nucleolus *sowie* Dutta-Ray*-Lösung eindeutig und sind Bestandteile des nicht-leeren Kerns. Auch der τ-Wert liegt im nicht-leeren Kern. Die* Shapley*-Werte,*[288] *der* Nucleolus,[289] *der τ-Wert*[290] *sowie die* Dutta-Ray*-Lösung*[291] *sind in Tabelle 4.32 dargestellt.*

Tab. 4.32: Kooperative Lösungswerte für Beispiel 4.22. Quelle: Eigene Darstellung.

Zuteilung für Spieler / Lösungskonzept	A	B	C	D
Shapley-Lösung	$15\frac{5}{6}$	$20\frac{5}{6}$	$30\frac{5}{6}$	52,5
τ-Wert	$15\frac{15}{23}$	$20\frac{20}{23}$	$31\frac{7}{23}$	$52\frac{4}{23}$
Nucleolus	15	20	30	55
Dutta–Ray-Lösung	30	30	30	30

Nun wird die ZBR auf das Beispiel 4.22 angewendet. Mit Definition 4.46 ergeben sich die Anteile der vier Spieler in Abhängigkeit von ihrer Reihenfolge des Erscheinens in Tabelle 4.33.

---

[288] Vgl. Def. 4.16 auf S. 500.
[289] Vgl. Def. 4.20 auf S. 508.
[290] Vgl. Def. 4.23 auf S. 514.
[291] Vgl. Def. 4.28 auf S. 524.

Tab. 4.33: ZBR für Beispiel 4.22. Quelle: Eigene Darstellung.

	Anteil des Spielers am Restvermögen in Abhängigkeit von der Reihenfolge des Eintreffens			
Permutationen	$\mathbf{f_A^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_B^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_C^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_D^Z(\hat{q})}$
A,B,C,D	30	40	50	0
A,B,D,C	30	40	0	50
A,C,B,D	30	30	60	0
A,C,D,B	30	0	60	30
A,D,B,C	30	0	0	90
A,D,C,B	30	0	0	90
B,A,C,D	30	40	50	0
B,A,D,C	30	40	0	50
B,C,A,D	20	40	60	0
B,C,D,A	0	40	60	20
B,D,A,C	0	40	0	80
B,D,C,A	0	40	0	80
C,A,B,D	30	30	60	0
C,A,D,B	30	0	60	30
C,B,A,D	20	40	60	0
C,B,D,A	0	40	60	20
C,D,A,B	0	0	60	60
C,D,B,A	0	0	60	60
D,A,B,C	20	0	0	100
D,A,C,B	20	0	0	100
D,B,A,C	0	20	0	100
D,B,C,A	0	20	0	100
D,C,A,B	0	0	20	100
D,C,B,A	0	0	20	100
Summe	380	500	740	1.260
Durchschnitt	$15\frac{5}{6}$	$20\frac{5}{6}$	$30\frac{5}{6}$	52,50

Die Summen der durchschnittlichen Anteile in Tabelle 4.33 sind identisch mit den Shapley-*Anteilen aus Tabelle 4.32.*

Es kann gezeigt werden, dass die Bestimmungsgleichung aus Definition 4.42 und die Shapley-Formel[292] identisch sind.[293] Hier erfolgt kein Beweis, sondern lediglich eine kurze Darstellung des Zusammenhanges.[294] Dazu wird aus der Definition 4.42 der Term

$$E - \sum_{j \in N, \pi_j < \pi_i} q_j$$

als die Restsumme RS_{π_j} bezeichnet, die zur Verteilung an Spieler i zur Verfügung steht. Weiterhin wird aus der Berechnungsvorschrift 4.42 der Term

[292] Vgl. Definition 4.16 auf S. 500.

[293] Für einen formalen Beweis vgl. Borrero et al. (2018: 975–976).

[294] Vgl. O'Neill (1982: 360).

$min\left\{q_i, max\left\{0, E - \sum_{j \in N, \pi(j) < \pi(i)} q_j\right\}\right\}$ im weiteren Verlauf mit $\rho_i(\pi_j)$ bezeichnet. Dieser Term definiert den Betrag, den der Spieler i in Abhängigkeit von dem verfügbaren Restbetrag RS_{π_j} bei seinem Eintreffen in jeder Permutation erhält. Dann kann formuliert werden:

$$\rho_i(\pi_j) = \begin{cases} q_i & \text{wenn } RS_{\pi_j} \geq q_i, \\ RS_{\pi_j} & \text{wenn } q_i > RS_{\pi_j} > 0, \\ 0 & \text{wenn } 0 \geq RS_{\pi_j}. \end{cases}$$

Damit kann formuliert werden: $f_i^Z(\hat{q}) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \rho_i(\pi_j)$.

Bei der inhaltlichen Beschreibung der ZBR wurde angenommen, dass Spieler i zu einer Gruppe von bereits anwesenden Spieler hinzutritt. Anschließend erscheint der Rest der Spieler. Es kann formuliert werden, dass Spieler der Menge S anwesend sind, i tritt hinzu, so dass $S \cup \{i\}$ und anschließend treten die Spieler aus der Menge $N \setminus (S \cup \{i\})$ bei.

Jetzt kann die Anzahl der Permutationen betrachtet werden. Die Anzahl der möglichen Reihungen der Spieler in S beträgt $|S|!$. Die Menge der nach i eintretenden Spieler - $N \setminus (S \cup \{i\})$ - kann in $(n - |S| - 1)!$ Reihenfolgen angeordnet werden. Die Gesamtanzahl an möglichen Reihenfolgen kann demzufolge angegeben werden mit $|S|!\ (n - |S| - 1)!$. Damit ergibt sich:

$$f_i^Z(\hat{q}) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left(\frac{|S|!\ (n - |S| - 1)!}{n!} \right) \rho_i(\pi_j).$$

Diese Darstellung ist bis auf den Faktor $\rho_i(\pi_j)$ identisch zur SHAPLEY-Formel. Der Term $\rho_i(\pi_j)$ beschreibt die Summe, die Spieler i vom verbleibenden Restbudget erhält. Mit der Darstellung ergeben sich für das Beispiel 4.22 folgende Wahrscheinlichkeiten für die Beitrittsreihenfolge:

- Eintritt an erster Stelle: $\frac{0!(4-0-1)!}{4!} = \frac{1}{4}$,
- Eintritt an zweiter Stelle: $\frac{1!(4-1-1)!}{4!} = \frac{1}{12}$,
- Eintritt an dritter Stelle: $\frac{2!(4-2-1)!}{4!} = \frac{1}{12}$,
- Eintritt an vierter Stelle: $\frac{3!(4-3-1)!}{4!} = \frac{1}{4}$.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass für einen Spieler drei Möglichkeiten bestehen, an zweiter Stelle einzutreten und ebenfalls drei Möglichkeiten bestehen, an dritter Stelle beizutreten. Dies führt in der Summe zu der Gesamtwahrscheinlichkeit von 1. Ein Blick auf Tabelle 4.33 liefert die dazugehörigen Werte. Für den Spieler A resultiert beispielsweise:

$$f_A^Z = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 30}_{\substack{Beitritt\\ an\,1.\,Stelle}} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot(30+30+20)}_{\substack{Beitritt\\ an\,2.\,Stelle}} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot(20+0+0)}_{\substack{Beitritt\\ an\,3.\,Stelle}} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 0}_{\substack{Beitritt\\ an\,4.\,Stelle}} = 15\tfrac{5}{6}.$$

Diese Werte können als **Marginalanteile** des Spielers am Restbudget interpretiert werden. der Spieler **reduziert** mit seinem Anteil den Wert des verbleibenden Budgets. Je früher er beitritt, desto größer ist sein Anteil. Der Term $f_i^Z(\hat{q})$ bringt die Summe der gewichteten Marginalanteile zum Ausdruck. Bei Verwendung der SHAPLEY-Formel resultiert:[295]

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)}\left[v\left(\{j\in N:\pi(j)<\pi(i)\}\cup\{i\}\right) - v\left(\{j\in N:\pi(j)<\pi(i)\}\right)\right]$$

Wird der Term $v\left(\{j\in N:\pi(j)<\pi(i)\}\cup\{i\}\right) - v\left(\{j\in N:\pi(j)<\pi(i)\}\right)$ als Marginalbeitrag des Spielers i mit m_i bezeichnet, kann formuliert werden:

$$\phi_i(v) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\left(\frac{|S|!\ (n-|S|-1)!}{n!}\right)m_i.$$

Eine Verwendung der SHAPLEY-Formel erfordert einen Blick auf die Ermittlungsvorschrift der Koalitionsfunktion der Reduktionsspiele.[296] Die Konvexität dieser Funktion bedingt, dass der Wert der Koalition durch den Beitritt eines Spielers steigt bzw. **nicht sinkt**. Die Differenz zwischen den Werten vor und nach dem Beitritt des Spielers wird als **Marginalbeitrag**[297] bezeichnet. Diese Werte nehmen mit späterem Eintritt in die Koalition zu. Im Beispiel ergibt sich demnach für Spieler A:

$$\phi_A(v) = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 0}_{\substack{Beitritt\\ an\,1.\,Stelle}} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot(20+0+0)}_{\substack{Beitritt\\ an\,2.\,Stelle}} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot(30+30+20)}_{\substack{Beitritt\\ an\,3.\,Stelle}} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot 30}_{\substack{Beitritt\\ an\,4.\,Stelle}} = 15\tfrac{5}{6}.$$

Demzufolge kann geschlussfolgert werden, dass $f_i^Z(\hat{q}) = \phi_i(v)$. Damit wird deutlich, dass eine Zuteilung entsprechend der ZBR für ein Rationierungsproblem identisch mit der SHAPLEY-Lösung des korrespondierenden Rationierungsspiels ist. Nach diesen Erläuterungen wird das Beispiel fortgesetzt.

Fortführung des Beispiels 4.22:

*Die Anwendung der **APR** führt zu den Ergebnissen in Tabelle 4.34.*

---

[295] Vgl. Thomson (2003: 264).
[296] Vgl. Def. 4.46 auf S. 559.
[297] Vgl. Def. 4.12 auf S. 488.

Tab. 4.34: APR für Beispiel 4.22. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler i	q_i	m_i	Korrigierter Anteil d_i	Proportionaler Anteil an Restsumme	Gesamtanteil f_i^A
A	30	0	30	$15\frac{15}{23}$	$15\frac{15}{23}$
B	40	0	40	$20\frac{20}{23}$	$20\frac{20}{23}$
C	60	0	60	$31\frac{7}{23}$	$31\frac{7}{23}$
D	100	0	100	$52\frac{4}{23}$	$52\frac{4}{23}$
Summe	230	0	230	120	120

Für diese Ergebnisse lässt sich die Identität mit dem τ-Wert exemplarisch zeigen.[298] *Zur weiteren Analyse wird der Ober- und der Untervektor für die Wertfunktion der Tabelle 4.31 entsprechend der Definition 4.21*[299] *und Definition 4.22*[300] *wie folgt ermittelt:*

$$\text{Obervektor: } b = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix}; \text{ Untervektor: } a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es wird ersichtlich, dass der Obervektor b identisch mit den Werten q_i in Tabelle 4.34 ist. Dies entspricht der Interpretation des „Utopia-Vektors", als den marginalen Beiträgen zur großen Koalition. Diese sind im Fall des Rationierungsproblems nur zu erreichen, wenn die anderen Spieler auf ihren Anteil verzichten würden. Demgegenüber steht der Untervektor a, der im kooperativen Spiel den Drohpunkt markierte. D. h. diese Werte verbleiben dem Spieler nach Bildung der Außenseiterkoalition und Realisierung der Seitenzahlung an die anderen Mitglieder dieser Koalition. Im Fall des Rationierungsproblems sind dies die unstrittigen Anteile m_i.

Die Definition 4.23[301] *liefert den Wert für λ mit: $\lambda = \frac{120-0}{230-0} = \frac{12}{23}$. Dies entspricht exakt dem Verhältnis aus E^* und Q^* für das Rationierungsproblem. Der τ-Wert entsprechend Definition 4.23 folgt aus:*

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{12}{23} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

*Damit ergeben sich exakt die Anteile f_i^A. Als nächstes wird die **BEG** herangezogen und es ergeben sich die Resultate in Tabelle 4.35.*

[298] Für einen formalen Beweis der Identität vgl. Curiel/Maschler/Tijs (1987: 152).
[299] Vgl. S. 513.
[300] Vgl. S. 514.
[301] Vgl. S. 514.

Tab. 4.35: BEG für Beispiel 4.22. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler i	$\mathbf{q_i}$	$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\mathbf{f_i^E = \min\{q_i, \alpha_i\}}$
A	30	$\frac{120}{4} = 30$	30
B	40	$\frac{120-30}{3} = 30$	30
C	60	$\frac{120-30-30}{2} = 30$	30
D	100	$120-30-30-30 = 30$	30
Summe	230		120

Der Vergleich der Anteile aus Tabelle 4.35 mit den Werten der Dutta-Ray*-Lösung in Tabelle 4.32 zeigt die Identität der Lösungskonzepte. Demzufolge kann die zum Ende des vorigen Abschnittes geäußerte Kritik an der BEG mit dem Hinweis auf die Erfüllung vieler Anforderungen durch die* Dutta-Ray*-Lösung entkräftet werden.*[302] *Diese Lösung ist für Rationierungsspiele immer Bestandteil des Kerns und kann demzufolge von keiner - nicht-großen - Koalition blockiert werden.*

Die Anwendung der ***Talmud-Regel***[303] *auf das Beispiel 4.22 führt zu den in Tabelle 4.36 abgebildeten Ergebnissen. Dabei gilt* $V = 110$ *sowie* $\frac{Q}{2} = 115$.

Tab. 4.36: Talmud-Regel für Beispiel 4.22. Quelle: Eigene Darstellung.

Spieler i	$\frac{\mathbf{q_i}}{\mathbf{2}}$	$\boldsymbol{\delta_i}$	$\boldsymbol{\lambda_i = \min\left\{\frac{q_i}{2}, \delta_i\right\}}$	$\mathbf{f_i^T = q_i - \lambda_i}$
A	15	$\frac{110}{4} = 27{,}5$	15	15
B	20	$\frac{110-15}{3} = 31\frac{2}{3}$	20	20
C	30	$\frac{110-15-20}{2} = 37{,}5$	30	30
D	50	$110-15-20-30 = 45$	45	55
Summe			110	120

Der Vergleich der Anteile aus Tabelle 4.36 mit dem Nucleolus *in Tabelle 4.32 zeigt, dass beide Konzepte zu identischen Ergebnissen führen.*

---

[302] Vgl. Tab. 4.16 auf S. 528.

[303] Vgl. Def. 4.45 auf S. 556.

Abschließend muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Re-Formulierung des Rationierungsproblems in ein Rationierungsspiel einen Wechsel der Beurteilungsgrundlagen impliziert. Die Lösungen kooperativer Spiele orientieren sich am Leistungsprinzip, und versuchen dieses durch eine Reihe von Anforderungen zu spezifizieren. Stillschweigend wird dieses Gerechtigkeits-Verständnis auf das Rationierungsproblem übertragen, welches jedoch an der Aufteilungsgerechtigkeit orientiert ist.

4.9 Kritische Würdigung

Die kooperative Spieltheorie lenkt den Blick weg von einer durch Gegenspieler gekennzeichneten Situation. Im Hinblick auf den tatsächlichen Einsatz der vorgestellten Lösungsverfahren ist deshalb die Realitätsnähe der Annahmen zu untersuchen. Die grundsätzliche Annahme des homo oeconomicus wurde bereits kritisiert, weshalb darauf verwiesen werden kann.[304] Von den Annahmen, welche die kooperativen Spiele charakterisieren,[305] sind die folgenden Punkte diskussionswürdig:

a) Die Situation wird durch eine charakteristische Funktion abgebildet.
b) Es besteht die Möglichkeit von Seitenzahlungen zwischen den Spielern.
c) Eine Zentralinstanz koordiniert die Kooperation.
d) Die beteiligten Spieler treffen ex ante verbindliche Abmachungen, die auch ex post eingehalten werden.
e) Annahme b) impliziert für alle Spieler lineare Nutzenfunktionen.

Mit der **ersten Annahme** wird davon ausgegangen, dass sich das Realproblem durch die charakteristische Funktion abbilden lässt.[306] Bereits bei der Vorstellung der Rationierungsspiele wurde auf die verschiedenen Möglichkeiten zur Ableitung der charakteristischen Funktion hingewiesen.[307] Der Beobachter der Situation bzw. der Konstrukteur des Modells muss demzufolge entscheiden, wie er das Realproblem in das Modell überführt.[308]

Weiterhin ist es erforderlich, die Ergebnisse für alle Koalitions-Varianten benennen zu können. Dies erscheint gerade im Hinblick auf einen praktischen

[304] Vgl. Abschn. 2.1 auf S. 287.
[305] Vgl. Abschn. 4.3 auf S. 473.
[306] Zu einer ausführlichen Kritik der Abbildung eines Realproblems durch eine charakteristische Funktion vgl. Luce/Raiffa (1957: 190–192).
[307] Vgl. Abschn. 4.8.2 auf S. 559.
[308] Vgl. 1. Band, Abbildung 2.22 auf S. 132.

Einsatz das Kardinalproblem zu sein.[309] Mit Verwendung der charakteristischen Funktion wird außerdem impliziert, dass die Spieler:

- die Ergebnisse der jeweiligen Koalitionsvarianten zu Beginn der Kooperation kennen, was Sicherheit über die Zukunft voraussetzt.
- diese Werte wahrheitsgemäß berichten und keinen Anreiz zur Manipulation der Daten haben.

Die Annahme einer zentralen Instanz und einer Spielermenge zeigt Parallelen zu den Prinzipal-Agenten-Modellen. Deshalb muss hinterfragt werden, wie bei der Erstellung der Koalitionsfunktion mit den Anreizen der Spieler zur Abgabe von **nicht wahrheitsgemäßen Berichten** umgegangen wird.

Bei der Betrachtung der **zweiten** und der **dritten Annahme** muss prinzipiell unterschieden werden, ob eine unternehmensinterne oder eine unternehmensexterne Kooperation vorliegt. Für unternehmensinterne Kooperationen können die Annahmen als durchaus realistisch eingestuft werden.[310] Bei der Zusammenarbeit von cost centern oder profit centern sind Seitenzahlungen möglich und die Unternehmensleitung fungiert als Zentralinstanz. Fraglich bleibt wiederum die **wahrheitsgemäße Berichterstattung** der Verantwortlichen.

Für unternehmensexterne Kooperationen ist die Annahme einer **Zentralinstanz** nur in seltenen Fällen erfüllt.[311] Die Frage nach der Verbindlichkeit bzw. Durchsetzbarkeit von Absprachen ist für diese Kooperationsform ebenfalls nicht unkritisch.

Mit Blick auf die **vierte Annahme** muss gefragt werden, in welchem Maße sich Unternehmen bei einer Zusammenarbeit wirklich kooperativ verhalten, oder ob nicht eher eine Konfliktsituation vorliegt, welche mit den Instrumenten der strategischen Spieltheorie zu analysieren und zu lösen ist. So erscheinen die kooperativen Lösungskonzepte z. B. wenig oder gar nicht dazu geeignet, Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Open-Book-Accounting zu klären.[312]

Von grundlegender Bedeutung für die hier diskutierten Modelle ist die Annahme des **transferierbaren Nutzens**.[313] Diese Annahme ist erforderlich, damit die Spieler ihren Anteil nicht durch Seitenzahlungen vergrößern können. Gleichzeitig wird die Analyse vereinfacht, da eine **identische Menge** an Geld für jeden Spieler **identischen Nutzen** stiftet. Gerade bei der Zusammenarbeit von Spielern mit unterschiedlichen Normen und Werten sowie unterschiedlichem Einkommen muss diese Prämisse kritisch hinterfragt wer-

[309] Vgl. Jähn (2008: 151).
[310] Vgl. Mueller (2017a); Mueller (2017b); Müller/Müller (2017).
[311] Vgl. Müller (2016); Mueller (2017c).
[312] Vgl. Agndal/Nilsson (2010); Alenius/Lind/Strömsten (2015).
[313] Vgl. Abschn. 4.2.2 auf S. 468.

den. Diese Annahme lässt sich aufheben und führt zur Gruppe der Spiele mit nicht-transferierbarem Nutzen („Non-transferable-utility-games“ bzw. NTU-games). Diese lassen sich jedoch nicht so einfach handhaben wie die hier vorgestellten Modelle und sind nur begrenzt einsetzbar.

Ob ein Modell im Unternehmen eingesetzt wird, hängt auch in wesentlichem Maße von seiner Verständlichkeit ab.[314] Allgemein kann für die Verständlichkeit des Grundmodells und der Zuteilungsverfahren festgestellt werden, dass die mathematisch-exakte, logisch-stringente Methodik vorteilhaft im Hinblick auf die theoretische Lösungsmächtigkeit ist. Mit Blick auf die Einsatzmöglichkeiten in der Unternehmenspraxis hingegen scheint es jedoch genau diese Methodik zu sein, welche das Verständnis, die Kommunikation und die Anwendung begrenzt. Die mathematisch abstrakte Formulierung ökonomischer Sachverhalte ist einer der frühesten und stärksten Kritikpunkte der Spieltheorie.[315]

Die Spieltheorie ist sehr formal gestaltet und wird oftmals mehr den Formal- als den Realwissenschaften zugeordnet.[316] Diese Einschätzung bedarf jedoch der Korrektur. Die „Gründungsväter“ der Spieltheorie sahen das Gebiet sehr wohl als Abbild sozialer Einheiten und als Instrument zur Lösung von Problemen in diesen Einheiten.[317] Damit wird klargestellt, dass die sozialen Normen die Regeln bestimmen, nach denen das Spiel zu gestalten ist. Auch wird deutlich gemacht, dass es vor diesem Hintergrund nicht nur eine einzige richtige Lösung geben kann.[318] Damit sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für einen adäquaten Einsatz der kooperativen Spieltheorie im Unternehmen beschrieben, weshalb dem nichts mehr hinzuzufügen ist.

---

[314] Vgl. 1. Band, Abbildung 2.23 auf S. 139.

[315] Vgl. Ischboldin (1960: 218); Winand (1977: 486); Rößl (1994: 85).

[316] *„Die Spieltheorie ist von ihrem Ausgangspunkt und ihrem Anspruch her eine mathematische Theorie. Wie diese besteht sie aus Axiomen, Ableitungsregeln und Theoremen. Als Formaltheorie beansprucht die Spieltheorie keinen empirischen Wahrheitsgehalt.“* Winand (1978: 30). Zur Unterscheidung von logischer und empirischer Wahrheit vgl. Chmielewicz (1994: 90–95).

[317] *„In this connection we emphasize again that any game is a model of a possible social or economic organization and any solution is a possible stable standard of behavior in it.“* Neumann/Morgenstern (1953: 436).

[318] *„Considering what we have said about interpreting solutions as stable “standards of behavior“ this has a simple and not unreasonable meaning, namely that given the same physical background different “established orders of society“ or “accepted standards of behavior“ can be built, all possessing those characteristics of inner stability which we have discussed.“* Neumann/Morgenstern (1953: 42), Hervorh. im Original.

4.10 Aufgaben und Lösungen

4.10.1 Aufgaben

Aufgabe 4.1:

Beweisen Sie allgemeingültig, dass Konvexität für alle $v(S) \geq 0$ Superadditivität impliziert, mittels:

a) direktem Beweis und
b) indirektem Beweis (synonym: Widerspruchsbeweis bzw. Reductio ad absurdum)!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 577.

Aufgabe 4.2:

In der Tabelle 4.37 ist die Koalitionsfunktion eines Spiels abgebildet.

Tab. 4.37: Koalitionsfunktion.

S	∅	{**A**}	{**B**}	{**C**}	{**A**,**B**}	{**A**,**C**}	{**B**,**C**}	{**A**,**B**,**C**}
v(S)	0	-100	100	100	200	200	200	300

Sie wissen aus der Vorlesung, dass Superadditivität Monotonie impliziert.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Monotonie und Superadditivität!
b) Wie können Sie das Ergebnis erklären!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 578.

Aufgabe 4.3:

Die Stadtwerke „Schauinsland“ müssen für drei Gemeinden die Wasserversorgung erneuern. Dies erfordert die Errichtung eines Brunnens sowie die Verlegung von Rohrleitungen zu den Abnehmern. Jede Gemeinde hat einen Jahresbedarf von 1.000 hl. Ein lokales Rohrsystem erfordert für jede Gemeinde Investitionen in Höhe von 100.000 €. Das Unternehmen, das den Brunnenbau durchführt, legt das folgende Angebot vor:

- kleine Anlage: Fördervolumen 1.000 hl pro Jahr, Kosten 150.000 €,
- mittlere Anlage: Fördervolumen 2.000 hl pro Jahr, Kosten 225.000 €,
- große Anlage: Fördervolumen 3.000 hl pro Jahr, Kosten 350.000 €.

Die Kosten für das Rohrleitungssystem ändern sich durch die Lage und Dimension des Brunnens nicht.

a) Interpretieren Sie die Situation als kooperatives Spiel und erstellen Sie die charakteristische Funktion!

b) Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften des Spiels:
   - Superadditivität,
   - Monotonie,
   - Wesentlichkeit,
   - Konvexität!

c) Was können Sie aus diesen Ergebnissen in Bezug auf die Existenz einer stabilen Lösung vermuten?

d) Untermauern Sie Ihre Vermutung durch folgende Schritte:
   1. Formulieren Sie die Anforderungen an die Existenz eines Kerns für diese Konstellation!
   2. Untersuchen Sie das Spiel auf Balanciertheit!
   3. Ab welchem Wert $v(N)$ ist das Spiel balanciert?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 579.

Aufgabe 4.4:

Vier Kommunen müssen aufgrund von veränderten Umweltauflagen ihre Klärwerke erneuern. Würde jede Gemeinde allein ein Klärwerk errichten, würde dies Kosten in Höhe von jeweils 400.000€ verursachen. Würde ein gemeinsames Klärwerk für zwei Gemeinden errichtet, so würde dies in Zusammenarbeit mit der Gemeinde A (aufgrund der günstigen Lage) 600.000€ kosten. Wenn Gemeinde A nicht daran beteiligt ist, würden Kosten in Höhe von 700.000€ entstehen. Es besteht auch die Möglichkeit ein Klärwerk für drei Kommunen zu errichten, das bei Beteiligung von Gemeinde A 800.000€ kosten würde. Ist die Kommune A jedoch nicht an dem Gemeinschaftsprojekt für drei Kommunen beteiligt, entstehen Kosten von 900.000€. Eine Zentralanlage für alle vier Gemeinden würde 1.000.000€ kosten.

a) Interpretieren Sie die Situation als kooperatives Spiel und erstellen Sie die charakteristische Funktion!

b) Welche Form der Kooperation würden Sie empfehlen?

c) Wie würden Sie die Kosten für die von Ihnen empfohlene Kooperation aufteilen? Begründen Sie diese Aufteilung!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 580.

Aufgabe 4.5:

Für den mit einer Gemeinschaftsinvestition erzielten Gewinn stellt sich die Frage nach einer gerechten Aufteilung. In der Tabelle 4.38 sind die Kapitalwerte der unterschiedlichen Investitionsobjekte enthalten, die die drei Unternehmen realisieren können.

Tab. 4.38: Koalitionsfunktion.

S	**∅**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
v(S)	0	100	100	100	700	500	500	900

a) Ermitteln Sie zur Beantwortung der Frage nach der Gewinnverteilung die Anteile für alle 3 Unternehmen:
   1. auf Basis der SHAPLEY-Lösung sowie
   2. auf Basis des τ-Wertes!

b) Die SHAPLEY-Aufteilung wird in diesem Beispiel jedoch durch andere Aufteilungsmöglichkeiten dominiert. Begründen Sie die Ineffizienz der SHAPLEY-Lösung aus einer der wesentlichen Eigenschaften (Nicht-Negativität, Superadditivität, Monotonie, Konvexität) dieses (Bei)Spiels.

c) Wie können Sie prüfen, ob das Spiel überhaupt eine Lösung besitzt?

d) Ihnen ist neben den beiden oben genannten Lösungskonzepten das Konzept des NUCLEOLUS bekannt. In diesem Konzept spielt der **Vektor der geordneten Koalitionsüberschüsse** eine wesentliche Rolle. Ermitteln Sie diesen Vektor für die Zuteilungen:
   1. entsprechend der von Ihnen ermittelten SHAPLEY-Werte und
   2. entsprechend des von Ihnen ermittelten τ-Wertes!

   Existiert eine Zuteilung, die lexikografisch noch kleiner ist als die kleinste dieser zwei? Was schlussfolgern Sie für den NUCLEOLUS des Spiels?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 582.

Aufgabe 4.6:

Ermitteln Sie für ein 4-Personen-Spiel die Anzahl und die Gewichtungsvektoren der minimal balancierten Koalitionsfamilien!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 585.

Aufgabe 4.7:

Vier Unternehmen planen die Durchführung einer Innovation. Diese können die Unternehmen allein oder in unterschiedlichen Koalitionen realisieren. In der Tabelle 4.39 sind die Kapitalwerte enthalten, die die Unternehmen realisieren können.

Tab. 4.39: Koalitionsfunktion.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	3.000	{B,C}	5.500	{A,B,D}	14.000
{A}	1.500	{A,B}	4.000	{B,D}	5.000	{A,C,D}	11.000
{B}	2.000	{A,C}	5.000	{C,D}	6.500	{B,C,D}	15.000
{C}	2.500	{A,D}	6.500	{A,B,C}	12.000	{A,B,C,D}	30.000

a) Ermitteln Sie zur Beantwortung der Frage nach der Gewinnverteilung die Anteile:
   1. auf Basis der SHAPLEY-Lösung sowie
   2. auf Basis des τ-Wertes

   für alle 4 Unternehmen!

b) Ermitteln Sie den **Vektor der geordneten Koalitionsüberschüsse** für die Zuteilungen:
   1. entsprechend der von Ihnen ermittelten SHAPLEY-Werte,
   2. entsprechend des von Ihnen ermittelten τ-Wertes sowie
   3. entsprechend $(6.750; 7.250; 7.750; 8.250)$.

c) Vergleichen Sie diese Vektoren lexikografisch! Was können Sie aus der von Ihnen aufgestellten Reihenfolge schlussfolgern?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 585.

Aufgabe 4.8:

Ein Wasserversorger plant den Neubau des Rohrleitungssystems vom Zentralbrunnen zu drei Verbrauchern. Dabei besteht die Möglichkeit, jeden Verbraucher separat anzuschließen oder die Leitung unter Nutzung des Grundstückes eines Verbrauchers zu einem anderen Verbraucher zu verlegen (vgl. Abb. 4.25 auf S. 573). In der Abbildung 4.25 sind die Kosten der verschiedenen Trassenführungen vermerkt.

a) Ermitteln Sie die Kostenfunktion für diese Konstellation!

b) Ermitteln Sie die Kostenreduktionsfunktion für diese Konstellation!

c) Bestimmen Sie die Anteile der Verbraucher an den Gesamtkosten in Höhe von 110 €:
   1. auf Basis der SHAPLEY-Lösung und
   2. auf Basis des τ-Wertes!

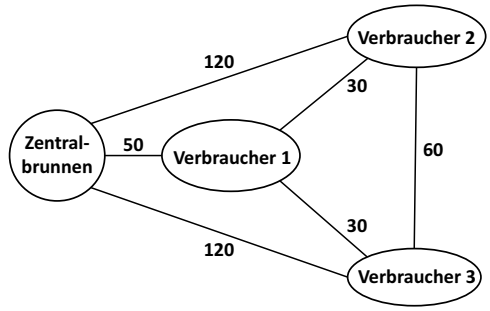


Abb. 4.25: Skizze des Rohrleitungssystems

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 588.

Aufgabe 4.9:

Populationsmonotonie ist eine wichtige Anforderung an die spieltheoretischen Lösungskonzepte. Ihnen ist ein 4-Personen-Spiel mit der charakteristischen Funktion aus der Tabelle 4.40 gegeben.

Tab. 4.40: Koalitionsfunktion zur Populationsmonotonie-Übung.

Ausgangssituation des 4-Personen-Spiels $\Gamma(N,v)$							
S	**v(S)**	**S**	**v(S)**	**S**	**v(S)**	**S**	**v(S)**
∅	0	{D}	0	{B,C}	1	{A,B,D}	2
{A}	0	{A,B}	1	{B,D}	1	{A,C,D}	2
{B}	0	{A,C}	1	{C,D}	1	{B,C,D}	5
{C}	0	{A,D}	1	{A,B,C}	2	{A,B,C,D}	6

a) Prüfen Sie in einem ersten Schritt, ob dieses Spiel konvex ist!

b) Welche Schlussfolgerungen können Sie im Hinblick auf die Erfüllung der Populationsmonotonie durch die Lösungskonzepte Shapley-Lösung, Nucleolus, τ-Wert und Dutta-Ray-Lösung ziehen?

c) Erzeugen Sie durch Eliminierung eines geeigneten Spielers ein konvexes Teilspiel $\Gamma(N',w)$!

d) Ermitteln Sie die vier genannten Lösungswerte für das Spiel $\Gamma(N,v)$ und für das Teilspiel $\Gamma(N',w)$!

e) Vergleichen und interpretieren Sie diese Werte!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 589.

Aufgabe 4.10:

Drei Kostenstellenleiter haben beschlossen, die Produktion zu reorganisieren. In der Diskussion über die Ausgestaltung ergibt sich die Kostenfunktion für die verschiedenen Ausgestaltungsmöglichkeiten in Tabelle 4.41.

Tab. 4.41: Kostenfunktion.

S	**∅**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
c(S)	0	10.000	15.000	11.000	18.500	14.000	17.500	20.000

Im Anschluss haben sich die Verantwortlichen auf folgende Kostenteilung geeinigt: (2.000; 11.000; 7.000).

a) Erstellen Sie die charakteristische Funktion des Spiels!
b) Überprüfen Sie die Eigenschaften Wesentlichkeit, Monotonie, Superadditivität und Konvexität!
c) In einem nächsten Schritt untersuchen Sie, ob der Kern leer oder nichtleer ist!
d) Liegt die vorgeschlagene Kostenaufteilung im Kern?
e) Ermitteln Sie für das Spiel Shapley-Lösung, τ-Wert und Dutta-Ray-Lösung!
f) Da die Verantwortlichen Schwierigkeiten haben, die Ableitung der Wertfunktion aus der Kostenfunktion nachzuvollziehen, stellen Sie den Kern und die vorgeschlagene Kostenaufteilung grafisch:
   - auf Basis der Wertfunktion sowie
   - auf Basis der Kostenfunktion dar!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 590.

Aufgabe 4.11:

Aus Anwendersicht ergibt sich die Frage, wie viele Gleichungen erforderlich sind, um ein Spiel auf bestimmte Eigenschaften zu überprüfen. Geben Sie jeweils eine allgemeingültige Beschreibung der Anzahl an Relationen, die erforderlich sind, um ein Spiel auf:

a) Monotonie,
b) Superadditivität sowie
c) Konvexität

zu überprüfen!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 592.

Aufgabe 4.12:

Es ist ein 4-Personen-Spiel in Tabelle 4.42 gegeben.

Tab. 4.42: Koalitionsfunktion.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	0	{B,C}	7	{A,B,D}	7
{A}	0	{A,B}	1	{B,D}	4	{A,C,D}	14
{B}	0	{A,C}	11	{C,D}	2	{B,C,D}	10
{C}	0	{A,D}	6	{A,B,C}	16	{A,B,C,D}	17

a) Überprüfen Sie das Spiel auf Balanciertheit und Konvexität!
b) Ermitteln Sie die SHAPLEY-Lösung, den NUCLEOLUS und den τ-Wert!
c) Prüfen Sie die Ergebnisse auf Kernzugehörigkeit!
d) Welche der von Ihnen ermittelten Zuteilungen sind LORENZ-dominant?
e) Gelingt es Ihnen, die LORENZ-Lösung zu ermitteln?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 597.

Aufgabe 4.13:

In der Tabelle 4.43 ist die Koalitionsfunktion eines Spiels abgebildet.

Tab. 4.43: Koalitionsfunktion.

S	∅	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
v(S)	0	100	100	-100	200	200	100	300

a) Ermitteln Sie die SHAPLEY-Lösung des Spiels!
b) Prüfen Sie, ob der Kern des Spiels leer oder nicht leer ist!
c) Liegt die SHAPLEY-Lösung im Kern?
d) Können Sie die LORENZ-Lösung ermitteln?
e) Stellen Sie die SHAPLEY-Lösung, die LORENZ-Lösung und den Kern grafisch dar!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 597.

Aufgabe 4.14:

In der Tabelle 4.44 ist die Koalitionsfunktion eines Spiels abgebildet.[319]

Tab. 4.44: Koalitionsfunktion.

S	**ø**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
v(S)	0	5	0	0	6	6	3	12

a) Prüfen Sie das Spiel auf Konvexität!
b) Ermitteln Sie die Shapley-Lösung sowie die Dutta-Ray-Lösung des Spiels!
c) Zeigen Sie, dass die Dutta-Ray-Lösung die Shapley-Lösung Lorenz-dominiert!
d) Ist die Gleichverteilung ein Kernbestandteil?

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 598.

Aufgabe 4.15:

Sie werden zur Kostenanalyse eines Schiffshebewerkes herangezogen. Bei der Dimensionierung der Anlage wurden Großmotorgüterschiffe vom Typ „Taifun“ bzw. häufig genutzte Schubverbände mit ähnlicher Dimension als größte Nutzer festgelegt. Ihre Aufgabe ist es, eine verursachungsgerechte Passagegebühr zu ermitteln. Das Bauwerk wird jedoch auch von kleineren Schiffstypen genutzt. Aus Praktikabilitätsgründen werden sämtliche Schiffe - neben der „Taifun“-Klasse - in zwei weitere Klassen gruppiert. Dies ist die mittlere „Delfin“-Klasse und die kleine „Hering“-Klasse. Um einen Überblick zu erhalten, haben Sie die Bewegungen in dem Hebewerk in der letzten Woche beobachtet. Sie stellten fest, dass je zwei Schiffe von der „Hering“-Klasse und von der „Delfin“-Klasse und nur ein Schubverband der „Taifun“-Klasse befördert wurden. Bei der Kostenanalyse stellen Sie fest, dass der Hauptbestandteil Kapitalkosten sind. Da die variablen Kosten pro Hub bekannt sind, konzentrieren Sie sich auf die Kapitalkosten. Ausgehend von einer geschätzten Gesamtnutzungsdauer ermitteln Sie jährliche Kapitalkosten für die Anlage von 52 Mio. €. Wäre die Anlage für Schiffe der „Delfin“-Klasse errichtet worden, würde sich dieser Wert auf 39 Mio. € belaufen. Für die „Hering“-Klasse würden jährlich 13 Mio. € entstehen. Ermitteln Sie nutzungsabhängige Passagegebühren für die beobachteten Bewegungen! Sie unterteilen das Jahr in 52 Wochen.

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 599.

[319] Ich danke Herrn Färber-González, M. Sc. für diese Aufgabe.

Aufgabe 4.16:

Die Gesellschafter A, B, C und D gründen eine OHG mit folgenden Anteilen:

Gesellschafter	A	B	C	D
Kapitaleinlage	12.500 €	37.500 €	50.000 €	100.000 €

Im Gesellschaftervertrag wurde für die Gewinnverteilung § 121 HGB vereinbart. Nach dem ersten Geschäftsjahr wird der Gewinn mit 6.000 € festgestellt. Da diese Summe offensichtlich nicht ausreicht, um die gesetzlichen Ansprüche zu erfüllen, werden Sie um Rat gebeten. Um eine gerechte Aufteilung vorschlagen zu können, ermitteln Sie die Gewinnanteile der Gesellschafter mittels der:

- proportionalen Verteilung,
- angepassten proportionalen Verteilung,
- Zufallsbeitrittsregel,
- bedingten Ertragsgleichverteilung,
- bedingten Verlustgleichverteilung,
- Talmud-Regel!

Hinweis: Die Lösung befindet sich auf S. 600.

4.10.2 Lösungen

Lösung zur Aufgabe 4.1 auf S. 569:

Notwendige Definitionen:

Superadditivität:

$$v(R \cup S) \geq v(R) + v(S) \;\forall\; R,S \subseteq N \;\; mit \;\; R \cap S = \varnothing.$$

Konvexität:

$$v(R \cup S) + v(R \cap S) \geq v(R) + v(S) \;\forall\; R,S \subseteq N.$$

a) Direkter Beweis:

Zu beweisen ist folgende Aussage: $Konvexität \Rightarrow Superadditivität$.

Konvexität:

(1)	$v(R \cup S) + v(S \cap R)$	$\geq v(R) + v(S)$
(2)	$v(R \cup S) + v(S \cap R) - v(R) - v(S)$	≥ 0

Für $v(S \cap R) = \varnothing$ folgt:

(3)	$v(R \cup S) - v(R) - v(S)$	≥ 0

Superadditivität:

(4)	$v(R \cup S)$	$\geq v(R) + v(S)$
(5)	$v(R \cup S) - v(R) - v(S)$	≥ 0

Deshalb folgt aus der Konvexität die Superadditivität.

b) Indirekter Beweis:

Zu beweisende Aussage: $Konvexität \Rightarrow Superadditivität.$
Negation: $\neg(Konvexität \Rightarrow Superadditivität)$
$Konvexität \wedge\neg\ Superadditivität$

Konvexität:

(1)	$v(R \cup S) + v(S \cap R)$	$\geq v(R) + v(S)$
(2)	$v(R \cup S) + v(S \cap R) - v(R) - v(S)$	≥ 0

Für $v(S \cap R) = \varnothing$ folgt:

(3)	$v(R \cup S) - v(R) - v(S)$	≥ 0

Nicht-Superadditivität:

(4)	$v(R \cup S)$	$< v(R) + v(S)$
(5)	$v(R \cup S) - v(R) - v(S)$	< 0

Das impliziert einen Widerspruch zwischen (3) und (5). Durch den Beweis, dass die Negation der Aussage zu einem Widerspruch führt, wurde bewiesen, dass die Aussage korrekt ist.

Lösung zur Aufgabe 4.2 auf S. 569:

a) Monotonie wird definiert durch: $v(S) \leq v(R)$ für alle $R,S \subseteq N$ mit $S \subseteq R$. Im vorliegenden Spiel gilt für $R = \{A\}$ und $S = \varnothing$ jedoch: $v(S) \nleq v(R)$. Die Funktion ist nicht monoton.

Superadditivität ist jedoch erfüllt.

b) Die Aussage, dass eine superadditive Funktion auch gleichzeitig monton ist, gilt nur für alle $v(S) \geq 0 \ \forall \ S \subseteq N$. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, weshalb zwar Superadditivität, nicht jedoch Monotonie erfüllt ist.

Lösung zur Aufgabe 4.3 auf S. 569:

a) Folgende Werte sind zu verwenden:

- Kosten der Stand-alone-Alternative: 150.000€ für den Brunnen und 100.000€ für das Rohrsystem,
- Kosten der Koalition aus zwei Gemeinden: 225.000€ für den Brunnen und 200.000€ für das Rohrsystem,
- Kosten der großen Koalition: 350.000€ für den Brunnen und 300.000€ für das Rohrsystem.

Die Funktion der Kostenreduktion wird mit Definition 4.30 auf S. 532 ermittelt und ist in Tabelle 4.45 zu sehen.

Tab. 4.45: Kostenreduktionsfunktion=Koalitionsfunktion.

S	**ø**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
v(S)	0	0	0	0	75.000	75.000	75.000	100.000

b) Überprüfung der Eigenschaften des Spiels:

- Superadditivität, Monotonie und Wesentlichkeit sind erfüllt.
- Konvexität: Konvexität erfordert, dass gilt:

  $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(R \cup \{i\}) - v(R)$.

  Wird die Koalition A,B mit R bezeichnet und wird die Koalition A als S bezeichnet und Unternehmen C mit i bezeichnet, resultiert: $75.000 - 0 \not\geq 100.000 - 75.000$. Deshalb ist das Spiel nicht konvex.

c) Da das Spiel nicht konvex ist, kann es sein, dass der Kern leer ist. Demzufolge existiert unter Umständen keine stabile Lösung.

d) Die detaillierte Untersuchung ergibt folgende Resultate:

1. Die Anforderungen an die Existenz des Kerns sind folgende:

$$\left.\begin{array}{lll} x_A + x_B & \geq & 75.000 \\ x_A + x_C & \geq & 75.000 \\ x_B + x_C & \geq & 75.000 \end{array}\right\} \text{Nicht-Blockierbarkeit}$$

Aufsummiert ergeben diese Restriktionen:

$$2 \cdot (x_A + x_B + x_C) \geq 225.000$$

Umformuliert ergibt sich:

$$x_A + x_B + x_C \geq 112.500$$

Zusätzlich ist jedoch noch zu beachten:

$$x_A,\, x_B,\, x_C \geq 0 \quad \text{Individuelle Rationalität}$$

$$x_A + x_B + x_C = 100.000 \quad \text{Kollektive Rationalität}$$

Da die Forderungen der kollektiven Rationalität und der Nicht-Blockierbarkeit in diesem Beispiel unvereinbar sind, ist der Kern leer.

2. Zuerst wird die minimal-balancierte Koalitionsfamilie $\mathfrak{B}_{min}$ wie folgt erzeugt:

   $\mathfrak{B}_{min;1} = \{\{A\},\{B\},\{C\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;2} = \{\{A,B\},\{C\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;3} = \{\{A,C\},\{B\}\}$,

   $\mathfrak{B}_{min;4} = \{\{B,C\},\{A\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;5} = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$.

   Dabei beträgt der Gewichtungsvektor für die erste Familie (1,1,1), für die Zwei-Spieler-Koalitionsfamilien jeweils (1,1) und für die fünfte Familie $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Die Überprüfung ergibt die folgenden Werte:

$$\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,1}} \alpha_S \cdot v(S) = 1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0 \qquad = 0 < 100 = v(N)$$

$$\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,2}} \alpha_S \cdot v(S) = 1\cdot 75+1\cdot 0 \qquad = 75 < 100 = v(N)$$

$$\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,3}} \alpha_S \cdot v(S) = 1\cdot 75+1\cdot 0 \qquad = 75 < 100 = v(N)$$

$$\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,4}} \alpha_S \cdot v(S) = 1\cdot 75+1\cdot 0 \qquad = 75 < 100 = v(N)$$

$$\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,5}} \alpha_S \cdot v(S) = \frac{1}{2}\cdot 75+\frac{1}{2}\cdot 75+\frac{1}{2}\cdot 75 \qquad = 112{,}5 \not\leq 100 = v(N)$$

   Das Spiel ist nicht minimal-balanciert und besitzt deshalb einen leeren Kern. In der 2-Unternehmens-Koalition erwirtschaftet jedes Unternehmen 37.500 € Kostenreduktion, in der großen Koalition hingegen lediglich 33.333 €. Deshalb besteht kein Anreiz, die große Koalition zu bilden.
3. Wenn der Wert der großen Koalition mindestens 112.500 € beträgt, ist das Spiel balanciert und der Kern ist nicht-leer.

Lösung zur Aufgabe 4.4 auf S. 570:

a) Die zugrundeliegende Kostenfunktion ist in der Tabelle 4.46 zu sehen (Sämtliche folgende Angaben in Tsd. €).

Tab. 4.46: Zugrundeliegende Kostenfunktion.

S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)
∅	0	{D}	400	{B,C}	700	{A,B,D}	800
{A}	400	{A,B}	600	{B,D}	700	{A,C,D}	800
{B}	400	{A,C}	600	{C,D}	700	{B,C,D}	900
{C}	400	{A,D}	600	{A,B,C}	800	{A,B,C,D}	1.000

Mit Definition 4.30 von S. 532 ergibt sich die Funktion der Kostenreduktion in der Tabelle 4.47.

Tab. 4.47: Kostenreduktionsfunktion=Koalitionsfunktion.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
∅	0	{D}	0	{B,C}	100	{A,B,D}	400
{A}	0	{A,B}	200	{B,D}	100	{A,C,D}	400
{B}	0	{A,C}	200	{C,D}	100	{B,C,D}	300
{C}	0	{A,D}	200	{A,B,C}	400	{A,B,C,D}	600

b) Die große Koalition ist zu bevorzugen, da die Funktion konvex ist. Dies bedeutet, dass die zahlenmäßig wachsende Koalition auch ein ökonomisch besseres Ergebnis erwirtschaftet.

c) Für die Aufteilung der Kosten bietet es sich an, ein Lösungskonzept auf die Kostenreduktionsfunktion anzuwenden und mit den ermittelten Zuteilungen die Kostenbeiträge zu bestimmen. Der Kostenanteil wird entsprechend Definition 4.31 von S. 532 ermittelt. Für das Beispiel werden die SHAPLEY-Lösung und der NUCLEOLUS herangezogen, was zu folgenden Werten führt:

- Die Anwendung der SHAPLEY-Lösung ergibt die Aufteilung der gemeinsamen Kostenreduktion auf die einzelnen Kommunen mit Definition 4.16 von S. 500:

  $\phi_A(v) = 200.000€$ sowie $\phi_B(v) = \phi_C(v) = \phi_D(v) = \dfrac{400.000€}{3}$.

  Aus Definition 4.31 von S. 532 resultieren die Anteile an den Gesamtkosten in Höhe von 1.000.000 €:

  $c_A = 200.000€$ und $c_B = c_C = c_D = \dfrac{800.000€}{3}$.

- Bei Anwendung des NUCLEOLUS resultieren die Anteile der Kommunen an der Gesamtkostenreduktion aus Definition 4.20 von S. 508 mit:

  $nuc(225.000€, 125.000€, 125.000€, 125.000€)$.

  Die Anteile an den Gesamtkosten ergeben sich bei dieser Aufteilung aus Definition 4.31 auf S. 532 mit: $c_A = 175.000€$ und $c_B = c_C = c_D = 275.000€$.

Lösung zur Aufgabe 4.5 auf S. 570:

a) 1. Der SHAPLEY-Wert für das Unternehmen A resultiert aus Definition 4.16 auf S. 500 mit:

$$\begin{aligned}\phi_A(v) &= \frac{0!(3-0-1)!}{3!}\,100 + \frac{1!(3-1-1)!}{3!}\,600 + \frac{1!(3-1-1)!}{3!}\,400 \\ &\quad + \frac{2!(3-2-1)!}{3!}\,400 \\ &= \underline{\underline{\frac{1.000}{3}}}.\end{aligned}$$

Für Unternehmen B folgt: $\phi_B(v) = \phi_A(v) = \underline{\underline{\frac{1.000}{3}}}$.

Der SHAPLEY-Wert für das Unternehmen C resultiert mit:

$$\begin{aligned}\phi_C(v) &= \frac{0!(3-0-1)!}{3!}\,100 + \frac{1!(3-1-1)!}{3!}\,400 + \frac{1!(3-1-1)!}{3!}\,400 \\ &\quad + \frac{2!(3-2-1)!}{3!}\,200 \\ &= \underline{\underline{\frac{700}{3}}}.\end{aligned}$$

Alternativ ergeben sich die Resultate aus Tabelle 4.48.

Tab. 4.48: Tabellarische Ermittlung der SHAPLEY-Lösung.

	$\mathbf{m_i v(S) = v(S) - v(S \setminus \{i\})}$		
Permutationen	$\mathbf{m_A v(S)}$	$\mathbf{m_B v(S)}$	$\mathbf{m_C v(S)}$
A,B,C	100	600	200
A,C,B	100	400	400
B,A,C	600	100	200
B,C,A	400	100	400
C,A,B	400	400	100
C,B,A	400	400	100
Summe	2.000	2.000	1.400
SHAPLEY-Wert	$\frac{2.000}{6} = \frac{1.000}{3}$	$\frac{2.000}{6} = \frac{1.000}{3}$	$\frac{1.400}{6} = \frac{700}{3}$

2. Der Obervektor ergibt sich aus Definition 4.21 von S. 513 mit:

$$b = \begin{pmatrix} b_A \\ b_B \\ b_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\}) \\ v(\{A,B,C\}) - v(\{A,C\}) \\ v(\{A,B,C\}) - v(\{A,B\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Der Untervektor ergibt sich aus Definition 4.22 auf S. 514 mit:

$$a = \begin{pmatrix} max(v(\{A\}), v(\{A,B\}) - b_B, v(\{A,C\}) - b_C, v(\{A,B,C\}) - (b_B + b_C)) \\ max(v(\{B\}), v(\{B,A\}) - b_A, v(\{B,C\}) - b_C, v(\{B,A,C\}) - (b_A + b_C)) \\ max(v(\{C\}), v(\{C,A\}) - b_A, v(\{C,B\}) - b_B, v(\{C,A,B\}) - (b_A + b_B)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Der $\tau-$Wert folgt mit diesen Werten und mit Definition 4.23 auf S. 514:

$$\tau = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1.100}{3} \\ \\ \frac{1.100}{3} \\ \\ \frac{500}{3} \end{pmatrix}$$

b) Für die Unternehmen A und B ergibt die große Koalition mit der SHAPLEY-Aufteilung keinen Sinn, da beide Unternehmen in der Zweier-Koalition bessergestellt sind und z. B. jeweils einen Anteil von 350 erhalten könnten. Die SHAPLEY-Lösung liegt nicht im Kern! Begründung: Das Spiel ist nicht konvex, da bei Konvexität gelten muss:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(R \cup \{i\}) - v(R)$$

Im Beispiel ist jedoch:

$$v(\{A,B\}) - v(\{B\}) > v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\})$$

$$700 - 100 > 900 - 500$$

Monotonie und Superadditivität sind jedoch erfüllt.

c) Die Überprüfung auf Balanciertheit liefert eine Aussage darüber, ob der Kern des Spiels nicht-leer ist, also eine Lösung existiert.

Zuerst ist eine balancierte Koalitionsfamilie zu erzeugen. Dazu wird die Koalitionsfamilie $\mathfrak{B}$ mit

$$\mathfrak{B} = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{A,B,C\}\}$$

betrachtet. Diese wird mit den Gewichtungsfaktoren $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$ balanciert. Die Überprüfung des zugrunde liegenden Spiels auf Balanciertheit mit dieser einen balancierten Koalitionsfamilie ergibt folgende Werte:

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j v(S_j) = 866\frac{2}{3} < v(N)$$

Wenn folgende Koalitionsfamilie verwendet wird

$$\mathfrak{B} = \{\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{A,B,C\}\}$$

und jede der Koalitionen mit dem Wert $\frac{1}{4}$ gewichtet wird, resultiert ebenfalls eine balancierte Koalitionsfamilie. Die Verwendung desselben ergibt:

$$\sum_{j=1}^{7} \alpha_j v(S_j) = 725 < v(N)$$

Diese Werte lassen darauf schließen, dass das zugrunde liegende Spiel balanciert ist. Um dies zweifelsfrei festzustellen, wird die folgende, minimalbalancierte Koalitionsfamilie gebildet.

$\mathfrak{B}_{min;1} = \{\{A\},\{B\},\{C\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;2} = \{\{A,B\},\{C\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;3} = \{\{A,C\},\{B\}\}$,

$\mathfrak{B}_{min;4} = \{\{B,C\},\{A\}\}$, $\mathfrak{B}_{min;5} = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$.

Dabei beträgt der Gewichtungsvektor für die erste Familie (1,1,1), für die Zwei-Spieler-Koalitionsfamilien jeweils (1,1) und für die fünfte Familie $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Die Überprüfung ergibt die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,1}} \alpha_S \cdot v(S) &= 1\cdot 100 + 1\cdot 100 + 1\cdot 100 && = 300 < 900 = v(N)\\
\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,2}} \alpha_S \cdot v(S) &= 1\cdot 700 + 1\cdot 100 && = 800 < 900 = v(N)\\
\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,3}} \alpha_S \cdot v(S) &= 1\cdot 500 + 1\cdot 100 && = 600 < 900 = v(N)\\
\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,4}} \alpha_S \cdot v(S) &= 1\cdot 500 + 1\cdot 100 && = 600 < 900 = v(N)\\
\sum_{S\in\mathfrak{B}_{min,5}} \alpha_S \cdot v(S) &= \frac{1}{2}\cdot 700 + \frac{1}{2}\cdot 500 + \frac{1}{2}\cdot 500 && = 850 < 900 = v(N)
\end{aligned}$$

Das Spiel ist minimal-balanciert und besitzt einen nicht-leeren Kern.

d) Der Vektor der geordneten Koalitionsüberschüsse ist:

1. für die Shapley-Lösung: $\left(0{,}0{,}\frac{100}{3},-\frac{200}{3},-\frac{200}{3},-\frac{400}{3},-\frac{700}{3},-\frac{700}{3}\right)$
2. für den τ-Wert: $\left(0{,}0{,}-\frac{100}{3},-\frac{100}{3},-\frac{100}{3},-\frac{200}{3},-\frac{800}{3},-\frac{800}{3}\right)$.

Der Vektor der Überschüsse gemäß der Zuteilung entsprechend dem τ-Wert ist lexikografisch kleiner als der Vektor der Überschüsse gemäß der Shapley-Zuteilung. Es existiert darüber hinaus kein kleinerer Vektor der geordneten Überschüsse. Der Nucleolus ist damit identifiziert und resultiert mit einer identischen Zuteilung wie der τ-Wert.

Lösung zur Aufgabe 4.6 auf S. 571:

Die Definition der Minimalbalanciertheit lautete:[320] Wenn in einer balancierten Koalitionsfamilie $\mathfrak{B}$ keine echte Teilmenge balanciert ist, so ist sie eine minimal balancierte Koalitionsfamilie $\mathfrak{B}_{min}$. Auf dieser Basis ergeben sich für ein 4-Personen-Spiel die 41 minimal balancierten Koalitionsfamilien in der Tabelle 4.49.[321]

Tab. 4.49: Aufstellung der minimal-balancierten Koalitionsfamilien.

Grundstruktur der Koalitionsfamilie $\mathfrak{B}_{\min}$	**Gewichtungs-vektor**	**Anzahl dieser Koalitions-familien**
$\{\{A\},\{B\},\{C\},\{D\}\}$	(1,1,1,1)	1
$\left\{\overline{\{A,B\}},\overline{\{C,D\}}\right\}$	(1,1)	3
$\left\{\overline{\{A,B,C\}},\overline{\{D\}}\right\}$	(1,1)	4
$\left\{\overline{\{A,B\}},\overline{\{C\}},\overline{\{D\}}\right\}$	(1,1,1)	6
$\left\{\overline{\{A,B,C\}},\overline{\{A,B,D\}},\overline{\{C,D\}}\right\}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	6
$\left\{\overline{\{A,B\}},\overline{\{A,C\}},\overline{\{B,C\}},\overline{\{D\}}\right\}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$	4
$\left\{\overline{\{A,B,C\}},\overline{\{A,D\}},\overline{\{B,D\}},\overline{\{C\}}\right\}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	12
$\left\{\overline{\{A,B,C\}},\overline{\{A,D\}},\overline{\{B,D\}},\overline{\{C,D\}}\right\}$	$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	4
$\{\{A,B,C\},\{A,B,D\},\{A,C,D\},\{B,C,D\}\}$	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	1
Summe		41

Lösung zur Aufgabe 4.7 auf S. 571:

a) Es ergeben sich folgende Gewinnanteile:

1. Die SHAPLEY-Lösung ergibt sich entsprechend der Tabelle 4.50.

[320] Vgl. Eigenschaft 4.5.5 auf S. 498.

[321] Vgl. Shapley (1967: 459).

Tab. 4.50: Ermittlung der SHAPLEY-Lösung.

	Marginalbeitrag ($\mathbf{m_i v(S) = v(S) - v(S \setminus \{i\})}$)			
Permutationen	$\mathbf{m_A v(S)}$	$\mathbf{m_B v(S)}$	$\mathbf{m_C v(S)}$	$\mathbf{m_D v(S)}$
A,B,C,D	1.500	2.500	8.000	18.000
A,B,D,C	1.500	2.500	16.000	10.000
A,C,B,D	1.500	7.000	3.500	18.000
A,C,D,B	1.500	19.000	3.500	6.000
A,D,B,C	1.500	7.500	16.000	5.000
A,D,C,B	1.500	19.000	4.500	5.000
B,A,C,D	2.000	2.000	8.000	18.000
B,A,D,C	2.000	2.000	16.000	10.000
B,C,A,D	6.500	2.000	3.500	18.000
B,C,D,A	15.000	2.000	3.500	9.500
B,D,A,C	9.000	2.000	16.000	3.000
B,D,C,A	15.000	2.000	10.000	3.000
C,A,B,D	2.500	7.000	2.500	18.000
C,A,D,B	2.500	19.000	2.500	6.000
C,B,A,D	6.500	3.000	2.500	18.000
C,B,D,A	15.000	3.000	2.500	9.500
C,D,A,B	4.500	19.000	2.500	4.000
C,D,B,A	15.000	8.500	2.500	4.000
D,A,B,C	3.500	7.500	16.000	3.000
D,A,C,B	3.500	19.000	4.500	3.000
D,B,A,C	9.000	2.000	16.000	3.000
D,B,C,A	15.000	2.000	10.000	3.000
D,C,A,B	4.500	19.000	3.500	3.000
D,C,B,A	15.000	8.500	3.500	3.000
Summe	155.000	187.000	177.000	201.000
SHAPLEY-Wert	$\frac{19.375}{3} \approx 6.458{,}33$	$\frac{23.375}{3} \approx 7.791{,}67$	7.375	8.375

2. Für die Ermittlung des τ-Wertes wird zuerst der Obervektor berechnet, der sich aus Definition 4.21 von S. 513 ergibt mit:

$$b = \begin{pmatrix} b_A \\ b_B \\ b_C \\ b_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(\{A,B,C,D\}) - v(\{B,C,D\}) \\ v(\{A,B,C,D\}) - v(\{A,C,D\}) \\ v(\{A,B,C,D\}) - v(\{A,B,D\}) \\ v(\{A,B,C,D\}) - v(\{A,B,C\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.000 \\ 19.000 \\ 16.000 \\ 18.000 \end{pmatrix}$$

Der Untervektor ergibt sich aus Definition 4.22 von S. 514 mit:

$$a = \begin{pmatrix} max(v(\{A\}), v(\{A,B\}) - b_B, v(\{A,C\}) - b_C, v(\{A,D\}) - b_D, \\ max(v(\{B\}), v(\{B,A\}) - b_A, v(\{B,C\}) - b_C, v(\{B,D\}) - b_D, \\ max(v(\{C\}), v(\{C,A\}) - b_A, v(\{C,B\}) - b_B, v(\{C,D\}) - b_D, \\ max(v(\{D\}), v(\{D,A\}) - b_A, v(\{D,B\}) - b_B, v(\{D,C\}) - b_C, \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v(\{A,B,C\}) - (b_B + b_C), v(\{A,B,D\}) - (b_B + b_D), \\ v(\{B,A,C\}) - (b_A + b_C), v(\{B,A,D\}) - (b_A + b_D), \\ v(\{C,A,B\}) - (b_A + b_B), v(\{C,A,D\}) - (b_A + b_D), \\ v(\{D,A,B\}) - (b_A + b_B), v(\{D,A,C\}) - (b_A + b_C), \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(\{A,C,D\})-(b_C+b_D), v(\{A,B,C,D\})-(b_B+b_C+b_D)) \\ v(\{B,C,D\})-(b_C+b_D), v(\{B,A,C,D\})-(b_A+b_C+b_D)) \\ v(\{C,B,D\})-(b_B+b_D), v(\{C,A,B,D\})-(b_A+b_B+b_D)) \\ v(\{D,B,C\})-(b_B+b_C), v(\{D,A,B,C\})-(b_A+b_B+b_C)) \end{array}\right)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_A \\ a_B \\ a_C \\ a_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.500 \\ 2.000 \\ 2.500 \\ 3.000 \end{pmatrix}$$

Der $\tau-$Wert folgt mit diesen Werten und mit Definition 4.23 von S. 514:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1.500 \\ 2.000 \\ 2.500 \\ 3.000 \end{pmatrix} + \frac{21}{59} \begin{pmatrix} 13.500 \\ 17.000 \\ 13.500 \\ 15.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{372.000}{59} \\ \\ \frac{475.000}{59} \\ \\ \frac{431.000}{59} \\ \\ \frac{492.000}{59} \\ \\ \end{pmatrix}$$

b) Der Vektor der geordneten Koalitionsüberschüsse ergibt für:

1. die SHAPLEY-Lösung:

   Exakte Werte:

   $$\left(0{,}0, -\frac{14.625}{3}, -\frac{14.875}{3}, -\frac{16.125}{3}, -\frac{17.375}{3}, -\frac{25.000}{3}, -\frac{25.625}{3}, -\frac{25.875}{3}\right.$$
   $$\left. -\frac{26.500}{3}, -\frac{27.750}{3}, -\frac{28.875}{3}, -\frac{29.000}{3}, -\frac{30.750}{3}, -\frac{33.500}{3}, -\frac{33.625}{3}\right)$$

   Gerundete Werte:

   $$(0{,}0, -4.875, -4.958, -5.375, -5.792, -8.333, -8.542, -8.625,$$
   $$-8.833, -9.250, -9.625, -9.667, -10.250, -11.167, -11.208)$$

2. den τ-Wert:

   Exakte Werte:

   $$\left(0{,}0, -\frac{283.500}{59}, -\frac{283.500}{59}, -\frac{315.000}{59}, -\frac{357.000}{59},\right.$$
   $$-\frac{480.500}{59}, -\frac{508.000}{59}, -\frac{513.000}{59} - \frac{513.000}{59}, -\frac{539.500}{59},$$
   $$\left. -\frac{570.000}{59}, -\frac{581.500}{59}, -\frac{611.000}{59}, -\frac{646.000}{59}, -\frac{672.000}{59}\right)$$

Gerundete Werte:

$(0{,}0, -4.805, -4.805, -5.339, -6.051, -8.144, -8.610, -8.695$

$-8.695, -9.144, -9.661 - 9.856, -10.356, -10.949, -11.390)$

3. die Zuteilung $(6.750{,}7.250{,}7.750{,}8.250)$:

$(0{,}0, -5.250, -5.250, -5.250, -5.250, -8.250, -8.250, -8.500)$

$-9.500, -9.500, -9.500, -9.750, -10.000, -10.500, -11.750)$

c) Der Vektor der geordneten Überschüsse der letzten Zuteilung ist der lexikografisch kleinste der drei Vektoren. Der aus der SHAPLEY-Zuteilung resultierende Vektor ist der lexikografisch zweitkleinste der drei Vektoren. Der τ-Wert liefert den lexikografisch größten Vektor. Bei der letzten Zuteilung handelt es sich um den NUCLEOLUS.

Lösung zur Aufgabe 4.8 auf S. 572:

a) Aus den Ausgangsinformationen resultiert die Funktion der minimalen Kosten der Anschlussvarianten in Tabelle 4.51.

Tab. 4.51: Kostenfunktion.

S	**ø**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
c(S)	0	50	120	120	80	80	180	110

b) Die Funktion der Kostenreduktion wird mit Definition 4.30 von S. 532 ermittelt und in Tabelle 4.52 dargestellt.

Tab. 4.52: Kostenreduktionsfunktion=Koalitionsfunktion.

S	**ø**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
v(S)	0	0	0	0	90	90	60	180

c) Zur Ermittlung der Kostenanteile wird zuerst das entsprechende Lösungskonzept angewendet und im Anschluss den Stand-alone-Kosten gegenübergestellt.

1. Die Anwendung der SHAPLEY-Lösung auf die Kostenreduktionsfunktion ergibt $\phi_A(v) = 70$, $\phi_B(v) = \phi_C(v) = 55$. Diese Werte werden von den Kosten der isolierten Leitungsführung zu dem jeweiligen Verbraucher abgezogen, was zu dem Kostenbetrag jedes Verbrauchers für die Kooperationslösung mit folgenden Werten führt:

$c_a = 50 - 70 = -20$; $c_B = c_C = 120 - 55 = 65$.

Verbraucher A hat einen derart hohen Anteil am Gesamtergebnis, dass er selbst keine Kosten zu tragen hat, sondern von den anderen Verbrauchern für die Nutzung seines Grundstückes zu entschädigen ist.

2. Die τ-Werte resultieren mit: $\tau_A = 72$ und $\tau_B = \tau_C = 54$. Der Kostenanteil für den Verbraucher A ist weiterhin negativ mit einem Wert von -22, wohingegen Verbraucher B und Verbraucher C Kosten in Höhe von jeweils 66 tragen müssen.

Lösung zur Aufgabe 4.9 auf S. 573:

a) Das Spiel ist konvex.

b) Daraus folgt, dass sowohl die Shapley-Lösung als auch die Dutta-Ray-Lösung populationsmonotone Ergebnisse liefern müssten. Der Nucleolus und der τ-Wert hingegen sind auch für konvexe Spiele nicht populationsmonoton.

c) Durch Elimination des Spielers D entsteht ein konvexes Teilspiel $\Gamma(N', w)$ mit der charakteristischen Funktion aus Tabelle 4.53.

Tab. 4.53: Koalitionsfunktion des Teilspiels.

T	**ø**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
w(T)	0	0	0	0	1	1	1	2

d) Für das Teilspiel $\Gamma(N', w)$ ergibt sich mit jedem Lösungskonzept für jeden Spieler der Anteil von $\frac{2}{3}$.

Für das ursprüngliche 4-Personen-Spiel $\Gamma(N, v)$ ergeben sich folgende Lösungswerte:

- Shapley-Werte: $\phi_A(v) = \frac{3}{4}$, $\phi_B(v) = \phi_C(v) = \phi_D(v) = \frac{7}{4}$,
- Nucleolus: $nuc(v) : \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{6}, \frac{11}{6}, \frac{11}{6}\right)$,
- $\tau(v)$: $\left(\frac{6}{13}, \frac{24}{13}, \frac{24}{13}, \frac{24}{13}\right)$,
- DRL: $DR_A(v) = 1$, $DR_B(v) = DR_C(v) = DR_D(v) = \frac{5}{3}$.

e) Der Vergleich der Lösungen für diese beiden Spiele ergibt folgendes Ergebnis:

- Shapley-Werte und Dutta-Ray-Lösungswerte der Spieler A, B und C im Spiel $\Gamma(N, v)$ sind größer als im Teilspiel $\Gamma(N', w)$, die Anforderung der Populationsmonotonie ist erfüllt.

- Sowohl der NUCLEOLUS als auch der τ-Wert teilen dem Spieler A im Teilspiel $\Gamma(N',w)$ mehr zu als im Spiel $\Gamma(N,v)$. Damit hat dieser Spieler:
  - ausgehend von einer 3-Personen-Koalition keinen Anreiz, einen weiteren Spieler aufzunehmen oder
  - ausgehend von einer 4-Personen-Koalition, einen Anreiz, den Spieler D aus der Koalition hinauszudrängen.

  Damit ist die Eigenschaft der Populationsmonotonie durch diese beiden Lösungskonzepte verletzt.

Lösung zur Aufgabe 4.10 auf S. 574:

a) Die Koalitionsfunktion ist in Tabelle 4.54 zu sehen.

Tab. 4.54: Koalitionsfunktion.

S	**∅**	**{A}**	**{B}**	**{C}**	**{A,B}**	**{A,C}**	**{B,C}**	**{A,B,C}**
v(S)	0	0	0	0	6.500	7.000	8.500	16.000

b) Das Spiel ist wesentlich, monoton, superadditiv und konvex.

c) Die Überprüfung des Kerns ergibt folgende Resultate:

$$
\begin{array}{ll}
x_A,\, x_B,\, x_C & \geq \quad 0 \\
x_A + x_B + x_C & = 16.000 \\
x_A + x_B & \geq \quad 6.500 \\
x_A + x_C & \geq \quad 7.000 \\
x_B + x_C & \geq \quad 8.500 \\
2 \cdot (x_A + x_B + x_C) & \geq \quad 22.000 \\
x_A + x_B + x_C & \geq 11.000 \\
x_A + x_B + x_C & \leq v(N) = 16.000
\end{array}
$$

Der Kern ist demzufolge nicht-leer. Alternativ kann ein Gleichungssystem erzeugt werden und geprüft werden, ob dafür ein Lösungsvektor existiert.

$$
\begin{array}{lll}
x_A & \geq v(A) & = 0 \\
x_B & \geq v(B) & = 0 \\
x_C & \geq v(C) & = 0 \\
x_A + x_B & \geq v(A,B) & = 6.500 \\
x_A + x_C & \geq v(A,C) & = 7.000 \\
x_B + x_C & \geq v(B,C) & = 8.500 \\
x_A + x_B + x_C & \geq v(A,B,C) & = 16.000
\end{array}
$$

Es existiert eine Menge an möglichen Lösungen für dieses System, z. B. $c = (5.000; 5.000; 6.000)$.

d) Die vorgeschlagene Lösung beträgt $x = (2.000; 11.000; 7.000)$. Die Gleichung zur Überführung der Kostenfunktion in die Wertfunktion lautet: $v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$, $\forall\, S \subseteq N$. Für die große Koalition folgt daraus: $v(N) = \sum_{i \in N} c(\{i\}) - c(N)$. Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$16.000 = (10.000 + 15.000 + 11.000) - 20.000$$

$$16.000 = 36.000 - 20.000.$$

Gesucht ist die Aufteilung der 16.000 auf $\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix}$.

Um Anteile der einzelnen Spieler ermitteln zu können, werden die gegebenen Informationen auf der rechten Seite der Gleichung wie folgt reformuliert:

$$36.000 \quad = \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \\ c_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 15.000 \\ 11.000 \end{pmatrix}$$

$$20.000 \quad = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 11.000 \\ 7.000 \end{pmatrix}$$

Damit können die gesuchten Werte wie folgt errechnet werden:

$$\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \\ c_C \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.000 \\ 15.000 \\ 11.000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.000 \\ 11.000 \\ 7.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.000 \\ 4.000 \\ 4.000 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Anteile der Spieler an $v(N)$. Es wird deutlich, dass dies keine Kernzuteilung sein kann, da: $v_B + v_C = 8.000 \not\geq 8.500 = v(B,C)$.

e) Es ergeben sich folgende Ergebnisse:

Shapley-Werte: Für $v(N)$: $\phi_A(v) = 4.750$, $\phi_B(v) = 5.500$, $\phi_C(v) = 5.750$. Anteile für $c(N)$: $\phi_A(c) = 5.250$, $\phi_B(c) = 9.500$ sowie $\phi_C(c) = 5.250$.

τ-Werte: Für $v(N)$: $\tau_A(v) = \frac{60.000}{13}$, $\tau_B(v) = \frac{72.000}{13}$ sowie $\tau_C(v) = \frac{76.000}{13}$. Anteile für $c(N)$: $\tau_A(c) = \frac{70.000}{13}$, $\tau_B(c) = \frac{123.000}{13}$ und $\tau_C(c) = \frac{67.000}{13}$.

DRL: Für $v(N)$: $DRL(v) = \left(\frac{16.000}{3}, \frac{16.000}{3}, \frac{16.000}{3}\right)$. Anteile für $c(N)$: $DRL(c) = \left(\frac{14.000}{3}, \frac{29.000}{3}, \frac{17.000}{3}\right)$.

f) Abbildung 4.26 zeigt die Lage des Kerns und der vorgeschlagenen Aufteilung bei Verwendung der beiden Funktionen.

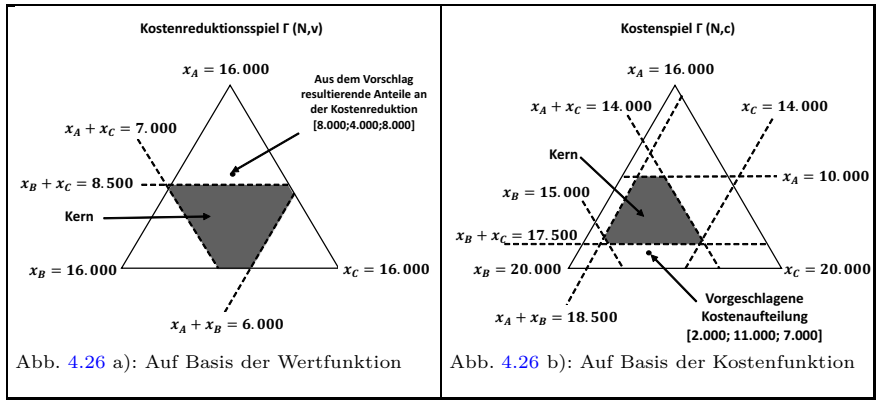


Abb. 4.26 a): Auf Basis der Wertfunktion

Abb. 4.26 b): Auf Basis der Kostenfunktion

Abb. 4.26: Lage des Kerns und des Aufteilungsvorschlags.

Lösung zur Aufgabe 4.11 auf S. 574:

a) Prüfung der Monotonie:

Die Bestimmungsgleichung der Monotonie ist mit Eigenschaft 4.3.2 von S. 474 wie folgt gegeben:

Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist monoton, wenn: $v(S) \leq v(R)$ für alle $S \subseteq R \subseteq N$.

Beispielsweise sind für $n = 2$ fünf Relationen zu überprüfen. In drei Relationen fungiert die leere Menge als Koalition S und die Spieler A und B bilden die Menge R als 1-Spieler-Menge oder zusammen. In zwei Relationen fungiert jeweils A oder B als Menge S und die Menge A,B stellt die Menge R dar. Das führt zu:

$$\binom{2}{0} \cdot \left(2^{2-0} - 1\right) + \binom{2}{1} \cdot \left(2^{2-1} - 1\right) + \binom{2}{2} \cdot \left(2^{2-2} - 1\right)$$
$$= 1 \cdot (4-1) + 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (1-1) = 5$$

Für $n = 3$ ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\binom{3}{0} \cdot \left(2^{3-0} - 1\right) + \binom{3}{1} \cdot \left(2^{3-1} - 1\right) + \binom{3}{2} \cdot \left(2^{3-2} - 1\right) + \binom{3}{3} \cdot \left(2^{3-3} - 1\right)$$

$$= 1 \cdot (8-1) + 3 \cdot (4-1) + 3 \cdot (2-1) + 1 \cdot (1-1) = 19$$

Das kann mit Definition 4.47 verallgemeinert werden.

Definition 4.47: *Die Anzahl der zu überprüfenden Monotonie-Relationen eines Spiels $\Gamma(N,v)$ resultiert aus:* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (2^{n-k} - 1)$.

b) Prüfung der Superadditivität:

Die Superadditivität ist mit Eigenschaft 4.3.3 von S. 474 wie folgt definiert:

Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist superadditiv, wenn gilt: $v(R \cup S) \geq v(R) + v(S)$ für alle $R,S \subseteq N$ mit $R \cap S = \varnothing$.

Zur Bestimmung der Anzahl der zu überprüfenden Relationen kann auf die Menge der Partitionen zurückgegriffen werden, da der Eigenschaft 4.3.3 von S. 474 disjunkte Mengen zugrunde liegen. Die Bellsche Zahl B_n gibt die Anzahl disjunkter, nicht-leerer Teilmengen an, die aus der Zerlegung einer n-elementigen Menge resultiert. Per definitionem gilt $B_0 = 1$, ansonsten gilt: $B_{n+1} = \sum_{k} \binom{n}{k} B_k$ für alle $n \geq 0$. Die ersten Bellschen Zahlen lauten: $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$ sowie $B_5 = 52$.[322]

Bei der Ermittlung der Anzahl der notwendigen, zu prüfenden Relationen wird die große Koalition nicht berücksichtigt. Beispielsweise liegen für $n = 3$ drei 2-Spieler-Koalitionen mit jeweils einer nicht-leeren Partitionsmöglichkeit und eine 3-Spieler-Koalition mit vier nicht-leeren Partitionsmöglichkeiten vor. Somit resultiert aus Def. 4.48 von S. 594:

$$\binom{3}{0} \cdot (B_0 - 1) + \binom{3}{1} \cdot (B_1 - 1) + \binom{3}{2} \cdot (B_2 - 1) + \binom{3}{3} \cdot (B_3 - 1)$$
$$= 1 \cdot (1-1) + 3 \cdot (1-1) + 3 \cdot (2-1) + 1 \cdot (5-1) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$$

Schematisch ergibt sich für die Spielermengen $n = 2$ bis $n = 5$ die Darstellung in Tabelle 4.55.

[322] Vgl. Tittmann (2014: 20).

Tab. 4.55: Partitionsmöglichkeiten.

n	2	3	4	5
B_n	2	5	15	52
Anzahl 2-Spieler Koalition	1	3	6	10
Anzahl 3-Spieler Koalition	/	1	4	10
Anzahl 4-Spieler Koalition	/	/	1	5
Anzahl 5-Spieler Koalition	/	/	/	1
Anzahl der Relationen	$1 \cdot 1 = 1$	$3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$	$6 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 14 = 36$	$10 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 14 + 1 \cdot 51 = 171$

Allgemeingültig ist dieser Zusammenhang in der Definition 4.48 dargestellt.

Definition 4.48: *Die Anzahl der zu überprüfenden Superadditivitäts-Relationen eines Spiels $\Gamma(N,v)$ resultiert aus:* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (B_k - 1)$.

c) Prüfung der Konvexität:

Konvexität wurde in der Eigenschaft 4.3.5 auf S. 475 in zwei Varianten beschrieben. Zuerst wird die folgende Formulierung verwendet:

Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist konvex, wenn für alle $i \in N$ und $S \subseteq R \subseteq N \setminus \{i\}$ gilt: $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(R \cup \{i\}) - v(R)$.

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Mengen S und R ist vergleichbar mit der Monotonierelation. Die Bestimmung der Gleichungen bei $i = B$ und $i = C$ ist identisch. So ergibt sich z. B. für $n = 3$ und $i = A$ die Darstellung in Tabelle 4.56.

Tab. 4.56: Konvexitätsprüfung für ein 3-Personen-Spiel.

i	S	R
A	∅	B
A	∅	C
A	∅	BC
A	B	BC
A	C	BC
$\sum$ 5		

Es sind demzufolge 15 $(= 3 \cdot 5)$ Ungleichungen zur Überprüfung notwendig. Dies kann allgemein dargestellt werden mit:

$$\left[\binom{3-1}{0}\cdot\left(2^{3-1-0}-1\right)+\binom{3-1}{1}\cdot\left(2^{3-1}-1\right)+\binom{3-1}{2}\cdot\left(2^{3-1-2}-1\right)\right]\cdot 3$$
$$=(1\cdot 3+2\cdot 1)\cdot 3=15$$

Für $n=4$ und $i=A$ resultiert die Darstellung in Tabelle 4.57.

Tab. 4.57: Konvexitätsprüfung für ein 4-Personen-Spiel.

i	S	R
A	∅	B
A	∅	C
A	∅	D
A	∅	BC
A	∅	BD
A	∅	CD
A	∅	BCD
A	B	BC
A	B	BD
A	B	BCD
A	C	BC
A	C	CD
A	C	BCD
A	D	BD
A	D	CD
A	D	BCD
A	BC	BCD
A	BD	BCD
A	CD	BCD
∑ 19		

Das kann formuliert werden zu:

$$\left[\binom{4-1}{0}\cdot\left(2^{4-1-0}-1\right)+\binom{4-1}{1}\cdot\left(2^{4-1-1}-1\right)\right]\cdot 4$$
$$+\left[\binom{4-1}{2}\cdot\left(2^{4-1-2}-1\right)+\binom{4-1}{3}\cdot\left(2^{4-1-3}-1\right)\right]\cdot 4$$
$$=(1\cdot 7+3\cdot 3+3\cdot 1+1\cdot 0)\cdot 4$$
$$=76$$

Dieser Zusammenhang ist allgemeingültig in Definition 4.49 formuliert.

Definition 4.49: *Die Anzahl der zu überprüfenden Konvexitäts-Relationen eines Spiels $\Gamma(N,v)$ resultiert aus:*

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot\left(2^{n-1-k}-1\right)\right)\cdot n$$

In der Eigenschaft 4.3.5 auf S. 475 wurde eine weitere Beschreibung der Konvexität erwähnt. Diese lautet:

Ein Spiel $\Gamma(N,v)$ ist konvex, wenn $v(S\cup R)+v(S\cap R)\geq v(R)+v(S)$ für alle $R,S\subseteq N$ gilt.

Nach dieser Definition dürfen sich die Mengen S und R schneiden. Die Menge S darf aber keine Teilmenge von R und R darf keine Teilmenge von S sein. Daraus folgt, dass weder die Menge S noch die Menge R als Gesamtmenge N dargestellt werden können. Diese Bedingung schließt die Darstellung der Mengen S oder R als die Gesamtmenge N aus. Die leere Menge wird hier nicht betrachtet, da die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist. Für $n=3$ sind neun Koalitionssysteme zu überprüfen:

$$\sum_{k=1}^{2}\left[\sum_{b=0}^{\binom{3}{k}-1}\left(\sum_{a=1}^{k}\left(\binom{3}{a}-\binom{k}{a}\right)-b\right)\right]=$$
$$\sum_{b=0}^{\binom{3}{1}-1}\left(\sum_{a=1}^{1}\left(\binom{3}{a}-\binom{1}{a}\right)-b\right)+\sum_{b=0}^{\binom{3}{2}-1}\left(\sum_{a=1}^{2}\left(\binom{3}{a}-\binom{2}{a}\right)-b\right)=$$
$$\left(\binom{3}{1}-\binom{1}{1}-0+\binom{3}{1}-\binom{1}{1}-1+\binom{3}{1}-\binom{1}{1}-2\right)+$$
$$\left(\left(\binom{3}{1}-\binom{2}{1}+\binom{3}{2}-\binom{2}{2}\right)-0+\left(\binom{3}{1}-\binom{2}{1}+\binom{3}{2}-\binom{2}{2}\right)-1+\right.$$
$$\left.\left(\binom{3}{1}-\binom{2}{1}+\binom{3}{2}-\binom{2}{2}\right)-2\right)=9$$

Für $n=4$ müssen 55 Koalitionssysteme und für $n=5$ 285 Koalitionssysteme überprüft werden. Allgemein kann der Zusammenhang wie in Definition 4.50 beschrieben werden.

Definition 4.50: *Die Anzahl ϵ der zu überprüfenden Koalitionssysteme für die Konvexität eines Spiels $\Gamma(N,v)$ resultiert aus:*

$$\epsilon=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{b=0}^{\binom{n}{k}-1}\left(\sum_{a=1}^{k}\left(\binom{n}{a}-\binom{k}{a}\right)-b\right)\right]$$

Für $n=4$ müssen 55 Koalitionssysteme und für $n=5$ müssen 285 Koalitionssysteme überprüft werden.

Lösung zur Aufgabe 4.12 auf S. 575:

a) Das Spiel ist nicht konvex, jedoch balanciert.

b)
- Die SHAPLEY-Lösung liefert folgende Ergebnisse:
  $\phi_A(v) = \frac{21}{4}$, $\phi_B(v) = \frac{35}{12}$,$\phi_C(v) = \frac{79}{12}$ sowie $\phi_D(v) = \frac{9}{4}$.
- Der τ-Wert resultiert mit $\tau(v) = (5\frac{2}{3},3,7\frac{1}{3},1)$.
- Der NUCLEOLUS ist $nuc(v) = (6,3,7,1)$.

c) Die SHAPLEY-Lösung ist kein Kernbestandteil, da die Koalition A,B,C einen geringeren Wert erhält als sie erwirtschaftet ($v(A,B,C) = 16$). Der τ-Wert ist ein Kernbestandteil. Der NUCLEOLUS ist Kernbestandteil per definitionem.

d) Es gilt $\tau(v) = x_1$ und $nuc(v) = x_2$. Damit resultieren die geordneten Vektoren: $\hat{x}_1 = (1,3,5\frac{2}{3},7\frac{1}{3})$ und $\hat{x}_2 = (1,3,6,7)$. Es ergibt sich die folgende Relation: $\hat{x}_2 \succ_{Lor} \hat{x}_1$. Die euklidischen Distanzen der Lösungen lauten: $||x_1|| = \sqrt{95{,}889}$ sowie $||x_2|| = \sqrt{95}$.

e) Die LORENZ-Lösung folgt mit $L(v) = (\frac{13}{2},3,\frac{13}{2},1) = x_3$. Die euklidische Distanz beträgt $||x_3|| = \sqrt{94{,}5}$.

Es resultiert $\hat{x}_3 = (1,3,\frac{13}{2},\frac{13}{2})$ und somit gilt: $\hat{x}_3 \succ_{Lor} \hat{x}_2 \succ_{Lor} \hat{x}_1$.

Lösung zur Aufgabe 4.13 auf S. 575:

a) Die SHAPLEY-Lösung liefert mit Definition 4.16 von S. 500 folgende Ergebnisse:

$\phi_A(v) = \frac{500}{3}$, $\phi_B(v) = \frac{350}{3}$, $\phi_C(v) = \frac{50}{3}$.

b) Der Kern wird wie folgt überprüft:

$$\begin{array}{ll}
x_A & \geq 100 \\
x_B & \geq 100 \\
x_C & \geq -100 \\
x_A + x_B + x_C & = 300 \\
x_A + x_B & \geq 200 \\
x_A + x_C & \geq 200 \\
x_B + x_C & \geq 100 \\
2 \cdot (x_A + x_B + x_C) & \geq 500 \\
x_A + x_B + x_C & \geq 250 \\
x_A + x_B + x_C & \leq v(N) = 300
\end{array}$$

Der Kern ist deshalb nicht leer.

c) Die SHAPLEY-Lösung gehört nicht zum Kern, da $x_A + x_C = \frac{550}{3} \not\geq v(\{A,C\}) = 200$.

d) Die LORENZ-Lösung folgt aus Def. 4.27 auf S. 522 mit $L(v) = (100,100,100)$.

e) In der Abbildung 4.27 ist die SHAPLEY-Lösung, die LORENZ-Lösung sowie der Kern dargestellt. Es wird deutlich, dass der Kern aus einer Linie besteht. Diese legt fest, dass die Auszahlung für Spieler B in jeder Lösung genau 100 betragen muss, wohingegen die Auszahlung für Spieler A definiert ist durch $100 \leq x_a \leq 200$. Jede Auszahlung auf dieser so definierten Linie ist ein Kernbestandteil. Somit gehört auch die Gleichverteilung dazu, die in diesem Fall mit der LORENZ-Lösung identisch ist.

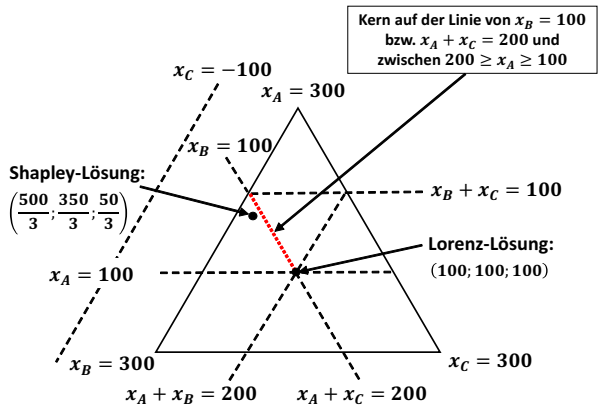


Abb. 4.27: Grafische Darstellung der Lösungen.

Lösung zur Aufgabe 4.14 auf S. 576:

a) Das Spiel ist konvex.

b) Die SHAPLEY-Lösung ergibt mit Definition 4.16 von S. 500 folgende Ergebnisse:

$\phi_A(v) = 6\frac{2}{3}$, $\phi_B(v) = \phi_C(v) = 2\frac{2}{3}$,

Die DUTTA-RAY-Lösung führt mit Definition 4.28 von S. 524 zu folgendem Resultat:

$DRL(v) = \left(5, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$.

Beide Lösungen liegen im Kern, da das Spiel konvex ist.

c) Zur Prüfung der LORENZ-Dominanz wird Tab. 4.58 verwendet.

Tab. 4.58: Prüfung der Lösungen auf LORENZ-Dominanz.

Zuteilung x	**Geordneter Vektor $\hat{x}$**	$\sum_{i=1}^{1}$	$\sum_{i=1}^{2}$	$\sum_{i=1}^{3}$
$x_1 = \text{SHAPLEY} = \left(6\frac{2}{3},2\frac{2}{3},2\frac{2}{3}\right)$	$\hat{x}_1 = (2\frac{2}{3},2\frac{2}{3},6\frac{2}{3})$	$2\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	12
$x_2 = \text{DUTTA-RAY} = \left(5,3\frac{1}{2},3\frac{1}{2}\right)$	$\hat{x}_2 = (3\frac{1}{2},3\frac{1}{2},5)$	$3\frac{1}{2}$	7	12

Es wird deutlich, dass die DUTTA-RAY-Lösung die SHAPLEY-Lösung entsprechend Def. 4.25 von S. 521 LORENZ-dominiert.

d) Die Gleichverteilung ist kein Kernbestandteil.

Lösung zur Aufgabe 4.15 auf S. 576:

Es handelt sich um ein Spiel mit fünf Spielern. Die Jahreskosten werden zuerst in wöchentliche Gemeinkosten umgerechnet. Es ergeben sich: c_H =0,25 Mio. €, c_D =0,75 Mio. €und c_T =1 Mio. €. Die Schiffstypen werden der Größe nach aufsteigend geordnet. Es gilt für den Betrachtungsmonat $|N_1| = |N_2| = 2$ und $|N_3| = 1$. Daraus folgt: $N_1 = \{A\},\{B\}$, $N_2 = \{C\},\{D\}$ und $N_3 = \{E\}$.

Die Aufgabe lässt sich auf zwei Wegen lösen: entweder durch die Konstruktion eines Flughafenspiels oder durch Anwendung der Definition 4.35 von S. 543. Zuerst werden die Kostenanteile mit Definition 4.35 ermittelt, wobei die Werte in Tsd. € angegeben sind:

$$
\begin{aligned}
x_A &= \frac{250}{5} && = 50,\\
x_B &= \frac{250}{5} && = 50,\\
x_C &= \frac{250}{5} + \frac{750-250}{3} && = \frac{650}{3} = 216\frac{2}{3},\\
x_D &= \frac{250}{5} + \frac{750-250}{3} && = \frac{650}{3} = 216\frac{2}{3},\\
x_E &= \frac{250}{5} + \frac{750-250}{3} + (1.000-750) && = \frac{1.400}{3} = 466\frac{2}{3},\\
& && \text{Summe} = 1.000.
\end{aligned}
$$

Der andere Weg besteht in der Entwicklung der Kostenfunktion auf Basis der Definition 4.34 auf S. 543. Das Resultat ist in Tabelle 4.59 zu sehen.

Tab. 4.59: Kostenfunktion.

S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)	S	c(S)
ø	0	{A,D}	750	{A,B,C}	750	{B,D,E}	1.000
{A}	250	{A,E}	1.000	{A,B,D}	750	{C,D,E}	1.000
{B}	250	{B,C}	750	{A,B,E}	1.000	{A,B,C,D}	750
{C}	750	{B,D}	750	{A,C,D}	750	{A,B,C,E}	1.000
{D}	750	{B,E}	1.000	{A,C,E}	1.000	{A,B,D,E}	1.000
{E}	1.000	{C,D}	750	{A,D,E}	1.000	{A,C,D,E}	1.000
{A,B}	250	{C,E}	1.000	{B,C,D}	750	{B,C,D,E}	1.000
{A,C}	750	{D,E}	1.000	{B,C,E}	1.000	{A,B,C,D,E}	1.000

Aus der Kostenfunktion in Tabelle 4.59 wird mit der Definition 4.30 die Koalitionsfunktion v des Spiels $\Gamma(N,v)$ ermittelt (vgl. Tabelle 4.60).

Tab. 4.60: Kostenreduktionfunktion=Koalitionsfunktion.

S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)	S	v(S)
ø	0	{A,D}	250	{A,B,C}	500	{B,D,E}	1.000
{A}	0	{A,E}	250	{A,B,D}	500	{C,D,E}	1.500
{B}	0	{B,C}	250	{A,B,E}	500	{A,B,C,D}	1.250
{C}	0	{B,D}	250	{A,C,D}	1.000	{A,B,C,E}	1.250
{D}	0	{B,E}	250	{A,C,E}	1.000	{A,B,D,E}	1.250
{E}	0	{C,D}	750	{A,D,E}	1.000	{A,C,D,E}	1.750
{A,B}	250	{C,E}	750	{B,C,D}	1.000	{B,C,D,E}	1.750
{A,C}	250	{D,E}	750	{B,C,E}	1.000	{A,B,C,D,E}	2.000

Mit den Eingangsdaten aus der Tabelle 4.60 ergeben sich folgende SHAPLEY-Werte: $\phi_A(v) = \phi_B(v) = 200$, $\phi_C(v) = \phi_D(v) = \phi_E(v) = \frac{1.600}{3} = 533\frac{1}{3}$. Die anschließende Verwendung der Definition 4.31 führt zu: $c_A = c_B = 250 - 200 = 50$, $c_C = c_D = 750 - 533\frac{1}{3} = 216\frac{2}{3}$ und $c_E = 1.000 - 533\frac{1}{3} = 466\frac{2}{3}$. Das sind dieselben Werte wie bei Anwendung von Definition 4.35.

Lösung zur Aufgabe 4.16 auf S. 577:

Gewinnanteile bzw. Ansprüche q_i laut HGB:

Gesellschafter	gesetzliche Ansprüche q_i		zusätzliche Ansprüche p_i
A	12.500 € · 0,04	500 €	
B	37.500 € · 0,04	1.500 €	je $\frac{Gewinn - \sum_{i=1}^{n} q_i}{n}$
C	50.000 € · 0,04	2.000 €	
D	100.000 € · 0,04	4.000 €	
Summe	Q = 8.000€		E - 8.000 €

- Proportionale Verteilung:

Mit Definition 4.38 ergeben sich:

$$f_A^P(\hat{q}) = 500 \cdot \frac{6}{8} = 375, \qquad f_B^P(\hat{q}) = 1.500 \cdot \frac{6}{8} = 1.125,$$

$$f_C^P(\hat{q}) = 2.000 \cdot \frac{6}{8} = 1.500, \qquad f_D^P(\hat{q}) = 4.000 \cdot \frac{6}{8} = 3.000.$$

- Angepasste proportionale Verteilung:

Im **ersten Schritt** werden die minimalen Ansprüche m_i aller Spieler nach Definition 4.39 ermittelt, was zu folgenden Ergebnissen führt:

$$\begin{aligned}
m_i &= \max\{0; E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j\} \\
m_A &= \max\{0; 6.000 - (\quad 1.500 + 2.000 + 4.000)\} &&= 0 \\
m_B &= \max\{0; 6.000 - (500 + \quad 2.000 + 4.000)\} &&= 0 \\
m_C &= \max\{0; 6.000 - (500 + 1.500 \quad + 4.000)\} &&= 0 \\
m_D &= \max\{0; 6.000 - (500 + 1.500 + 2.000 \quad)\} &&= 2.000 \\
&\sum_{i=1}^{n} m_i &&= 2.000
\end{aligned}$$

Im **zweiten Schritt** wird die Summe dieser minimalen Ansprüche von dem verfügbaren Budget abgezogen. Es verbleibt das Restbudget $E^* = E - \sum_{i \in N} m_i$, das aufzuteilen ist. Für das Beispiel gilt: $6.000 - 2.00 = 4.000$.

Im **dritten Schritt** ergibt sich ein Restanspruch für jeden Spieler gemäß Definition 4.40 wie folgt:

$$\begin{aligned}
d_i &= q_i - m_i \\
d_A &= 500 - 0 &&= 500 \\
d_B &= 1.500 - 0 &&= 1.500 \\
d_C &= 2.000 - 0 &&= 2.000 \\
d_D &= 4.000 - 2.000 &&= 2.000 \\
Q^* &= \sum_{i=1}^{n} d_i &&= 6.000
\end{aligned}$$

Mit diesen Zwischenergebnissen kann im **letzten Schritt** Definition 4.41 angewendet werden. Es resultieren die endgültigen Anteile:

$$\begin{aligned}
x_i &= m_i + d_i \cdot \frac{E^*}{Q^*} \\
x_A &= 0 + 500 \cdot \tfrac{4}{6} &&= 333\tfrac{1}{3} \\
x_B &= 0 + 1.500 \cdot \tfrac{4}{6} &&= 1.000 \\
x_C &= 0 + 2.000 \cdot \tfrac{4}{6} &&= 1.333\tfrac{1}{3} \\
x_D &= 2.000 + 2.000 \cdot \tfrac{4}{6} &&= 3.333\tfrac{1}{3} \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i &&= 6.000
\end{aligned}$$

- Zufallsbeitrittsregel:

  Der Anteil eines Spielers entsprechend der Zufallsbeitrittsregel ist in Definition 4.42 beschrieben. Die Ergebnisse für das Beispiel sind in Tabelle 4.61 dargestellt.

Tab. 4.61: Zufallsbeitrittsregel.

	Anteil des Spielers am Budget in Abhängigkeit von der Reihenfolge des Eintreffens			
Permutationen	$\mathbf{f_A^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_B^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_C^Z(\hat{q})}$	$\mathbf{f_D^Z(\hat{q})}$
A,B,C,D	500	1.500	2.000	2.000
A,B,D,C	500	1.500	0	4.000
A,C,B,D	500	1.500	2.000	2.000
A,C,D,B	500	0	2.500	3.000
A,D,B,C	500	1.500	0	4.000
A,D,C,B	500	0	1.500	4.000
B,A,C,D	500	1.500	1.500	2.500
B,A,D,C	500	1.500	0	4.000
B,C,A,D	500	1.500	2.000	2.000
B,C,D,A	0	1.500	2.000	2.500
B,D,A,C	500	1.500	0	4.000
B,D,C,A	0	1.500	500	4.000
C,A,B,D	500	1.500	2.000	2.000
C,A,D,B	500	0	2.000	3.500
C,B,A,D	500	1.500	2.000	2.000
C,B,D,A	0	1.500	2.000	2.500
C,D,A,B	0	0	2.000	4.000
C,D,B,A	0	0	2.000	4.000
D,A,B,C	500	1.500	0	4.000
D,A,C,B	500	0	1.500	4.000
D,B,A,C	500	1.500	0	4.000
D,B,C,A	0	1.500	500	4.000
D,C,A,B	0	0	2.000	4.000
D,C,B,A	0	0	2.000	4.000
Summe	8.000	24.000	32.000	80.000
Durchschnitt	$333\frac{1}{3}$	1.000	$1.333\frac{1}{3}$	$3.333\frac{1}{3}$

- Bedingte Ertrags-Gleichverteilung:

  Die bedingte Ertrags-Gleichverteilung ergibt sich mit Definition 4.43 wie folgt:

$$f_A^{\ddot{U}} = \min\{500\ ; \frac{(6.000-0)}{4-(1-1)}\} = 500$$

$$f_B^{\ddot{U}} = \min\{1.500\ ; \frac{(6.000-0)-(500)}{4-(2-1)}\} = 1.500$$

$$f_C^{\ddot{U}} = \min\{2.000\ ; \frac{(6.000-0)-(500)-(1.500)}{4-(3-1)}\} = 2.000$$

$$f_D^{\ddot{U}} = \min\{4.000\ ; \frac{(6.000-0)-(500)-(1.500)-(2.000)}{4-(4-1)}\} = 2.000$$

- Bedingte Verlust-Gleichverteilung:

  Die bedingte Verlust-Gleichverteilung ergibt sich mit Definition 4.44 wie folgt:

$$
\begin{aligned}
f_A^V &= 500 - \min\{500\ ; \frac{(8.000-6.000)-0}{4-(1-1)}\} && = 0\\
f_B^V &= 1.500 - \min\{1.500\ ; \frac{(8.000-6.000)-0-500}{4-(2-1)}\} && = 1.000\\
f_C^V &= 2.000 - \min\{2.000\ ; \frac{(8.000-6.000)-0-500-500}{4-(3-1)}\} && = 1.500\\
f_D^V &= 4.000 - \min\{4.000\ ; \frac{(8.000-6.000)-0-500-500-500}{4-(4-1)}\} && = 3.500
\end{aligned}
$$

- Talmud-Regel:

  Im vorliegenden Fall gilt: $E > \frac{Q}{2}$. Damit folgt: $L = Q - E$ und somit $2.000 = 8.000 - 6.000$. Die Aufteilung nach der Talmud-Regel erfolgt mit Definition 4.45 und bringt folgende Resultate:

$$
\begin{aligned}
f_1^T &= 500 - \min\left\{\tfrac{1}{2}\cdot 500\ ;\ \frac{2.000}{4-(1-1)}\right\} && = 250\\
f_2^T &= 1.500 - \min\left\{\tfrac{1}{2}\cdot 1.500\ ;\ \frac{2.000-250}{4-(2-1)}\right\} && = 916\tfrac{2}{3}\\
f_3^T &= 2.000 - \min\left\{\tfrac{1}{2}\cdot 2.000\ ;\ \frac{2.000-250-583\frac{1}{3}}{4-(3-1)}\right\} && = 1.416\tfrac{2}{3}\\
f_4^T &= 4.000 - \min\left\{\tfrac{1}{2}\cdot 4.000\ ;\ \frac{2.000-250-583\frac{1}{3}-583\frac{1}{3}}{4-(4-1)}\right\} && = 3.416\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

4.11 Literaturverzeichnis

Agndal, H./Nilsson, U. (2010): Different open book accounting practices for different purchasing strategies. In: Management Accounting Research, 21 (3): 147–166.

Alenius, E./Lind, J./Strömsten, T. (2015): The role of open book accounting in a supplier network: creating and managing interdependencies across company boundaries. In: Industrial Marketing Management, 45 (2): 195–206.

Alidaee, B. (1999): Three-person spanning tree games. In: Mathematical and Computer Modelling, 29 (1): 107–123.

Arin, J./Feltkamp, V. (2005): Monotonicity properties of the Nucleolus on the domain of veto balanced games. In: TOP, 13 (2): 331–341.

Arin, J./Katsev, I. (2016): A monotonic core solution for convex TU games. In: International Journal of Game Theory, 45 (4): 1013–1029.

Arin, J./Katsev, I. (2018): The SD-prenucleolus for TU-Games: coalitional monotonicity and core stability. In: Mueller, D./Trost, R. (Hg.): Game theory in management

accounting – implementing incentives and fairness. Berlin et al.: Springer, S. 301–321.

Arin, J./Kuipers, J./Vermeulen, D. (2008): An axiomatic approach to egalitarianism in TU-games. In: International Journal of Game Theory, 37 (4): 565–580.

Auer, B./Rottmann, H. (2020): Statistik und Ökonometrie für Wirtschaftswissenschaftler. 4. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Aumann, R. J. (1960): Linearity of unrestricted transferable utilities. In: Naval Research Logistics Quarterly, 7 (3): 281–284.

Aumann, R. J. (2010): Some non-superadditive games, and their Shapley values, in the Talmud. In: International Journal of Game Theory, 39 (1/2): 3–10.

Aumann, R. J./Maschler, M. (1985): Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. In: Journal of Economic Theory, 36 (2): 195–213.

Bankhofer, U./Vogel, J. (2008): Datenanalyse und Statistik. Wiesbaden: Gabler.

Barnard, C. (1938): The functions of the executive. Cambridge: Harvard University Press.

Becker, H. P. (2016): Investition und Finanzierung. 7. Aufl., Wiesbaden: Springer.

Behrens, J. (2009): Meso-soziologische Ansätze und die Bedeutung gesundheitlicher Unterschiede für die allgemeine Soziologie sozialer Ungleichheit. In: Richter, M./Hurrelmann, K. (Hg.): Gesundheitliche Ungleichheit. 2. Aufl., Wiesbaden: VS, S. 55–76.

Bergantiños, G./Massó, J. (1996): Notes on a new compromise value: the χ-value. In: Optimization, 38 (3): 277–286.

Bergantiños, G./Massó, J. (2002): The chi-compromise value for non-transferable utility games. In: Mathematical Methods of Operations Research, 56 (2): 269–286.

Bergstrom, T. C. (1997): A survey of theories of the family. In: Rosenzweig, M. R./Stark, O. (Hg.): Handbook of population and family economics. Amsterdam: Elsevier, S. 21–79.

Bergstrom, T. C./Varian, H. R. (1985): When do market games have transferable utility? In: Journal of Economic Theory, 35 (2): 222–233.

Bhakar, R./Sriram, V. S./Padhy, N. P./Gupta, H. O. (2010): Probabilistic game approaches for network cost allocation. In: IEEE Transactions on Power Systems, 25 (1): 51–58.

Bilbao, J. M. (2000): Cooperative games on combinational structures. Dordrecht: Kluwer.

Bird, C. G. (1976): On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach. In: Network, 6 (4): 335–350.

Bitz, M. (1981): Entscheidungstheorie. München: Vahlen.

Bondareva, O. (1963): Nekotorjye primeneniya metodov linynogo programmorovaniya k teorii kooperativnikh igr. In: Problemi Kibernetiki 10: 119–139. Übersetzung und Veröffentlichung unter dem Titel: Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. In: Morgenstern, O. (Hg.): Selected Russian papers on game theory 1959–1965. Princeton: University Press, S. 79–114.

Borrero, D. V./Sánchez, F. J./Hinojosa, M. A./Mármol, A. M. (2018): A random arrival rule for division problems with multiple references. In: International Transactions in Operational Research, 25 (3): 963–982.

Börsensachverständigenkommission beim Bundesministerium der Finanzen (Hg.)(2000): Grundsätze für die Zuteilung von Aktienemissionen an Privatanleger. Frankfurt/M.: o. A.

Brânzei, R./Dimitrov, D./Tijs, S. H. (2008): Models in cooperative game theory. 2. Aufl., Berlin.

Breyer, F. (2020): Mikroökonomik – Eine Einführung. 7. Aufl., Berlin u. a.: Springer Gabler.

Brüggemann, D. H. (2011): Anpassungsmöglichkeiten der deutschen Rindermast an die Liberalisierung der Agrarmärkte. Johann Heinrich von Thünen-Institut (vTI), Bundesforschungsinstitut für Ländliche Räume, Wald und Fischerei, Sonderheft 345. Braunschweig: o. A.

Calleja, P./Rafels, C./Tijs, S. H. (2012): Aggregate monotonic stable single-valued solutions for cooperative games. In: International Journal of Game Theory, 41 (4): 899–913.

Carreras, F./Owen, G. (2013): Pure bargaining problems and the Shapley rule. In: Holler, M. J./Nurmi, H. (Hg.): Power, voting, and voting power: 30 years after. New York et al.: Springer, S. 681–702.

Chakravarty, S. R./Mitra, M./Sarkar, P. (2015): A course on cooperative game theory. Cambridge: University Press.

Charles, S. L./Hansen, D. R. (2008): An evaluation of activity-based costing and functional-based costing: a game-theoretic approach. In: Internationa Journal of Production Economics, 113 (1): 282–296.

Chmielewicz, K. (1994): Forschungskonzeptionen der Wirtschaftswissenschaft. 3. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Claus, A./Kleitman, D. J. (1973): Cost allocation for spanning tree. In: Network, 3 (4): 289–304.

Coenenberg, A. G./Fischer, T. M./Günther, T. (2016): Kostenrechnung und Kostenanalyse. 9. Aufl., Stuttgart: Schäffer-Poeschel.

Curiel, I. (1997): Cooperative game theory and applications: cooperative games arising from combinatorial optimization problems. Boston u. a.: Springer.

Curiel, I./Maschler, M./Tijs, S. H. (1987): Bankruptcy games. In: Zeitschrift für Operations Research, 31 (5): A 143–A 159.

Driessen, T. S. H. (1988): Cooperative games, solutions and applications. Dordrecht: Kluwer.

Driessen, T. S. H./Tijs, S. H. (1985): The τ-value, the core and semiconvex games. In: International Journal of Game Theory, 4 (4): 229–248.

Dutta, B. (1990): The egalitarian solution and reduced game properties in convex games. In: International Journal of Game Theory, 19 (2): 153–169.

Dutta, B./Ray, D. (1989): A concept of egalitarianism under participation constraints. In: Econometrica, 57 (3): 615–635.

Dyckhoff, H./Kasah, T./Quandel, A. (2012): Allokation von Kosten und Umweltwirkungen bei Kuppelproduktion: wieviel darf's denn sein? In: Zeitschrift für Umweltpolitik & Umweltrecht, 35 (1): 79–115.

Ehrhart, K.-M./Güth, W./Berninghaus: K. (2010): Strategische Spiele. 3. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Estévez-Fernández, A./Reijnierse, H. (2014): On the core of cost-revenue games: minimum cost spanning tree games with revenues. In: European Journal of Operational Research, 237 (2): 606–616.

Faulhaber, G. R. (1975): Cross-subsidization: pricing in public enterprises. In: American Economic Review, 65 (5): 966–977.

Fiestras-Janeiro, M./García-Jurado, I./Mosquera, M. (2011): Cooperative games and cost allocation problems. In: Top, 19 (1): 1–22.

Fischer, D. (2008): Leistungsgerechte Zuteilung von Erlösen in Netzwerkorganisationen: Am Beispiel von Verkehrsverbünden. Baden-Baden: Nomos.

Forschungsstelle für Energiewirtschaft (Hg.) (1999): Ermittlung von Energiekennzahlen für Anlagen, Herstellungsverfahren und Erzeugnisse. München: o. A.

Friedrich, C. (2010): Milchverarbeitung und -vermarktung in Deutschland - eine deskriptive Analyse der Wertschöpfungskette. Johann Heinrich von Thünen-Institut (vTI), Bundesforschungsinstitut für Ländliche Räume, Wald und Fischerei, Arbeitsbericht 06/2010. Braunschweig: o. A.

Frisk, M./Göthe-Lundgren, M./Jørnsten, K./Rönnqvist, M. (2010): Cost allocation in collaborative forest transportation. In: European Journal of Operations Research, 205 (2): 448–458.

Fromen, B. (1997): Reducing the number of linear programs needed for solving the nucleolus problem of n-person game theory. In: European Journal of Operational Research, 98(3): 626–636.

Fromen, B. (2004): Faire Aufteilung in Unternehmensnetzwerken: Lösungsvorschläge auf der Basis der kooperativen Spieltheorie. Wiesbaden: DUV.

Fujishige, S. (1980): Lexicographically optimal base of a polymatroid with respect to a weight vector. In: Mathematics of Operations Research, 5 (2): 186–196.

Getán, J./Montes, J. (2010): On cooperative games with large monotonic core. In: TOP, 18 (2): 493–508.

Gilles, R. P. (2010): The cooperative game theory of networks and hierarchies. Berlin u. a.: Springer.

Gillies, D. B. (1959): Solutions to general non-zero-sum-games. In: Tucker, A. W./Luce, R. D. (Hg.): Contributions to the theory of games - vol. IV. Princeton: University Press, S. 47–87.

González-Díaz, J./García-Jurado, I./Fiestras-Janeiro, M. G. (2010): An introductory course on mathematical game theory. Providence: American Mathematical Society.

González-Díaz, J./Mirás Calvo, M. Á./Quinteiro Sandomingo, C./Sánchez Rodríguez, E. (2016): Airport games: the core and its center. In: Mathematical Social Sciences, 82 (July): 105–115.

Gorman, W. M. (1953): Community preference fields. In: Econometrica, 21 (1): 63–80.

Gorman, W. M. (1959): Separable utility and aggregation. In: Econometrica, 27 (3): 469–481.

Gorman, W. M. (1961): On a class of preference fields. In: Metroeconomica, 13 (2): 53–56.

Grafe, F./Iñarra, E./Zarzuelo, J. (1998): Population monotonic allocation schemes on externality games. In: Mathematical Methods of Operations Research, 48 (1): 71–80.

Granot, D./Huberman, G. (1981): Minimum cost spanning tree games. In: Mathematical Programming, 21 (1): 1–18.

Granot, D./Huberman, G. (1982): The relationship between convex games and minimum cost spanning tree games: a case for permutationally convex games. In: SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 3 (3): 288–292.

Granot, D./Huberman, G. (1984): On the core and the nucleolus of minimum cost spanning tree games. In: Mathematical Programming, 29 (3): 323–347.

Guajardo, M./Jørnsten, K. (2015): Common mistakes in computing the Nucleolus. In: European Journal of Operations Research, 241 (3): 931–935.

Guajardo, M./Rønnqvist, M. (2016): A review on cost allocation methods in collaborative transportation. In: International Transactions in Operational Research, 23 (3): 371–392.

Hallefjord, Å./Helming, R./Jørnsten, K. (1995): Computing the Nucleolus when the characteristic function is given implicitly: a constraint generation approach. In: International Journal of Game Theory, 24 (4): 357–372.

Hamlen, S./Hamlen, W. A./Tschirhart, J. (1980): The use of the generalized Shapley allocation in joint cost allocation. In: The Accounting Review, 55 (2): 269–287.

Hauschildt, J./Salomo, S./Schultz, C./Kock, A. (2016): Innovationsmanagement. 6. Aufl., München: Vahlen.

HGB (2018): Handelsgesetzbuch in der Fassung vom 17.07.2017. 62. Aufl., München.

Hasan, K. N./Saha, T. K./Chattopadhyay, D./Eghbal, M. (2014): Benefit-based expansion cost allocation for large scale remote renewable power integration into Australian grid. In: Applied Energy, 113 (1): 836–847.

Helmstädter, E. (1999): Gerechtigkeit und Fairneß in Wirtschaft und Gesellschaft. In: Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften (Hg.): Vorträge N 442. Wiesbaden: Westdeutscher Verlag, S. 7–36.

Hens, T./Pamini, P. (2008): Grundzüge der analytischen Mikroökonomie. Berlin u. a.: Springer.

Herlyn, E. L. A. (2012): Einkommensverteilungsbasierte Präferenz- und Koalitionsanalysen auf der Basis selbstähnlicher Equity-Lorenzkurven. Wiesbaden: Gabler.

Hiller, T. (2011): Analyse ausgewählter Problemstellungen der Organisations- und Personalwirtschaft mit Hilfe der kooperativen Spieltheorie. Wiesbaden: DUV.

Hof, J. (1993): Coactive forest management. London.

Hokari, T. (2000a): The Nucleolus is not aggregate-monotonic on the domain of convex games. In: International Journal of Game Theory, 29 (1): 133–137.

Hokari, T. (2000b): Population monotonic solutions on convex games. In: International Journal of Game Theory, 29 (3): 327–338.

Hokari, T./Uchida, S. (2017): On the existence of population-monotonic solutions on the domain of quasi-convex games. In: Operations Research Letters, 45 (1): 90–92.

Hokari, T./van Gellekom, A. (2002): Population monotonicity and consistency in convex games: some logical relations. In: International Journal of Game Theory, 31 (4): 593–607.

Holler, M. J./Illing, G./Napel, S. (2019): Einführung in die Spieltheorie. 8. Aufl., Berlin u. a.: Springer Gabler.

Homburg, C./Scherpereel, P. (2008): How should the cost of joint risk capital be allocated for performance measurement? In: European Journal of Operations Research, 187 (1): 208–227.

Honecker, M. (2004): Die Begrenzung von Gesundheitsleistungen als ethisches Problem. In: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswirtschaft, 93 (4): 623–637.

Honohan, P./Neary, J. P. (2003): W. M. Gorman (1923–2003). In: The Economic and Social Review, 34 (2): 195–209.

Honohan, P./Neary, J. P. (2021): W. M. Gorman (1923–2003). In: Cord, R. A. (Hg.): The Palgrave Companion to Oxford Economics. Cham: Palgrave Macmillan, S. 503–519.

Hougaard, J. L. (2009): An introduction to allocation rules. Berlin, et al.: Springer.

Hougaard, J. L./Peleg, B./Østerdal, L. P. (2005): The Dutta–Ray solution on the class of convex games: a generalization and monotonicity properties. In: International Journal of Game Theory, 7 (4): 431–442.

Hougaard, J. L./Peleg, B./Thorlund-Petersen, L. (2001): On the set of Lorenz-maximal imputations in the core of a balanced game. In: International Journal of Game Theory, 30 (2): 147–165.

Hougaard, J. L./Smilgins, A. (2016): Risk capital allocation with autonomous subunits: The Lorenz set. In: Insurance: Mathematics and Economics, 67 (C): 151–157.

Housman, D./Clark, L. (1998): Core and monotonic allocation methods. In: International Journal of Game Theory, 27 (4): 611–616.

Ischboldin, B. (1960): Zur Kritik der mathematischen Methode in den Wirtschaftswissenschaften. In: Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung, 12 (4): 209–224.

Jähn, H. (2008): Leistungsanalyse und Gewinnverteilung in vernetzten Produktionsstrukturen: Möglichkeiten im Rahmen des Extended Value Chain Management-Ansatzes. Hamburg: Dr. Kovač.

Jain, K./Mahdian, M. (2007): Cost sharing. In: Nisan, N./Roughgarden, T./Tardos, E./Vazirani, V. V. (Hg.): Algorithmic game theory. Cambridge: University Press, S. 385–410.

Jene, S. (2015): Die faire Verteilung von Effizienzgewinnen in Kooperationen – Eine kritische Analyse der Eignung des τ-Werts und des χ-Werts. Wiesbaden: Gabler.

Jene, S./Zelewski, S. (2011a): Fair distribution of added values in networks of autonomous actors. In: Jodlbauer, H./Olhager, J./Schonberger, R. J. (Hg.): Modelling value. Pre-Proceedings - vol. II. Aachen: Shaker, S. 317–337.

Jene, S./Zelewski, S. (2011b): Fair distribution of profit in supply chains. In: Kersten, W./Blecker, T./Jahn, C. (Hg.): International supply chain management and collaboration practices. Lohmar et al.: Eul, S. 299–313.

Jene, S./Zelewski, S. (2011c): Distributive justice in supply chains – fair distribution of collectively earned profits in supply chains. In: Sucky, E./Asdecker, B./Dobhan, A./Haas, S./Wiese, J. (Hg.): Logistikmanagement – Herausforderungen, Chancen & Lösungen - vol. III. Bamberg, S. 115–132.

Jene, S./Zelewski, S. (2012): Fair distribution of added values in networks of autonomous actors. In: Jodlbauer, H./Olhager, J./Schonberger, R. J. (Hg.): Modelling value. Selected papers of the 1^{st} international conference on value change management. Berlin, S. 167–186.

Jene, S./Zelewski, S. (2013): Practical application of cooperative solution concepts for distribution problems: an analysis of selected game theoretic solution concepts from an economic point of view. In: Meunier, F./Carre, F. (Hg.): Game theory – economics, theoretical concepts and finance applications. New York: Nova Science Publishers, S. 25–49.

Junqueira, M./da Costa, L./Barroso, L./Oliviera, G./Thomé, L./Pereira, M. (2007): An Aumann-Shapley approach to allocate transmission service cost among network users in electricity markets. In: IEEE Transactions on Power Systems, 22 (4): 1532–1546.

Jürgens, K./Poppinga, O./Wohlgemuth, M. (2013): Was kostet die Erzeugung von Milch?! Berechnung der Milcherzeugungskosten in Deutschland in den Jahren 2002 bis 2012. Gleichen: o. A.

Kaluza, B. (1972): Spieltheoretische Modelle und ihre Anwendungsmöglichkeiten im Versicherungswesen. Berlin: Duncker & Humblot.

Kar, A. (2002): Axiomatization of the Shapley value on minimum cost spanning tree games. In: Games and Economic Behavior, 38 (2): 265–277.

Karagök, Y. (2006): Methoden zur Berechnung des Nukleolus kooperativer Spiele mit einer Anwendung für die Schweiz. Diss., Tübingen.

Kaneko, M. (1976): Note on transferable utility. In: International Journal of Game Theory, 5 (4): 183–185.

Kaneko, M./Wooders, M. H. (2004): Utility theories in cooperative games. In: Barberá, S./Hammond, P. J./Seidl, C. (Hg.): Handbook of utility theory - vol. II - Extensions. Boston u. a.: Kluwer, S. 1065–1098.

Kersting, W. (2000): Theorien der sozialen Gerechtigkeit. Stuttgart u. a.: Metzler.

Kimms, A./Çetiner, D. (2012): Approximate nucleolus-based revenue sharing in airline alliances. In: European Journal of Operational Research, 220 (2): 510–521.

Kluth, M. (2009): Kooperationsverträge und Gewinnverteilungsmodelle landwirtschaftlicher Betriebsgesellschaften - Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie. In: Berg, E./Hartmann, M./Heckelei, T./Holm-Müller, K./Schiefer, G. (Hg.): Risiken in der Agrar- und Ernährungswirtschaft und ihre Bewältigung. Münster, S. 529–531.

Knudsen, P. H./Østerdal, L. P. (2012): Merging and splitting in cooperative games: some (im)possibility results. In: International Journal of Game Theory, 41 (4): 763–774.

Kolmar, M. (2021): Grundlagen der Mikroökonomik. 2. Aufl., Wiesbaden: Springer Gabler.

Konstantin, P. (2017): Praxisbuch Energiewirtschaft: Energieumwandlung, -transport und -beschaffung, Übertragungsnetzausbau und Kernenergieausstieg. 4. Aufl., Berlin: Springer Vieweg.

Krelle, W. (1968): Präferenz- und Entscheidungstheorie. Tübingen: J. C. B. Mohr.

Kuhn, H. W./Tucker, A. W. (1958): John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics. In: Bulletin of the American Mathematical Society, 64 (3, Part 2): 100–122.

Lammsbräu (Hg.) (2019): Nachhaltigkeitsbericht 2018. Neumarkt i. d. Oberpfalz: o. A.

Legros, P. (1986): Allocating joint costs by means of the Nucleolus. In: International Journal of Game Theory, 15 (2): 109–119.

Lima, D. A./Contreras, J./Padilha-Feltrin, A. (2008): A cooperative game theory analysis for transmission loss allocation. In: Electric Power Systems Research, 78 (2): 264–275.

Littlechild, C./Owen, G. (1973): A simple expression for the Shapley value in a special case. In: Management Science, 20 (3): 370–372.

Littlechild, C./Thompson, G. F. (1977): Aircraft landing fees: a game theory approach. In: The Bell Journal of Economics, 8 (1): 186–204.

Loehman, E. T./Whinston, A. B. (1976): A generalized cost allocation scheme. In: Lin, S. A. Y. (Hg.): Theory and measurement of economic externalities. New York, u. a.: Academic Press, S. 87–101 und S. 103–106.

Lohman, E./Borm, P./Herings, P. J. J. (2012): Minimal exact balancedness. In: Mathematical Social Sciences, 64 (2): 127–135.

Lorenz, M. O. (1905): Methods of measuring the concentration of wealth. In: Publications of the American Statistical Association, 9 (70): 209–219.

Luce, R. D./Raiffa, H. (1957): Games and decisions – introduction and critical survey. New York: Dover Publication.

Mandl, J. (2005): Spieltheoretische Verfahren der Kapitalallokation im Versicherungsunternehmen. In: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 94 (1): 79–103.

Maschler, M. (1992): The bargaining set, Kernel and Nucleolus. In: Aumann, R. J./Hart, S. (Ed.): Handbook of game theory with economic applications - Vol. I. Reprint, Amsterdam u. a.: Elsevier, 2006, S. 591–667.

Maschler, M./Solan, E./Zamir, S. (2020): Game theory. 2. Aufl., Cambridge: University Press.

Massol, O./Tchung-Ming, S. (2010): Cooperation among liquefied natural gas suppliers: is rationalization the sole objective? In: Energy Economics, (32) 4: 933–948.

Mas-Colell, A./Whinston, M./Green, J. R. (1995): Microeconomic theory. Oxford: University Press.

Megiddo, N. (1974): On the nonmonotonicity of the bargaining set, the Kernel, and the Nucleolus of a game. In: SIAM Journal of Applied Mathematics, 27 (2): 355–358.

Meinhardt, H. I. (2018): The pre-kernel as a fair division rule for some cooperative game models. In: Mueller, D./Trost, R. (Hg.): Game theory in management accounting – implementing incentives and fairness. Berlin et al.: Springer, S. 235–266.

Meyer, F. (2009): Spieltheorie und ihre Anwendung in der BWL. In: Schwaiger, M./Meyer, A. (Hg.): Theorien und Methoden der Betriebswirtschaft. München: Vahlen, S. 207–224.

Moreno-Ternero, J. D. (2018): A Talmudic approach to bankruptcy problems. In: Mueller, D./Trost, R. (Hg.): Game theory in management accounting – implementing incentives and fairness. Berlin et al.: Springer, S. 267–285.

Moulin, H. (1992): An application of the Shapley-value to fair division with money. In: Econometrica, 60 (6): 1331–1349.

Moulin, H. (1995): Cooperative microeconomics - a game-theoretic introduction. Princeton: University Press.

Mueller, D. (2016): What's in it for me? - An analysis of environmental investments through a game theoretic lens. In: International Journal of Innovation and Sustainable Development, 10 (2): 198–218.

Mueller, D. (2017a): Fair allocation of cost reductions for a scale-based product family in a hierarchically structured firm. In: International Journal of Product Development, 22 (1): 1–20.

Mueller, D. (2017b): ... and justice for all – cost fairness in Volkswagen's product family. In: Journal of Applied Accounting Research, 18 (2): 261–271.

Mueller, D. (2017c): Grid extension in German backyards: a game-theory rationale. In: Journal of Environmental Planning and Management, 60 (3): 437–461.

Mueller, D. (2018a): The usability and suitability of allocation schemes for corporate cost accounting. In: Mueller, D./Trost, R. (Hg.): Game theory in management accounting: implementing incentives and fairness. Berlin et al.: Springer, S. 401–427.

Mueller, D. (2018b): A reply to Ponte et al. (2016) Supply chain collaboration: Some comments on the nucleolus of the beer game. In: Journal of Industrial Engineering and Management, 11 (3): 528–534.

Müller, D. (2015): Erweiterung des Instrumentariums des Kooperationscontrollings durch Lösungskonzepte der kooperativen Spieltheorie – eine Analyse. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 67 (4): 457–481.

Müller, D. (2016): Lösung von NIMBY-Problemen beim Ausbau des deutschen Stromnetzes. In: Zeitschrift für öffentliche und gemeinwirtschaftliche Unternehmen, 39 (3): 248–269.

Müller, D. (2017): Faire Kostenaufteilung von Kooperationen in der Forst- und Landwirtschaft. In: Müller, D. (Hg.): Controlling für kleine und mittlere Unternehmen. 2. Aufl., München: DeGruyter-Oldenbourg, S. 260–286.

Müller, D./Müller, M. (2017): Ermittlung fairer Transferpreise in internationalen Unternehmen. In: Funk, W./Rossmanith, J. (Hg.): Internationale Rechnungslegung und Internationales Controlling. Wiesbaden: Springer Gabler, 3. Aufl., S. 341–361.

Müller, D. (2020): Betriebswirtschaftslehre für Ingenieure. 3. Aufl., Berlin: Springer.

Neumann, J. M. von/Morgenstern, O. (1953): Theory of games and economic behavior. 3. Aufl., Princeton: University Press.

Nikoukar, J./Haghifam, M. R. (2012): Transmission cost allocation based on the use of system and considering the congestion cost. In: Electrical Power & Energy Systems, 43 (1): 961–968.

Nutzinger, H. G./Hecker, C. (2008): Gerechtigkeit in der Ökonomie - ein unlösbarer Widerspruch? In: Leviathan, 36 (4): 543–575.

O'Neill, B. (1982): A problem of rights arbitration from the Talmud. In: Mathematical Social Sciences, 4 (2): 345–371.

Peleg, B. (1965): An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets. In: Naval Research Logistics Quarterly, 12 (2): 155–162.

Peleg, B./Sudhölter, P. (2007): Introduction to the theory of cooperative games. 2. Aufl., Berlin, u. a.: Springer.

Peters, H. (2015): Game theory – A multi-leveled approach. 2. Aufl., Heidelberg u. a.: Springer.

Plaßmann, M. (1974): Die Kooperationsentscheidung des Unternehmers. Diss., Münster.

Potters, J./Sudhölter, P. (1999): Airport problems and consistent allocation rules. In: Mathematical Social Sciences, 38 (1): 83–102.

Reichardt, R. (1969): Kompromiß-Schemata in kollektiven Wertentscheidungen. In: Zeitschrift für Nationalökonomie, 29 (3/4): 267–290.

Rideout, D./Wagner, J. E. (1988): Testing cost-sharing techniques on a multiple-use timber sale. In: Forest Ecology and Management, 23 (4): 285–296.

Rosenmüller, J. (1971): Kooperative Spiele und Märkte. Berlin u. a.: Springer.

Rosenthal, E. C. (1990): Monotonicity of the core and value in dynamic cooperative games. In: International Journal of Game Theory, 19 (1): 45–57.

Rosenthal, E. C. (2013): Shortest path games. In: European Journal of Operational Research, 224 (1): 132–140.

Rößl, D. (1994): Gestaltung komplexer Austauschbeziehungen: Analyse zwischenbetrieblicher Kooperation. Wiesbaden: DUV.

Roth, A. E. (1977): The Shapley value as a von Neumann-Morgenstern utility. In: Econometrica, 45 (3): 657–664.

Roth, A. E. (Hg.) (1988): The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley. Cambridge: University Press.

Roth, A. E./Verrecchia, R. E. (1979): The Shapley value as applied to cost allocation: a reinterpretation. In: Journal of Accounting Research, 17 (1): 295–303.

Rothe, J./Baumeister, D./Lindner, C./Rothe, I. (2012): Einführung in Computational Social Choice: Individuelle Strategien und kollektive Entscheidungen beim Spielen, Wählen und Teilen. Heidelberg: Spektrum, Akademie Verlag.

Sääksjärvi, M. (1986): Cost allocation in cooperative wood procurement: A game theoretic approach. In: Kallio, M./Andersson, Å. E./Seppälä, R./Morgan, A. (Hg.): System analysis in forestry and forest industries. Amsterdam: North-Holland, S. 245–254.

Scherpereel, P. (2006): Risikokapitalallokation in dezentral organisierten Unternehmen. Wiesbaden: Gabler.

Schichtel, U. (1981): Aufteilung gemeinsamer Kosten. Diss., Augsburg.

Schmeidler, D. (1969): The nucleolus of a characteristic function game. In: Journal of Applied Mathematics, 17 (6): 1163–1170.

Serrano, R. (2013): Lloyd Shapley's matching and game theory. In: Scandinavian Journal of Economics, 115 (3): 599–618.

Shapley, L. S. (1953): A value for n-person games. In: Kuhn, H. W./Tucker, A. W. (Hg.): Contributions to the theory of games - vol. II. Princeton: University Press, S. 307–317.

Shapley, L. S. (1967): On balanced sets and cores. In: Naval Research Logistics Quarterly, 14 (4): 453–460.

Shapley, L. S. (1971): Cores of convex games. In: International Journal of Game Theory, 1 (1): 11–26.

Shubik, M. (1962): Incentives, decentralized control, the assignment of joint costs, and internal pricing. In: Management Science, 8 (3): 325–343.

Shubik, M. (1981): Game theory models and methods in political economy. In: Arrow, K. J./Intriligator, M. D. (Hg.): Handbook of mathematical economics - vol. I. Amsterdam, u. a.: North-Holland, S. 281–330.

Songhuai, D./Xinghua, Z./Lu, M./Hui, X. (2006): A novel nucleolus-based loss allocation method in bilateral electricity markets. In: IEEE Transactions on Power Systems, 21 (1): 28–33.

Sönmez, T. (1994): Populational-monotonicity of the Nucleolus on a class of public good problems. University of Rochester: o.A.

Spinetto, R. D. (1975): Fairness in cost allocation and cooperative games. In: Decision Sciences, 6 (3): 482–491.

Sprumont, Y. (1990): Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility. In: Games and Economic Behavior, 2 (4): 378–394.

Stamtsis, G. C./Erlich, I. (2004): Use of cooperative game theory in power system fixed-cost allocation. In: IEE proceedings, 151 (3): 401–406.

Suzuki, M./Nakayama, M. (1976): The cost assignment of the cooperative water resource development: a game theoretical approach. In: Management Science, 22 (10): 1081–1086.

Thomson, W. (1983a): The fair division of a fixed supply among a growing population. In: Mathematics of Operations Rsearch, 8 (3): 319–326.

Thomson, W. (1983b): Problems of fair division and the egalitarian solution. In: Journal of Economic Theory, 31 (2): 21l–226.

Thomson, W. (2003): Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. In: Mathematical Social Sciences, 45 (3): 249–297.

Thomson, W. (2012): Lorenz rankings of rules for the adjudication of conflicting claims. In: Journal of Economic Theory, 50 (3): 547–569.

Thomson, W. (2015): Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update. In: Mathematical Social Sciences, 74 (March): 41–59.

Tijs, S. H. (1981): Bounds for the core of a game and the τ-value. In: Moeschlin, O./Pallaschke, D. (Hg.): Game theory and mathematical economics. Amsterdam: North-Holland, S. 123–132.

Tijs, S. H. (1986): An axiomatization of the [tau]-value. Nijmegen.

Tijs, S. H./Driessen, T. (1986): Game theory and cost allocation problems. In: Management Science, 32 (8): 1015–1028.

Tijs, S. H./Moretti, S./Brânzei, R./Norde, H. (2006): The Bird core for minimum cost spanning tree problems revisited: monotonicity and additivity aspects. In: Seeger, A. (Hg.): Recent advances in optimization. Berlin, Springer, S. 305–322.

Tittmann, P. (2014): Einführung in die Kombinatorik. 2. Aufl., Berlin, u. .a.: Springer.

Trudeau, C. (2014): Minimum cost spanning tree problems with indifferent agents. In: Games and Economic Behavior, 84 (3): 137–151.

Tsukamoto, Y./Iyoda, I. (1996): Allocation of fixed transmission cost to wheeling transactions by cooperative game theory. In: IEEE Transactions on Power Systems, 11 (2): 620–629.

Varian, H. R. (1992): Microeconomic analysis. 3. Aufl., New York u. a.: Norton & Company.

Wied-Nebbeling, S./Schott, H. (2005): Einführung in die Mikroökonomik. 3. Aufl., Berlin u. a.: Springer.

Wiese, H. (2005): Kooperative Spieltheorie. München, u. a.: Oldenbourg.

Wiese, H. (2014): Mikroökonomik – Eine Einführung. 6. Aufl., Berlin u. a.: Springer Gabler.

Wild, J. (1967): Spieltheorie und Organisation. In: Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 19 (11): 704–723.

Wild, J. (1969): Unternehmerische Entscheidungen, Prognosen und Wahrscheinlichkeit. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 33 (Ergänzungsheft 2): 60–89.

Winand, U. (1977): Spieltheoretische Beiträge zur Konfliktthandhabung. In: Die Betriebswirtschaft, 37 (3): 485–492.

Winand, U. (1978): Spieltheorie und Unternehmungsplanung: Anwendungsbedingungen und konzeptionelle Erweiterungen spieltheoretischer Modelle und Lösungskonzepte für betriebswirtschaftliche Planungsprozesse. Berlin: Duncker & Humblot.

Winter, E. (2002): The Shapley value. In: Aumann, R. J./Hart, S. (Hg.): Handbook of game theory with economic applications - Vol. III. Reprint, 2007, Amsterdam u. a.: Elsevier, S. 2025–2054.

Wißler, W. (1997): Unternehmenssteuerung durch Gemeinkostenzuteilung: Eine spieltheoretische Untersuchung. Wiesbaden: DUV.

Young, H. P. (1985): Monotonic solutions of cooperative games. In: International Journal of Game Theory, 14 (2): 65–72.

Young, H. P. (1994a): Equity: in theory and practice. Princeton: University Press.

Young, H. P. (1994b): Cost allocation. In: Aumann, R. J./Hart, S. (Hg.): Handbook of game theory with economic applications - vol. II. Reprint, Amsterdam u. a.: Elsevier, 2007, S. 1193–1235.

Zelewski, S. (1988): Ein spieltheoretischer Ansatz zur „fairen“, kostenorientierten Preisbildung bei Energieversorgungsunternehmen. In: Zeitschrift für öffentliche und gemeinwirtschaftliche Unternehmen, 11 (2): 155–169.

Zelewski, S. (2009): Faire Verteilung von Effizienzgewinnen in Supply Webs – ein spieltheoretischer Ansatz auf Basis des τ-Wertes. Berlin: Logos.

Zelewski, S. (2018): Fair distribution of cooperation gains in supply chains – a justification program from an economic point of view. In: Mueller, D./Trost, R. (Hg.): Game theory in management accounting – implementing incentives and fairness. Berlin et al.: Springer, S. 211–234.

Zelewski, S./Heeb, T. (2018): Characteristics of the τ-value and the χ-value. In: Mueller, D./Trost, R. (Hg.): Game theory in management accounting – implementing incentives and fairness. Berlin et al.: Springer, S. 379–400.

Zelewski, S./Jene, S. (2011): Fairness: a challenge for the distribution of cooperation gains in value chains. In: International Journal of Managing Value and Supply Chains, 2 (1): 1–20.

Zelewski, S./Peters, M. L. (2010): Fair distribution of efficiency gains in supply networks from a cooperative game theory point of view. In: International Journal of Information Systems and Supply Chain Management, 3 (2): 1–24.

Technische Dokumentation

Meinhardt, H. I. (2016): TuGamesView3dV6: A basic introduction general remarks. Verfügbar unter: http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/5709/

Sachverzeichnis

Abbildung
  ordnungserhaltend, 16
  ordnungstreu, 16, 17, 55, 145, 164, 196, 204
Abstimmungs-
  regeln, 393–425
  stärke, 420
Additivität, 353, 363, 484, 488, 489, 510, 517, 526, 528
Additivitäts-Axiom, 484
advocatus diaboli, 435
Aggregationsmechanismus, 392
Aggregatsmonotonie, 486, 504, 511, 526, 528
Aggregatsmonotonie-Axiom, 486
AHP, siehe Analytischer Hierarchieprozess
airport game, 542
Allais-Paradox, 13, 315–320
Allgemeines-Zeilen-Hinzufügungs-Axiom, 167
Allgemeingültigkeits-Axiom, 395
Alternative
  ineffiziente, 50, 100, 162, 190, 232
  irrelevante, 82, 167, 177, 402, 405, 414, 415
Alternativen-
  darstellung, 43, 103, 123, 126, 143, 316
  menge, 100, 162, 163
Altruismus, 361
Analytischer Hierarchieprozess, 51, 54, 73, 84–94
Anforderungen
  an ein Zielsystem, 46
  an eine gerechte Abstimmungsregel, 395
  an eine gerechte Aufteilung, 548
  an eine Imputation, 482
  an einen gerechten Aggregationsmechanismus, 394–399
  an einen leistungsgerechten Aufteilungsmechanismus, 478–490
  an einen rationalen Akteur, 7, 288, 393, 466
Angepasste Proportionalitätsregel, 550, 563
Anker-Heuristik, 329
Anonymität, 482, 484, 503, 506, 510, 517, 526, 528
Anonymitäts-Axiom, 484
Anspruchsniveaufestlegung, 47
APR, siehe Angepasste Proportionalitätsregel
Äquivalenz-Axiom, 38
Archimedisches Axiom, 31, 115
Arrow-
  Paradox, 301, 417
  Theorem, 301, 417
Arten-Präferenz, 9, 46–97
Aufteilung, 548
Aufteilungsgerechtigkeit, 478, 546, 548, 554, 558, 566
Ausschüttungspräferenz, 11
Auszahlungsmatrix, 162
Außenseiterkoalition, 513
Axiom
  Additivitäts-, 484
  Aggregatsmonotonie-, 486
  Allgemeine Zeilen-Hinzufügungs-, 167
  Allgemeingültigkeits-, 395
  Anonymitäts-, 484
  Äquivalenz-, 38
  Archimedisches, 31, 115
  Betweenness-, 133, 317
  Condorcet-, 395

© Der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2022

D. Müller, *Investitionscontrolling: Entscheidungsfindung bei Investitionen II*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36597-4

Differenzunabhängigkeits-, 65
Dominanz-, 35, 121, 147, 167, 320
Eindeutigkeits-, 481
einfache Unabhängigkeits-, 60
Homothetie-, 133, 317
Individuelle-Rationalitäts-, 482
Kernselektions-, 496
Koalitionsmonotonie-, 487
Konsistenz-, 39
Konvexitäts-, 36, 166, 174
Lösbarkeits-, 39, 58, 194
Majoritäts-, 395
Monotonie-, 35, 121, 147, 153, 320, 395, 485
Nicht-Diktatur-, 395
Nutzen-Kardinalitäts-, 166
Pareto-, 395, 482
Populationsmonotonie-, 489
Reduktions-, 113, 122
Reflexivitäts-, 28, 56, 114, 165
Relevanz-, 38
Schwaches-Konvexitäts-, 166, 174
Spalten-Duplikations-, 168
Spalten-Linearitäts-, 168
Spezielle-Zeilen-Hinzufügungs-, 168
Stationaritäts-, 198–204, 206, 238
Stetigkeits-, 32, 33, 56, 115, 119, 165, 193, 288, 308, 368
Strenge-Konvexitäts-, 35
Strenge-Monotonie-, 488
Substitutions-, 116, 125, 126, 145, 153, 233
Summendominanz-, 190
Symmetrie-, 113, 167
Teilnahme-, 395
Transitivitäts-, 28, 56, 114, 165, 193, 288, 368
Unabhängigkeits-, 63, 116, 117, 121–135, 145, 147, 153, 167, 224, 233, 238, 315–320
Unwesentlicher-Spieler-, 483
Vermögensunabhängigkeits-, 472
Vollständigkeits-, 28, 56
wechselseitige Unabhängigkeits-, 61, 63, 70, 79, 83, 84, 93, 97, 195, 201, 204
Zeitdominanz-, 190, 211
Axiome
Kolmogorov-, 101, 230
rationaler eindimensionaler Entscheidungen, 56, 63, 66
Axiomensystem
der leistungsgerechten Aufteilung, 485
des homo oeconomicus, 7, 288
bei Entscheidungen unter Risiko, 117
bei intertemporalen Entscheidungen, 204
bei multikriteriellen Entscheidungen, 63, 66
für eine kardinal messende Nutzenfunktion, 40
für eine ordinale Nutzenfunktion, 35
eines gerechten Aggregationsmechanismus, 394–399
für ein additives Präferenzfunktional
bei intertemporalen Entscheidungen, 192–213
bei mehrfacher Zielsetzung, 55–66
bei Risiko, 109–118
für Entscheidungen bei Ungewissheit, 164–168
für stetige Nutzenfunktionen, 28–35
kooperativer Spiele, 466, 566
leistungsgerechter Aufteilung, 478–490
von Arrow, 395
von Debreu
zum ordinalen Nutzen, 28–35
zum additiven Nutzen, 56–63
von Dyckhoff, 206
von Fishburn/Edwards, 192–205
von Fishburn/Rubinstein, 187
von French, 56–63
von Herstein/Milnor, 110–120
von Jensen, 110–120
von Koopmans, 187
von Krantz et al., 56–63
von Lancaster, 187
von Luce/Raiffa, 120
von Marschak, 120
von Milnor, 164–168
von Shapley, 503
von von Neumann/Morgenstern, 120

Balanciertheit, 494, 495, 540, 545, 570, 583
Bandbreitennormierung, 34, 138
bankruptcy games, 546
Barwert, 209
Basisraten-Fehler, 329
Bayes-Regel, 104, 233
Bedarfsgerechtigkeit, 478, 558
Bedingte
Ertrags-Gleichverteilung, 553, 556, 558, 559, 564
Verlust-Gleichverteilung, 554, 556
BEG, siehe Bedingte Ertrags-Gleichverteilung
Beitragsmonotonie, 487
Bernoulli-

Befragung, 138
Prinzip, 109–160, 304–327
Besitztums-Effekt, 289
Betweenness-Axiom, 133, 317
Bondareva-Shapley-Theorem
in schwacher Form, 495
in starker Form, 498
Borda-Regel, 404
Bucklin-Regel, 403
BVG, siehe Bedingte Verlust-Gleichverteilung

charakteristische Funktion, siehe Koalitionsfunktion
χ-value, 519
Common-
Consequence-Effekt, 315–318
Difference-Effekt, 320, 334
Ratio-Effekt, 318–320, 335
Condorcet-
Alternative, 409
Axiom, 395
Paradox, 301, 410, 412
Verfahren, 408
Conjoint
Analyse, 54
Measurement, 56
constrained
equal-awards rule, 553
equal-losses rule, 554

Dekomposition, 223
Delay-Speedup Asymmetrie, 335
Determinanten einer Entscheidung
Primärdeterminanten, 3
Sekundärdeterminanten, 289
Differenzskala, 24
Differenzunabhängigkeit, 64, 65
schwache, 64
Diktatorverbot, 395, 417–420
Dilemma, 301–327
der Lenkpreistheorie, 303
Gefangenen-, 303, 321, 465
Newcomb-, 320–327
Direct-Ratio-Verfahren, 75
Diskontierungs-
Anomalien, 333–336, 349–369
faktor, 204, 208, 211, 215, 349, 354, 356, 363, 366, 367
funktion, 349–369
modell
exponentielles, 204, 214, 350–354
hyperbolisches, 355–360
quasi-hyperbolisches, 360–362
subadditives, 363–367
Diskontrate, 204, 208, 215, 349–369
Divisionskalkulation, 546
Dominanz
absolute, 50, 99, 100, 159, 162
bei Mehrfachzielsetzung, 50
einer Zuteilung, 491
intertemporale Zustands-, 232
Kapitalwert-, 213
Lorenz-, 521, 527, 554, 558
schwache, 491
stochastische 1. Ordnung, 122, 148–153, 158–160
für diskrete Verteilungen, 149–152, 190
stochastische 2. Ordnung, 153–160
für diskrete Verteilungen, 153, 155–158
Zeit-, 190, 232
zeitliche Summen-, 190
Zustands-, 100, 107, 146, 159, 162, 163, 165, 232
Dominanz-
arten, 100, 146–160, 162, 190, 232
Axiom, 35, 121, 147, 165, 320
matrix, 74
Dummy-Spieler-Eigenschaft, 482, 483, 488, 503, 510, 517, 526
Durchschnitts-prinzip, 463
Dutta-Ray-Lösung, 519–527, 559

Effekt
Anker-, 329
Besitztums-, 289
Common-Consequence-, 315–318
Common-Difference-, 320, 334
Common-Ratio-, 318–320, 335
der Selbst-Überschätzung, 330
Größen-, 334
Immediacy-, 334, 335, 355
Magnituden-, 334
Mañana-, 200, 355
Präferenzumkehr-, 143, 334
Sicherheits-, 317, 335
Sunk-cost-, 289, 331
Unmittelbarkeits-, 334, 335, 355
Effizienz, 548
Eigen-
vektor, 91
wert, 87
Eigentümerpräferenz, 11, 184
Eindeutigkeit, 481, 528
Eindeutigkeits-Axiom, 481
Einstellungen, 291

Eintrittswahrscheinlichkeit, 101, 230, 332
Einzelwertlösung, 481
Ellsberg-Paradox, 304
Endlichkeitsbedingung, 75
Entscheidung
  bei Risiko, 5, 98–160, 230–239
  bei Ungewissheit, 5, 160–180
  bei Unsicherheit, 5
  intertemporale
    bei Risiko, 230–239
    bei Sicherheit, 181–216, 221–229
  mehrstufige, 221–239
Entscheidungs-
  baumverfahren
    bei Sicherheit, 225–229
    bei Unsicherheit, 230–239
  gremium, 26
  matrix, 6, 49, 161, 162, 189, 199, 231
  prinzip, 169
  regel, 17, 169
  theorie
    deskriptive, 287–385, 425–435
    präskriptive, 3–285, 387–425, 461–615
Equal-Treatment-Property, siehe Anonymität
Ergebnis-
  matrix, 6, 48, 49, 99, 188, 230
  verteilung, 481
Ergänzungsspiel, 484
Erwartungsnutzentheorie, 63, 109–160, 304–327
Erwartungswert-
  Regel, 104, 233
  Semistandardabweichungs-Regel, 107
  Standardabweichungs-Prinzip, 105
Escalation of commitment, 331
euklidische Distanz, 522, 524
Existenz
  einer kardinal messenden Nutzenfunktion, 66
  einer kardinalen Nutzenfunktion, 63, 117, 204
  einer Lösung, 481, 503, 506, 510, 516, 525, 528
  einer ordinalen Nutzenfunktion, 34
  einer quasi-linearen Nutzenfunktion, 472
  eines kardinalen Präferenzfunktionals, 117
  eines nicht-leeren Kerns, 495, 534
Exponentielles Diskontieren, 204, 214, 350–354
Externalitätenspiel, 505
Extremierung, 95

Fähigkeiten, 295
Fanning-out, 133, 317
Femininität, 293
Fertigkeiten, 295
Fixkosten, 464
Flexibilität, 464
Flughafenspiel, 542
Formal-
  problem, 301, 302, 326
  theorie, 568
  wissenschaft, 240
FOSD-Monotonie, siehe Monotonie bezüglich stochastischer Dominanz erster Ordnung
FSD, siehe Stochastische Dominanz 1. Ordnung
Fujishige-Dutta-Ray-Lösung, siehe Dutta-Ray-Lösung
Funktion
  Koalitions-, 467, 474, 476, 479, 481, 494, 523, 529–532, 537, 540, 545, 559, 560, 563, 567, 569, 575, 576, 600
  Nutzen-, 16, 17, 22, 23, 31–35, 37, 40, 44, 52, 55, 64, 65, 68, 70, 110, 114, 115, 117, 119, 136, 137, 141, 142, 144, 145, 148, 154, 157–159, 161, 162, 190, 192, 203, 204, 207, 217, 219, 247, 305–310, 315, 468–473

Gefangenen-Dilemma, 303, 321, 465
Gegenwarts-
  konsum, 183
  präferenz, 184
Geldpumpe, 42, 143, 202, 225
Gemeinkosten, 499, 542
Gerechtigkeit
  Aufteilungs-, 478, 546, 548, 554, 558, 566
  Bedarfs-, 478, 558
  Leistungs-, 478, 548
  Verursachungs-, 463, 532
Gesetz
  der großen Zahl, 312
  der kleinen Zahl, 329
Gewichtungsfaktor, 70, 76, 83, 94, 210
Gewinn-
  aufteilung, 481
  matrix, 162
  Verlust-Asymmetrie, 334
Gewinnerkoalition, 421
Gleichheitsprinzip, 478, 519, 527, 553, 558
Goal-Programming, 51, 95–96
Gorman-Form, 470

Gremienentscheidung, 390, 435
Grenz-
  beitrag, 513
  nutzen, 31
  rate der intertemporalen Substitution, 181–186, 208–214, 352
  rate der Substitution, 31, 36, 57, 61, 71
    abnehmende, 36
Groupthink, 434
Größen-Effekt, 334
Gruppen
  formelle, 387
  informelle, 387
Gruppen-
  befangenheit, 388, 435
  bildung, 426
  entscheidung, 388, 390
  kohäsion, 427
  mitglied, 426
  normen, 428
  typen, 432
  verhalten, 425

Hare-Regel, 408
Heuristik
  Anker-, 329
  Begriff, 328
  Repräsentativitäts-, 329
  Take-the-Best-, 336, 346
  Verfügbarkeits-, 328
  Wiedererkennungs-, 346
Hindsight bias, 330
Hodges-Lehmann-Prinzip, 108
Höhen-Präferenz, 9, 25–45, 49, 78, 99, 110, 189, 197, 220, 225, 231
Höhenpräferenz, 189, 231
homo oeconomicus, 7, 26, 204, 213, 214, 287, 299, 350, 393, 466, 566
Homothetie-Axiom, 133, 317
homothetische Präferenzordnung, 133, 472
Hurwicz-Prinzip, 173, 178
Hyperbolisches Diskontieren, 355–360

Immediacy-Effekt, 334, 335, 355
Imputation, 482, 491, 508, 514, 548
Indifferenzkurve, 31, 36, 62
indirekte Nutzenfunktion, 469
Individualismus, 293
individuelle
  Präferenzordnung, 10, 391, 392, 395, 398, 401, 403, 406, 407, 418
  Rationalität, 482, 492, 510, 517, 525, 528
Informationsverlust, 427
Inkrementalismus, 300
Intervallskala, 19, 20, 77

Kapitalwert, 2, 16, 70, 185, 186, 213, 227, 228
Kapitalwertdominanz, 213
kardinal messende Nutzenfunktion, 22, 65
kardinal messendes Präferenzfunktional, 66
kardinale Nutzenfunktion, 22, 118
kardinales Präferenzfunktional, 63, 204
Kardinalitätsinterpretationen, 23
Kardinalskala, 25, 392
Kern, 491–499
Kern-
  gruppe, 431
  Lösung, 496, 510, 525
  selektion, 496, 503, 504, 510, 512, 517, 528
Kernselektions-Axiom, 496
Koalitions-
  bildung, 421
  familie, 493–495
  funktion, 467, 539, 545, 560, 566, 600
  monotonie, 487, 496, 504, 511, 518, 526, 528
  überschuss, 506
Koalitionsmonotonie-Axiom, 487
kollektive
  Handlungsmuster, 433
  Präferenzordnung, 392
  Rationalität, 482, 492
Kollektiventscheidung, siehe Gremienentscheidung
Kollektivismus, 293
Kolmogorov-Axiome, 101, 230
Kommunikationsstörung, 427
Konflikt-Modell, 432
Konjunktions-Fehler, 329
Konkavität, 531
Konsistenz-
  Axiom, 39, 395
  bedingung, 72, 75, 94
  index, 88
  relation, 89
Konsum
  Gegenwarts-, 183
  Zukunfts-, 183
Konsumpräferenz, 11, 184
Kontroll-Illusion, 332
Konvexität
  der Lösungsmenge, 166, 174
  der Mischungsmenge, 113

der Präferenzen, 36
der Risikonutzenfunktion, 137
der Wertfunktion, 339
eines Spiels, 475
Konvexitäts-Axiom, 35, 36, 166, 174
Kooperation, 461
unternehmensexterne, 567
unternehmensinterne, 567
zur Kostenreduktion, 531, 536
Körth-Regel, 52
Kosten
Fix-, 464
Gemein-, 499, 542
Minimal-, 536–542
Kosten-
funktion, 531
spiel, 531
wachstumsgesetze, 546
Kriterium
Anspruchsniveau-, 47
Ausschluss-, 47
kompensierbares, 47
Kuppel-
kalkulation, 466
produktion, 461, 463

Laplace-Regel, 174, 178
Later-no-harm-Kriterium, 395
Leistungs-
gerechtigkeit, 478, 548
prinzip, 479, 527, 566
lexikografische
Ordnung, 51–52, 508–510
Präferenzordnung, 43–44, 115, 143–144, 165, 216
lineare Nutzenfunktion, 566
lineares Präferenzfunktional, 126
Linearität, 116, 117, 126–135
Lorenz-
Dominanz, 521, 527, 554, 558
Kurve, 519, 558
Lösung, 522–524, 527
maximierend, 555
menge, 522
minimierend, 555
Lösbarkeits-Axiom, 39, 58, 79, 80, 194
Lösung
Dutta-Ray-, 519–527, 559
Fujishige-Dutta-Ray, 519
Kern-, 496, 510, 525
Lorenz-, 522–524, 527
Shapley-, 500–506, 527, 528, 559
Lösungs-
garantie, 327
konzept, 481–484, 486, 487, 496
menge, 3, 46, 166, 168, 493, 499
Lösungsideen
zum St.-Petersburg-Paradox, 305–314
Lotterie, 111–146
degenerierte, 127
reduzierte, 122, 124
zusammengesetzte, 111, 122–125

Macht-
distanz, 292
index, 420
Magnituden-Effekt, 334
Majoritäts-Axiom, 395
Mañana-Effekt, 200, 355
Marginal-
anteil, 563
beitrag, 488, 500, 563
Marginalitätseigenschaft, 487
Maskulinität, 293
Matrix
Auszahlungs-, 162
der Maxima der schwächsten Glieder, 414
der Opportunitätskosten, 176
der Paarvergleiche, 74, 411
des Bedauerns, 176
Dominanz-, 74
Entscheidungs-, 6, 49, 161, 189, 231
Ergebnis-, 6, 48, 49, 99, 188, 230
Gewinn-, 162
Nutzen-, 6, 49, 161, 189, 231
Paarvergleichs-, 74
Spiel-, 162
MAUT, siehe multiattributive Nutzentheorie
Maximax-Regel, 171, 178
Maximierung des minimalen Zielerreichungsgrades, 52
Maximin-
Prinzip, 170
Regel, 178
Maximin-Regel, 169
Mehrheitswahlregeln, 399
Menge
aller Verbindungen, 538
aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen, 112, 142
Alternativen-, 14, 26, 39, 45, 47, 50, 58, 98, 100, 162, 163, 166, 168, 205, 212, 221, 223, 231
der balancierten Spiele, 495
der Entscheidungsstufen, 221
der Flugzeugbewegungen , 542

der Imputationen, 483, 508
der Imputationen superadditiver Spiele, 483
der Imputationen wesentlicher Spiele, 483
der Lotterien, 112, 114, 142
der nach i eintretenden Spieler, 562
der nicht-dominierten Imputationen, 491
der quasi-balancierten Spiele, 528
der Spieler, 467
Ergebnis-, 14, 26, 34, 41, 56, 111, 114, 115, 117, 122, 188, 197, 231
Indifferenz-, 29, 33
Lösungs-, 3, 46, 166, 168, 493, 499
Mischungs-, 113, 115, 117, 119, 127, 142
Nicht-besser-als-, 33, 119
Nicht-schlechter-als-, 33, 119
obere Kontur-, 33, 119
Teilmenge von Zielen, 48, 61, 62
untere Kontur-, 33, 119
von Zielen, 50
Zeitpunkt-, 188, 196, 221, 231, 232
Zustands-, 98, 100, 162, 163, 232
Minimalkostenspannbaum, 536–542
Minimax-
Regel, 169, 178
Regret-Regel, 176, 178
Theorem, 170
Mischungs-
menge, 113, 115, 117, 119, 127, 142
operation, 111, 112, 142
MKSS, siehe Minimalkostenspannbaum
Modell
der organisierten Anarchie, 432
Diskontierungs-
exponentielles, 214, 350
minimaler Kostenspannbäume, 541
von Brunswik, 296
Monotonie
Aggregats-, 486, 504, 511, 526, 528
Beitrags-, 487
bezüglich stochastischer Dominanz, 146
bezüglich stochastischer Dominanz erster Ordnung, 122, 152
der Nutzenfunktion, 135
der Risikonutzenfunktion, 154
eines Aggregationsmechanismus, 395
eines Lösungskonzeptes, 485–489
eines Spiels, 474, 592
Koalitions-, 487, 496, 504, 511, 518, 526, 528
Populations-, 489, 504, 512, 518, 526, 528, 545
strenge, 488, 506, 528
von Präferenzen, 35, 121, 147, 320
Monotonie-
Axiom, 320, 395
Monotonie-Axiom
bezüglich stochastischer Dominanz, 153
für eine gerechte Aufteilung, 485–489
für kardinale Nutzenfunktionen, 121, 147
für ordinale Nutzenfunktionen, 35
Motivationsverlust, 434
multiattributive Nutzentheorie, 51, 54, 77–81
μ-Regel, 104, 233
μ-ρ-Prinzip, 107
μ-σ-Prinzip, 105
Mülleimer-Modell, 433

Nachrichtendimensionen, 427
Nanson-Regel, 406
Newcomb-Dilemma, 320–327
Nicht-Diktatur-Axiom, 395
No-show-Paradox, 301, 397
Nominalskala, 19
Nucleolus, 506–512, 527, 528, 559
Nudging, 290, 354
Nutzen-
funktion, 16, 162, 225, 231, 305–310, 315, 468–473
Erwartungsnutzen, 119
homothetische, 472
in Gorman-Form, 470
indirekte, 469, 470
kardinal messende, 22, 65, 118
kardinale, 22, 118
konkave, 136, 137
konvexe, 136, 137
lineare, 70, 566
monotone, 135
nicht-abnehmende, 148
ordinale, 16, 20, 34, 35
quasi-lineare, 472
stetige, 34, 35, 63, 66, 204
von-Neumann-Morgenstern, 119, 506
funktional, 119
Kardinalitäts-Axiom, 166
matrix, 6, 49, 161, 189, 231
Nutzwertanalyse, 51, 54, 82–84
NWA, siehe Nutzwertanalyse

Obervektor, 513, 564
Optimalitätsprinzip, 223
ordinale Nutzenfunktion, 16, 20
Ordinalskala, 19, 20, 77, 392

Ordnung
lexikografische, 51–52, 508–510
lexikografische Präferenz-, 43–44, 143–144, 165
schwache Präferenz-, 29, 114, 165, 211
Overconfidence, 330

Paarvergleichsmatrix, 74, 87, 411
Paradox, 301–327
Allais-, 315–320
Arrow-, 301, 417
Condorcet-, 301, 410
Ellsberg, 304
Newcomb-, siehe Newcomb-Dilemma
No-show-, 301, 397
Rabin, 304
St.-Petersburg-, 110, 144, 301, 304–314
Steuer-, 301
Super-St.-Petersburg-, 307
Transitivitäts-, 41, 301
Pareto-
Axiom, 395, 482
Optimalität, 395, 417, 419, 482, 492, 548
Persistenz, 200
Persönlichkeit, 296
Planung
inkrementelle, 300
synoptische, 300
Politik-Modell, 431
Populationsmonotonie, 489, 504, 512, 518, 526, 528, 545
Populationsmonotonie-Axiom, 489
PR, siehe Proportionalitätsregel
Präferenz
Arten-, 9, 46–97
Ausschüttungs-, 11
Eigentümer-, 11, 184
einfache, 9
einmalige, 9, 14
erster Ordnung, 9
Gegenwarts-, 184, 186
Höhen-, 9, 25–45, 49, 78, 99, 110, 189, 197, 220, 225, 231
höherer Ordnung, 9
individuelle, 9
Kollektiv-, 9, 387–425
Konsum-, 11, 184
multidimensionale, 9
Risiko-, 10, 98–160, 230–239
separierbare, 13, 59–65, 194–204, 233, 234, 238, 317, 320
sequenzielle, 9, 14
Sicherheits-, 184
Thesaurierungs-, 11
Unsicherheits-, 9, 160–180
Zeit-, 9, 42, 181–216, 225, 231
im engeren Sinn, 184
im weiteren Sinn, 184
Zukunfts-, 184, 186
Präferenz-
funktion, 16
funktional, 16, 26, 55, 63, 64, 66, 78, 82, 90, 95, 104, 106, 108, 162, 171, 172, 174, 176, 196, 204, 225, 231
ad hoc, 18, 169
additives, 63, 66, 204
kardinal messendes, 66
kardinales, 63, 204
lineares, 70, 120, 126, 211, 212
ordnungstreues, 16, 114, 145, 196, 204
konflikt, 334
ordnung, 29, 56
homothetische, 133, 472
individuelle, 10, 391
kollektive, 392
lexikografische, 43, 115, 144, 165, 216
ordinale, 392
schwache, 56, 79
stetige, 56, 79
transitive, 165
vermögensunabhängige, 471
relation, 15, 56
struktur, 56, 57, 66, 95
system, 9
umkehr, 143, 334
unabhängigkeit
einfache, 60, 61, 82
wechselseitige, 61, 63, 70, 79, 83, 195
wahlregeln, 403–415
Prinzip
Bedarfs-, 479
Durchschnitts-, 463
Gleichheits-, 478, 519, 527, 553, 558
Hodges-Lehmann-, 108
Hurwicz-, 173
Leistungs-, 479, 527, 566
Maximin-, 170
μ-ρ-, 107
μ-σ-, 105
Proportionalitäts-, 463
Suum-cuique-, 479, 548, 554
von Bellman, 223
Problem
Formal-, 301, 326
Real-, 301, 326
Problem-
darstellung, 43, 123, 126, 143, 316

lösung, 7, 288, 390, 433
wahrnehmung, 296
Prokrastination, 200, 355
Proportionalitätsregel, 549
Prozesskostenrechnung, 499

Qualifikationen, 295
Quasi-Balanciertheit, 514
Quasi-hyperbolisches Diskontieren, 360–362
quasi-lineare Nutzenfunktion, 472
Quorum
Ablehnungs-, 394
Beteiligungs-, 394
Zustimmungs-, 394

Rabin-Paradox, 304
ran-to-the-bank-rule, 551
random arrival rule, 551
Rationalität
begrenzte, 299
individuelle, 482, 492, 510, 517, 525, 528
kollektive, 482, 492, 548, 579
kollektiver Entscheidungen, 420
objektive, 416
Umwelt-, 344
Rationierungs-
problem, 546–559
spiel, 559–566
Realproblem, 301, 326, 559, 566
Reduktions-Axiom, 113, 122
Reflexivitäts-Axiom, 28, 56, 114, 165
Regel
Angepasste Proportionalitäts-, 550, 563
Bayes-, 104, 233
Borda-, 404
Bucklin-, 403
der absoluten Mehrheit, 400
der einfachen Mehrheit, 400
der Einstimmigkeit, 399
der Mehrheit der Paarvergleiche, 408
der qualifizierten Mehrheit, 400
der relativen Mehrheit, 400
der sukzessiven Paarvergleiche, 409
des geringsten Bedauerns, 176, 178
des unzureichenden Grundes, 174, 178
Ertrags-Gleichverteilungs-, 553, 558, 559
Hare-, 408
Körth-, 52
Laplace-, 174, 178
Maximax-, 171, 178
Maximin-, 169, 178
Minimax-, 169
Minimax-Regret-, 176, 178
Nanson-, 406
Proportionalitäts-, 549
Savage-Niehans-, 176, 178
Schulze-, 410
Talmud-, 555, 565
Verlust-Gleichverteilungs-, 554
Wald-, 169, 178
Zufallsbeitritts-, 551, 560
Relevanz-Axiom, 38
Reziprozitätsbedingung, 72, 75
Risiko
formelles, 5
materielles, 5
Risiko-
abschlag, 136
aversion, 106, 135, 136, 294, 342
begriff
formaler, 98, 230
materieller, 98, 230
freude, 106, 135, 136, 342
neutralität, 106, 135, 136
nutzenfunktion, 110, 117, 135–141
konkave, 136, 137, 154
konvexe, 136
profil, 152
präferenz, 10, 98–160, 230–239
präferenzfaktor, 106
prämie, 136
reduktion, 464
schub, 434
zuschlag, 136
Risky-Shift-Phänomen, 434
Roll-back-Verfahren, 116, 223, 224, 233, 238
Rollen-
konflikte, 430
struktur, 429
verständnis, 431
Rückschaufehler, 330

Satellitengruppen, 432
Satisfizierung, 95
Savage-Niehans-Regel, 176, 178
Schlichter, 506
Schulze-Regel, 411
Schwaches-Konvexitäts-Axiom, 166, 174
Scoring-Modell, siehe Nutzwertanalyse
Seitenzahlungen, 466, 566
Selbst-
Bindung, 354
Steuerung, 354
Überschätzungs-Effekt, 330

Separationstheorem, 186, 213
Shapley-
  Lösung, 500–506, 527, 528, 559
  Shubik-Index, 421
  Wert, 500, 503–505, 511, 534
Sicherheits-
  Effekt, 317, 335
  präferenz, 184
  äquivalent, 136
Skala
  Differenz-, 24
  Intervall-, 20, 77
  Kardinal-, 25
  Kartdinal-, 392
  Nominal-, 19
  Ordinal-, 20, 77, 392
  Verhältnis-, 24, 77
Skalenniveaus, 19
Skalierungskonstante, 67–80
social loafing, 434
Sozialstruktur, 429
Spalten-Duplikations-Axiom, 168
Spalten-Linearitäts-Axiom, 168
Spezielle-Zeilen-Hinzufügungs-Axiom, 168
Spiel
  balanciertes, 494, 540, 545, 580
  Flughafen-, 542
  gegen die Natur, 98–180, 231, 322
  konkaves, 531, 545
  konvexes, 475, 517, 518, 525, 545, 559
  minimal balanciertes, 498, 541, 585
  mit nicht transferierbarem Nutzen, 568
  mit transferierbarem Nutzen, 467
  monotones, 474
  quasi-balanciertes, 514
  Rationierungs-, 559–566
  superadditives, 474
  wesentliches, 474
Spieler, 98, 162, 467
  Dummy, 528
Spielmatrix, 162
Spieltheorie
  kooperative, 465
  strategische, 465, 567
Splitting-Bias, 331
SSD, siehe Stochastische Dominanz 2. Ordnung
St.-Petersburg-Paradox, 110, 144, 301, 304–314
Standards, 428
Stationarität, 42, 203, 333–369
Stationaritäts-Axiom, 198–204, 206, 238
Statusstruktur, 429
Stetigkeit
  in schwacher Form, 33, 115
  in starker Form, 33, 119
Stetigkeits-Axiom, 32, 33, 56, 115, 119, 165, 193, 288, 308, 368
Steuerparadox, 301
Stimmengewicht
  nominelles, 421
  reelles, 421
Stimmrecht, 389
Stochastische Dominanz
  1. Ordnung, 122, 148–153, 158–160
    für diskrete Verteilungen, 149–152, 190
  2. Ordnung, 153–160
    für diskrete Verteilungen, 153, 155–158
strenge Monotonie, 506, 528
Strenge-Monotonie-Axiom, 488
Subadditives Diskontieren, 363–367
Subadditivität, 531
Substitutions-Axiom, 116, 125, 126, 145, 153, 233
Summendominanz-Axiom, 190
Sunk-cost-effect, 289
Sunk-cost-Effekt, 331
Super-St.-Petersburg-Paradox, 307
Superadditivität, 474
Suum-cuique-Prinzip, 479, 548, 554
Symmetrie, siehe Anonymität
Symmetrie-Axiom, 113, 167

Take-the-Best-Heuristik, 336, 346
Talmud-Regel, 555, 565
τ-Wert, 513–519, 527, 528, 559, 564
Teilnahme-Axiom, 395
Teilnutzen, 85
Teilspiel, 476, 484, 573
Teilziel, 13, 48, 49, 95, 97
  wesentliches, 57
Theorem
  Erwartunsgnutzen-, 117
  Minimax-, 170
  von Arrow, 417
  von Bayes, 329
  von Black, 419
  von Bondareva und Shapley (schwache Form), 495
  von Bondareva und Shapley (starke Form), 498
  von Debreu zur Additivität des ordinalen Nutzens, 60, 192
  von Debreu zur Existenz des ordinalen Nutzens, 34
  von Fisher, 186, 213

von Gibbard und Satterthwaite, 420
von Young, 488, 506
Thesurierungspräferenz, 11
Trade-off-Verfahren, 79
Transitivität, 28, 29, 34, 39–43, 97, 143, 165, 214
von Differenzen, 45
Transitivitäts-
Axiom, 28, 56, 114, 165, 193, 288, 368
paradox, 41, 301

Unabhängigkeit
Differenz-, 64–66
schwache, 64
einfache, 60
Vermögens-, 471
vom Vermögen, 309, 471
von der Darstellungsform, 113, 123, 167
von irrelevanten Alternativen, 63, 82, 94, 167, 177, 207, 405, 415, 419
von Klon-Alternativen, 395, 415
wechselseitige, 61, 63, 66, 70, 79, 83, 84, 93, 97, 195, 196, 201, 204, 215, 336, 368
Unabhängigkeits-Axiom, 63, 116, 117, 121–135, 145, 147, 153, 167, 177, 224, 233, 238, 315–320
Ungeduld, 185, 186, 205, 206, 215, 353, 355, 358, 363, 365, 367
Ungewissheit, 5, 160–180
Unmittelbarkeits-Effekt, 334, 335, 355
Unsicherheit, 5
Unsicherheits-
Präferenz, 9, 160–180
vermeidung, 294
Unterlassung, 26, 98, 221, 223, 239
Unternehmens-
kooperation, 461
kultur, 294
Untervektor, 514, 564

Verhältnisskala, 19, 24, 77
Verlustaversion, 331
vermögensunabhängige Präferenzordnung, 471
Vermögensunabhängigkeits-Axiom, 472
Verteilungsfunktion, 149
Verursachungsgerechtigkeit, 532
Veto-Recht, 399
Vollständigkeits-Axiom, 28, 56
von-Neumann-Morgenstern-
Nutzenfunktional, 119
Präferenzfunktional, 121, 153

Wählerparadox, 410
Wahrnehmung, 296, 427
Wahrscheinlichkeit
bedingte, 102, 324
objektive, 99
subjektive, 99
unbedingte, 102, 324
Wahrscheinlichkeits-
dreieck, 127, 129–131, 134, 317
funktion, 152
mischung, 320
simplex, 127, 128
verteilung, 16, 108, 111, 114, 119, 122
Wald-Regel, 169, 178
Wertvorstellungen, 291, 481
Wesentlichkeit
eines Spiels, 474
eines Teilziels, 57, 79, 80
eines Zeitpunktes, 193
Wiedererkennungs-Heuristik, 346
Willensbildung, 391
Wissen, 295
Wunschdenken, 332

Youngs Theorem, 488, 506

ZBR, siehe Zufallsbeitrittsregel
Zeilen-Hinzufügungs-Axiom
Allgemeines, 167
Spezielle, 168
Zeit-
Anomalien, 333–336, 349–369
dominanz, 190, 211, 232
inkonsistenz, 333–336, 349–369
invarianz, 42, 198–204, 238, 357
konsistenz, 42, 198–204, 238, 357
konstanz
absolute, 204, 357
relative, 357
präferenz, 9, 42, 181–216, 225, 231
gesellschaftliche, 184, 216
im engeren Sinn, 184
im weiteren Sinn, 184
individuelle, 184, 216
punktmenge, 221, 231, 232
zeitliche Summendominanz, 190
Zentralinstanz, 467, 541, 566
Ziel-
antinomie, 47
beitrag, 85
bildung, 333, 432
definition, 3
dimension, 2, 369
dominanz, 47

erreichung, 87, 95
erreichungsgrad, 52
formulierung, 428
funktion, 3, 173
gewichtung, 51, 54, 72, 74–77, 331, 369
hierarchie, 46, 86
informationen, 3
komplementarität, 47
kompromiss, 47
konflikt, 47, 390, 496, 504, 511
konkurrenz, 46
kriterien-
  bestimmung, 85
  gewichtung, 66–77, 84–94
kriterium, 47
menge, 50
merkmale, 3
neutralität, 46, 47
restriktion, 47
system, 3, 46, 47
überschreitung, 96
  unterdrückung, 47
  unterschreitung, 96
  variation, 369
  vorgabe, 428
Zufall
  als Entscheidungskriterium, 389
Zufalls-
  beitrittsregel, 551–552, 559, 560
  kante, 234
  knoten, 234
  verfahren, 392
  verteilung, 136
Zukunfts-
  konsum, 183
  präferenz, 184
Zustands-
  dominanz, 100, 107, 146, 159, 162, 163, 165
    intertemporale, 232
  menge, 98, 100, 162, 163, 232
Zuteilung, 482